ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 114 2014 № 3

МЕХАНИКА

УДК 621.38

А. А. Гукасян

Кинематика упругого манипулятора в криволинейной системе координат

(Представлено академиком Л. А. Агаловяном 12/ V 2014)

Ключевые слова: *кинематика, многозвенный упругий манипулятор, криволинейные координаты.*

Введение. Исследование движения манипуляционных роботов во многих случаях более удобно определять с помощью некоторых криволинейных координат. За такие координаты могут быть приняты любые непрерывные однозначные функции $s_p\left(p=1,2,3\right)$ от декартовых координат, удовлетворяющие необходимым требованиям дифференцируемости и условию однозначной разрешимости этих зависимостей относительно декартовых координат. Методы построения криволинейных систем координат проведены в работах [1-3]. Здесь будем рассматривать лишь ортогональные системы. Ниже приводится краткое описание математической модели многозвенного манипулятора с обобщенной упругостью и исследуется кинематика движения в криволинейных координатах.

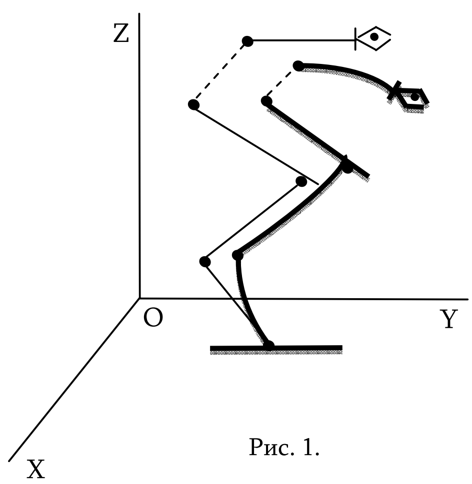

Рис. 1.

1. Математическая модель многозвенного манипулятора. Предполагается, что звенья манипулятора (или часть из них) моделируется как упругие стержни, а соединительные узлы между звеньями содержат упругие элементы большой жесткости, которые в пределе превращаются в идеальные связи [4-7]. Манипуляционные роботы с такими свойствами в дальнейшем назовем манипулятором с обобщенной упругостью (рис. 1).

Обобщенные координаты

жесткой модели манипулятора, определяющие его конфигурацию в пространстве *OXYZ*, обозначим через $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T$, дополнительные обобщенные координаты исходной системы, обусловленные упругими элементами в соединительных узлах, обозначим через $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)^T$ $(m \le n)$ (рис. 2). Деформацию упругих звеньев манипулятора относительно их недеформированного состояния определим через вектор $\mathbf{w}(t,\xi) = = (w_1(t,\xi), w_2(t,\xi), \ldots, w_k(t,\xi))^T$, где ξ – произвольная точка упругого звена. Заметим, что координаты $\alpha_i\,(i = 1,2,\ldots,n)$ и $\beta_j\,(j = 1,2,\ldots,m)$ зависят только от времени.

Декартовые координаты, определяющие положения точек манипулятора в пространстве, зависят как от обобщенных координат жесткой модели $\alpha_i\,(i = 1,2,\ldots,n)$, так и от дополнительных координат $w_l(t,\xi)$ $(l = 1,2, \ldots,k)$ и $\beta_j\,(j = 1,2,\ldots,m)$, т. е.

$$q_i = q_i(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}) \quad (i = 1,2,3). \tag{1.1}$$

Следовательно, криволинейные координаты произвольной точки манипулятора s_p $(p = 1,2,3)$ также будут зависеть от вышеназванных координат

$$s_p = s_p(q_1, q_2, q_3) = s_p\left[f_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}), f_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}), f_3(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})\right] = s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}), \quad (p = 1,2,3) \tag{1.2}$$

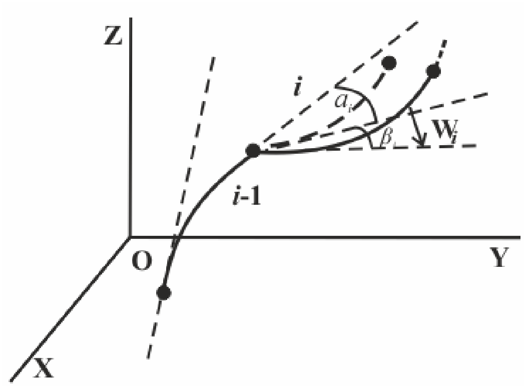

Рис. 2.

Определим скорость движения точек упругого манипулятора в рамках линейной теории упругости, согласно которой жесткость соединительных узлов между звеньями велика $(c_j \sim \varepsilon^{-1})$, а обобщенные координаты β_j малы $(\beta_j \sim \varepsilon, \quad j = 1,2,\ldots,m)$. Предполагается также, что компоненты вектора упругих смещений звеньев малы по сравнению с их линейными размерами, т. е. $w_l(t,\xi) \sim \varepsilon, w_l'(t,\xi) \sim \varepsilon, \dot{w}_l(t,\xi) \sim \varepsilon, (l = 1,2,\ldots,k)$, где $\varepsilon << 1$, частные производные по ξ обозначены штрихом, а по t – точкой. Согласно вышеизложенному в пределе при $\varepsilon \to 0$ соединительные узлы становятся идеальными, а звенья – абсолютно твердыми телами.

2. Скорость движения в криволинейных координатах. Радиус-вектор произвольной точки манипулятора относительно неподвижной точки будет функцией от криволинейных координат $s_p \left(p = 1,2,3 \right)$

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}\left(s_1, s_2, s_3 \right). \tag{2.1}$$

Дифференцируя зависимость (2.1) по времени, с учетом (1.2) для скорости движения найдем следующие выражения:

$$\mathbf{v} = \sum_{p=1}^{3} \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial s_p} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial s_p^* \left(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w} \right)}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial s_p^* \left(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w} \right)}{\partial \beta_j} \dot{\beta}_j + \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial s_p^* \left(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w} \right)}{\partial w_l} \dot{w}_l \right]. \tag{2.2}$$

Так как при составлении каждой из производных $\dfrac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial s_p} \left(p = 1,2,3 \right)$ переменной считается только данная координата $s_p \left(p = 1,2,3 \right)$, то отвечающая ей координатная линия оказывается годографом вектора $\boldsymbol{\rho}\left(s_1, s_2, s_3 \right)$. Следовательно,

$$\frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial s_p} = H_p \cdot s_p^0 \quad \left(p = 1,2,3 \right), \tag{2.3}$$

где s_p^0 – орт данной оси криволинейных координат, а величины

$$H_p = \left| \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial s_p} \right| = \left[\left(\frac{\partial q_1 \left(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w} \right)}{\partial s_p} \right)^2 + \left(\frac{\partial q_2 \left(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w} \right)}{\partial s_p} \right)^2 + \left(\frac{\partial q_3 \left(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w} \right)}{\partial s_p} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.4}$$

называются коэффициентами Лямэ. Направляющие косинусы координатных осей определяются выражениями [1, 2]

$$\begin{aligned} \cos\left(s_p^0 \cdot i \right) &= \frac{1}{H_p} \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial s_p} \cdot i = \frac{1}{H_p} \frac{\partial q_1}{\partial s_p}, \\ \cos\left(s_p^0 \cdot j \right) &= \frac{1}{H_p} \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial s_p} \cdot j = \frac{1}{H_p} \frac{\partial q_2}{\partial s_p} \quad \left(p = 1,2,3 \right), \\ \cos\left(s_p^0 \cdot k \right) &= \frac{1}{H_p} \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial s_p} \cdot k = \frac{1}{H_p} \frac{\partial q_3}{\partial s_p}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

С учетом (2.3), (2.4) вектор скорости (2.2) в криволинейной системе координат представим в виде

$$\mathbf{v} = \sum_{p=1}^{3} H_p \left(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w} \right) \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial s_p^* \left(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w} \right)}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial s_p^* \left(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w} \right)}{\partial \beta_j} \dot{\beta}_j + \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial s_p^* \left(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w} \right)}{\partial w_l} \dot{w}_l \right] s_p^0. \tag{2.6}$$

Формулу (2.6) можно представить в более удобном виде, вводя обобщенные матрицы Лямэ $\mathbf{H}_p^* \left(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w} \right) \left(p = 1,2,3 \right)$, элементы которых зависят от коэффициентов Лямэ $H_p \left(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w} \right)$ и изменения геометрической структуры манипулятора относительно обобщенных координат α_i, β_j, w_l $(i = 1, 2, \ldots, n,$ $j = 1, 2, \ldots m, l = 1, 2, \ldots, k)$.

Матрица $\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})$ имеет размерность $(3 \times n)$ с общим элементом

$$\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}) = \left\{ H_p(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}) \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_i} \right\}_{p,i=1}^{3,n}. \tag{2.7}$$

Матрица $\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})$ размера $(3 \times m)$ имеет следующие элементы:

$$\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}) = \left\{ H_p(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}) \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})}{\partial \beta_j} \right\}_{p,j=1}^{3,m}. \tag{2.8}$$

Введем также матрицу $\mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})$ с элементами

$$\mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}) = \left\{ H_p(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}) \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})}{\partial w_l} \right\}_{p,l=1}^{3,k}. \tag{2.9}$$

$\mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})$ имеет размерность $(3 \times k)$.

Вектор скорости (2.6) с учетом введенных обобщенных матриц Лямэ (2.7) - (2.9) представим в виде суммы трех слагаемых

$$\mathbf{v} = \mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})\dot{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})\dot{\mathbf{w}}. \tag{2.10}$$

При $\boldsymbol{\beta} = 0$ и $\mathbf{w} = 0$ формула (2.10) совпадает с формулой, определяющей скорость движения для абсолютно жесткой модели манипулятора, поскольку $\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) = \mathbf{H}^*(\boldsymbol{\alpha})$, а при $\mathbf{w} = 0,$ $(\boldsymbol{\beta} \neq 0)$ (2.10) совпадает с формулой, определяющей скорость движения манипулятора, соединительные узлы между звеньями которого обладают упругой податливостью [8].

Для оценки слагаемых в (2.10) в рамках принятой модели манипулятора пользуемся разложением функций $s_p = s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})$ и $H_p = H_p(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})$ $(p = 1, 2, 3)$ по формуле Тейлора относительно β_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ и $w_l(t, \xi)(l = 1, 2, \ldots, k)$ с точностью ε

$$s_p = s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \beta_j} \beta_j + \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial w_l} w_l + o(\varepsilon^2), \tag{2.11}$$

$$H_p = H_p(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial H_p(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \beta_j} \beta_j + \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial H_p(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial w_l} w_l + o(\varepsilon^2)$$
$$(p = 1, 2, 3). \tag{2.12}$$

Подставляя (2.11) и (2.12) в (2.6) или в (2.10), после некоторых вычислений вектор скорости движения манипулятора с точностью ε представим в виде

$$\mathbf{v} = \sum_{p=1}^{3} \left[H_p(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i \right] s_p^0 + \sum_{p=1}^{3} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{m} \left(H_p(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \beta_j \partial \alpha_i} + \right. \right. \right.$$

$$+\frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial \alpha_i}\cdot\frac{\partial H_p(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial \beta_j}\Bigg)\beta_j\Bigg]\dot{\alpha}_i\Bigg\}s_p^0+\sum_{p=1}^{3}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{l=1}^{k}\left(H_p(\boldsymbol{\alpha},0,0)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_l\partial \alpha_i}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial \alpha_i}\cdot\frac{\partial H_p(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_l}\right)w_l\right]\dot{\alpha}_i\right\}s_p^0+\sum_{p=1}^{3}\left[H_p(\boldsymbol{\alpha},0,0)\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial \beta_j}\dot{\beta}_j\right]s_p^0+$$

$$+\sum_{p=1}^{3}\left[H_p(\boldsymbol{\alpha},0,0)\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_l}\dot{w}_l\right]s_p^0 \qquad (2.13)$$

или, выводя матрицы $\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)$, $\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},0)$, $\mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha},0,\mathbf{w})$, $\mathbf{H}_4^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)$ и $\mathbf{H}_5^*$ $(\boldsymbol{\alpha},0,0)$, в виде

$$\mathbf{v}=\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)\dot{\boldsymbol{\alpha}}+\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},0)\dot{\boldsymbol{\alpha}}+\mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha},0,\mathbf{w})\dot{\boldsymbol{\alpha}}+$$
$$+\mathbf{H}_4^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)\dot{\boldsymbol{\beta}}+\mathbf{H}_5^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)\dot{\mathbf{w}}$$

или

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_1(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}})+\mathbf{v}_2(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}})+\mathbf{v}_3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}}), \qquad (2.14)$$

где

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ \ \mathbf{v}_2=\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},0)\dot{\boldsymbol{\alpha}}+\mathbf{H}_4^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)\dot{\boldsymbol{\beta}},$$
$$\mathbf{v}_3=\mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha},0,\mathbf{w})\dot{\boldsymbol{\alpha}}+\mathbf{H}_5^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)\dot{\mathbf{w}}.$$

Здесь матрица $\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)$ имеет размерность $(3\times n)$ с элементами

$$\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)=\left\{H_p(\boldsymbol{\alpha},0,0)\frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial \alpha_i}\right\}_{p,i=1}^{3,n}. \qquad (2.15)$$

$\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},0)$ имеет элементы

$$\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},0)=\left\{\sum_{j=1}^{m}\left[H_p(\boldsymbol{\alpha},0,0)\frac{\partial^2 s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial \beta_j\partial \alpha_i}+\frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial \alpha_i}\cdot\frac{\partial H_p(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial \beta_j}\right]\beta_j\right\}_{p,i=1}^{3,n}. \qquad (2.16)$$

Элементы матрицы $\mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha},0,\mathbf{w})$ зависят от $\mathbf{w}(t,\xi)$ и являются

$$\mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha},0,\mathbf{w})=\left\{\sum_{l=1}^{k}\left[H_p(\boldsymbol{\alpha},0,0)\frac{\partial^2 s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_l\partial \alpha_i}+\frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial \alpha_i}\cdot\frac{\partial H_p(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_l}\right]w_l\right\}_{p,i=1}^{3,n}. \qquad (2.17)$$

Матрицы $\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},0)$ и $\mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha},0,\mathbf{w})$ имеют размерность $(3\times n)$.

Матрицы $\mathbf{H}_4^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)$ и $\mathbf{H}_5^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)$ имеют размерность $(3\times m)$, $(3\times k)$ соответственно с элементами

$$\mathbf{H}_4^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)=\left\{H_p(\boldsymbol{\alpha},0,0)\frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial \beta_j}\right\}_{p,j=1}^{3,m}, \qquad (2.18)$$

$$\mathbf{H}_5^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)=\left\{H_p(\boldsymbol{\alpha},0,0)\frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_l}\right\}_{p,l=1}^{3,k}. \qquad (2.19)$$

Разложения (2.11), (2.12) позволяют представить вектор скорости (2.14) движения многозвенного упругого манипулятора в рамках скорости движения абсолютно жесткой модели с добавлением слагаемых, порядок которых не превышает ε. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ – скорость движения жесткой модели манипулятора, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},0)\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{H}_4^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)\dot{\boldsymbol{\beta}}$ – скорость, обусловленная упругостью соединительных узлов манипулятора $\left(\mathbf{v}_2\left(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}}\right)\sim\varepsilon\right)$, а $\mathbf{v}_3 = \mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha},0,\mathbf{w})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{H}_5^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)\dot{\mathbf{w}}$ – скорость, обусловленная упругостью звеньев манипулятора $\left(\mathbf{v}_3\left(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}}\right)\sim\varepsilon\right)$. При $\beta_j = 0\ (j=1,2,\ldots,m)$ $\mathbf{v}_2(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},0,0)\equiv 0$, а при $w_l(t,\xi)=0\ (l=1,2,\ldots,k)$ $\mathbf{v}_3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},0,0)\equiv 0$.

3. Ускорение в криволинейных координатах. После определения скорости движения характерных точек манипулятора с обобщенной упругостью по формуле (2.14) можно также определять проекции вектора ускорения a_p $(p=1,2,3)$ на осях криволинейной системы координат. Проекции вектора ускорения определяются следующим образом:

$$a_p = \mathbf{a}\cdot s_p^0 = \frac{1}{H_p}\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\rho}}{\partial s_p}, \tag{3.1}$$

где согласно (2.3) $\dfrac{1}{H_p}\dfrac{\partial\boldsymbol{\rho}}{\partial s_p} = s_p^0\ (p=1,2,3)$.

Проведя ряд преобразований, получим для проекции вектора ускорений движения манипулятора [1, 2]

$$a_p = \frac{1}{H_p}\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{s}_p}\frac{v^2}{2} - \frac{\partial}{\partial s_p}\frac{v^2}{2}\right\}\ (p=1,2,3),\ v^2 = \sum_{p=1}^{3} v_p^2, \tag{3.2}$$

где

$$\begin{aligned}
v_p &= H_p(\boldsymbol{\alpha},0,0)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial\alpha_i}\dot{\alpha}_i + \\
&+\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{m}\left(H_p(\boldsymbol{\alpha},0,0)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial\beta_j\partial\alpha_i} + \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial\alpha_i}\cdot\frac{\partial H_p(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial\beta_j}\right)\beta_j\right]\dot{\alpha}_i + \\
&+\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{l=1}^{k}\left(H_p(\boldsymbol{\alpha},0,0)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_l\partial\alpha_i} + \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial\alpha_i}\cdot\frac{\partial H_p(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_l}\right)w_l\right]\dot{\alpha}_i + \\
&+H_p(\boldsymbol{\alpha},0,0)\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial\beta_j}\dot{\beta}_j + H_p(\boldsymbol{\alpha},0,0)\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_l}\dot{w}_l.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Подставляя (3.3) в (3.2), получим компоненты вектора ускорения движений манипулятора с обобщенной упругостью в зависимости от обобщенных координат $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w})$, скоростей $\left(\dot{\boldsymbol{\alpha}},\dot{\boldsymbol{\beta}},\dot{\mathbf{w}}\right)$ и ускорений $\left(\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\beta}},\ddot{\mathbf{w}}\right)$

$$a_p = a_p\left(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\dot{\boldsymbol{\beta}},\dot{\mathbf{w}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\beta}},\ddot{\mathbf{w}}\right)\ (p=1,2,3). \tag{3.4}$$

При малых деформациях компоненты вектора ускорений a_p $(p=1,2,3)$ также можно представить в виде суммы трех слагаемых

$$a_p = a_p^1\left(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}}\right) + a_p^2\left(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}},\ddot{\boldsymbol{\beta}}\right) + a_p^3\left(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}},\ddot{\mathbf{w}}\right)\ (p=1,2,3), \tag{3.5}$$

где слагаемые $a_p^1\left(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}}\right)$ $\left(p=1,2,3\right)$ соответствуют ускорению движений абсолютно жесткой модели манипулятора, а слагаемые $a_p^2\left(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}},\ddot{\boldsymbol{\beta}}\right)$ и $a_p^3\left(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}},\ddot{\mathbf{w}}\right)$ $\left(p=1,2,3\right)$ зависят от упругости соединительных узлов и упругости звеньев манипулятора, соответственно.

Институт механики НАН РА

А. А. Гукасян

Кинематика упрогого манипулятора в криволинейной системе координат

В криволинейной системе координат исследована кинематика многозвенного упругого манипулятора. Предполагается, что звенья манипулятора моделируются как упругие стержни, а соединительные узлы между звеньями содержат упругие элементы большой жесткости. В рамках линейной теории упругости получены выражения для скорости и ускорения движений характерных точек звеньев и схвата упругого манипулятора через обобщенные матрицы Ляме.

Ա. Ա. Ղուկասյան

Առաձգականությամբ մանիպուլյատորի կինեմատիկան կորագիծ կոորդինատական համակարգում

Կորագիծ կոորդինատական համակարգում ուսումնասիրվում է բազմօղակ առաձգական մանիպուլյատորի կինեմատիկան: Ենթադրվում է, որ մանիպուլյատորի օղակները մոդելավորվում են որպես առաձգական ձողեր, իսկ օղակների միացման հանգույցները պարունակում են մեծ կոշտությամբ առաձգական էլեմենտներ: Առաձգականության գծային տեսության սահմաններում ստացված են մանիպուլյատորի բնութագրիչ կետերի և բռնիչի շարժման արագության ու արագացման արտահայտությունները Լյամեի ընդհանրացված մատրիցայի միջոցով:

A. A. Ghukasyan

Kinematics of the Elastic Manipulator in Curvilinear Coordinates System

In curvilinear coordinates system the kinematics of multilink elastic manipulator is investigated. It is supposed that the manipulator links are modeled as elastic bars and connecting nodes between links contain the elastic elements of large rigidity. In the framework of linear theory of elasticity the expression for speed as well as acceleration of motion of characteristic link points and elastic manipulator clamp through generalized matrix of Lame are obtained. As an example, the kinematic correlation of motion of two-link manipulator with one elastic link and two elastic connecting hinges is determined.

Литература

1. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. Москва. Наука. 1961. 824 с.
2. *Бухгольц Н. Н.* Основной курс теоретичекой механики. Часть 1. М. Наука. 1967. 467 с.
3. БЭС, Математика. М. Большая российская энциклопедия. 1998. 845 с.
4. *Черноусько Ф. Л., Болотник Н. Н., Градецкий В. Г.* Манипуляционные роботы. М. Наука. 1989. 363 с.
5. *Черноусько Ф. Л.* – Изв. АН СССР. МТТ. 1983. №4. С.101-113.
6. *Черноусько Ф. Л., Градецкий В. Г., Гукасян А. А., Вешников В. Б., Самвелян К. В., Степанов В. П., Шушко Д. А.* Анализ упругой податливости конструкции манипуляционных роботов. Препринт №231. ИПМ АН СССР. М. 1984. 66 с.
7. *Градецкий В. Г., Гукасян А. А., Грудев А. И., Черноусько Ф. Л.* – Изв. АН СССР. МТТ. 1985. №3. С. 63-71.
8. *Гукасян А. А., Мачкалян Р. Н.* – Изв. НАН РА..Механика, 2007. Т. 60. №3. С.114-120.