



принятой системе координат  $N_x > 0$ ,  $M_x < 0$  (рис.1). Под действием момента поперечной силы относительно середины вставленной части  $aN_x$  и момента  $M_x$  ось балки в опорном сечении  $x=0$  будет вращаться на некоторый угол  $\alpha$ . Этот угол, а следовательно, и его тангенс  $dw/dx$  зависят от вращающих моментов. В работе [3] условия рассмотренной упруго-зашемленной опоры представлены в виде при  $x=0$

$$w = a \frac{dw}{dx} + BN_x, \quad \frac{dw}{dx} = D(aN_x - M_x). \quad (1.1)$$

В этой же работе приведены способы опытного определения параметров  $B$  и  $D$ . Очевидно, что между значениями этих параметров существует определенная связь, обусловленная физико-механическими свойствами упруго-деформированного массива и размерами вставленной части балки. Ниже попытаемся аналитически выяснить эту связь, пользуясь гипотезой, аналогичной гипотезе Фусса–Винклера. Согласно этой гипотезе нормальные и касательные силы, которыми действует упруго-деформируемый массив на вставленную часть балки вследствие изменения ее положения, прямо пропорциональны соответствующим перемещениям.

Упруго-деформированный массив на вставленную часть балки (рис.2) вследствие ее вертикального перемещения вниз  $w_0$  будет действовать силами:

- 1) на грань  $EGHF$  нормальной силой от сжатия  $2k_1w_0ab$ ;
- 2) на грань  $ABCD$  нормальной силой от растяжения  $2k_2w_0ab$ ;
- 3) на гранях  $EADF$  и  $GBCH$  одинаковыми касательными силами от скольжения, сумма которых составит  $4k_3w_0ah$ ;
- 4) на торец  $EABG$  касательной силой от скольжения  $k_3w_0bh$ .

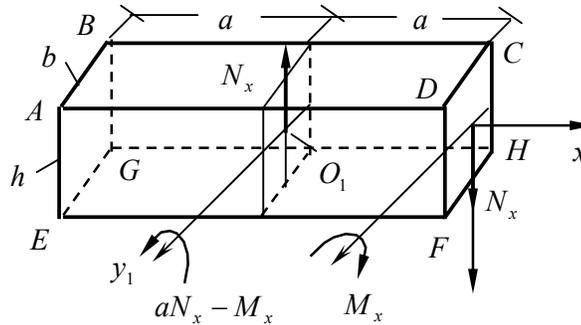


Рис. 2.

Коэффициенты пропорциональности  $k_1$ ,  $k_2$  и  $k_3$  относятся к сжатию, растяжению и скольжению соответственно. Все отмеченные силы направлены вертикально вверх. Их сумма составит

$$F = [2(k_1 + k_2)ab + k_3h(4a + b)]w_0. \quad (1.2)$$

Эта сила уравновешивает поперечную силу  $N_x(x=0)$ . Следовательно

$$F = N_x(x=0) = \frac{w_0}{B} \Rightarrow B = \frac{1}{2(k_1 + k_2)ab + k_3h(4a + b)}, \quad (1.3)$$

Вследствие вращения вставленной части на угол  $\alpha$  упругий массив на нее будет действовать нормальными и касательными силами, которые относительно центральной оси  $0_1y_1$  создают моменты:

1) от сил граней  $EGHF$  и  $ABCD$

$$\frac{2}{3}(k_1 + k_2)a^3b \frac{dw}{dx},$$

2) от сил граней  $EADF$  и  $GBCH$

$$\frac{4}{3}k_3a^3h \frac{dw}{dx},$$

3) от сил торца  $ABGE$   $k_3a^2bh \frac{dw}{dx}$ .

Сумма этих моментов составляет

$$M = \frac{a^2}{3} [2ab(k_1 + k_2) + h(4a + 3b)k_3] \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0}. \quad (1.4)$$

Этот момент уравновешивает моменты  $(aN_x - M_x)_{x=0}$ . Следовательно,

$$M = (aN_x - M_x)_{x=0} = \frac{1}{D} \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} \Rightarrow D = \frac{3}{a^2 [2ab(k_1 + k_2) + h(4a + 3b)k_3]}. \quad (1.5)$$

Из (1.3) и (1.5) нетрудно получить

$$\frac{3}{D} - \frac{a^2}{B} = 2a^2hb k_3. \quad (1.6)$$

Если пренебречь влиянием касательной силы, действующей на торце балки, то связь между параметрами упруго-защемленной опоры (1.6) примет вид

$$\frac{D}{B} = \frac{3}{a^2}. \quad (1.7)$$

Имея в виду, что площадь торца балки  $bh$  и коэффициент скольжения  $k_3$  сравнительно малы, ниже при рассмотрении числового примера, будем пользоваться этим соотношением.

Отметим также, что иногда торец балки не соприкасается с упруго-деформируемым массивом. Тогда (1.7) будет точным.

2. Рассмотрим ортотропную балку прямоугольного поперечного сечения  $b \times h$ , ширина которого постоянна, а толщина линейно меняется по длине:

$$h = h_0 + h_1x. \quad (2.1)$$

Здесь  $h_0$  и  $h_1$  заданные постоянные величины, а  $x$  – расстояние от левого края балки (рис. 3). Левый край балки толщиной  $h_0$  и длиной  $2a$  вставлен в упруго-деформируемый массив. Правый край свободно лежит на класси-

ческой шарнирной опоре. Балка несет равномерно распределенную нагрузку интенсивности  $q \text{ Н/м}^2$ .

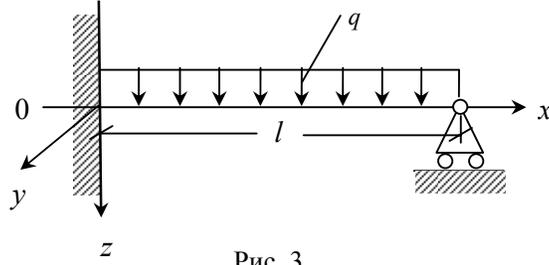


Рис. 3.

Дифференциальные уравнения задачи поперечного изгиба рассматриваемой балки в рамках уточненной теории [2], учитывающей влияние деформаций поперечных сдвигов, имеют вид

$$\begin{aligned} 2h \frac{d\varphi}{dx} + 4\varphi \frac{dh}{dx} &= -3q, \\ Eh^2 \frac{d^3w}{dx^3} + 2Eh \frac{d^2w}{dx^2} \frac{dh}{dx} - Ea_{55}h^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} - 2Ea_{55}h \frac{dh}{dx} \frac{d\varphi}{dx} + 8\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь  $E$  – модуль Юнга материала по направлению оси  $0x$ ,  $\varphi$  – искомая функция, определяющая перерезывающую силу  $N_x$ ,  $a_{55}$  – упругая постоянная, связывающая деформацию поперечного сдвига и касательное напряжение балки в плоскости  $y0z$  [1].

Пользуясь [3], для краевых условий можно написать:

при  $x = 0$

$$w = a \frac{dw}{dx} + BN_x, \quad \frac{dw}{dx} = D(aN_x - M_x). \quad (2.3)$$

при  $x = l$

$$w = 0, \quad M_x = 0. \quad (2.4)$$

Примем безразмеривающие обозначения:

$$\begin{aligned} x &= \bar{x}, \quad l = nh_0, \quad h = h_0H, \quad H = 1 + \gamma\bar{x}, \quad \gamma = nh_1, \\ w &= h_0\bar{w}, \quad q = E\bar{q}, \quad a_{55}E = \chi, \quad \varphi = E\bar{\varphi}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$N_x = Eh_0^2\bar{N}, \quad M_x = Eh_0^3\bar{M}, \quad B = \frac{\bar{B}}{Eh_0}, \quad D = \frac{\bar{D}}{Eh_0^3}.$$

$$b = kh_0, \quad a = ml.$$

С учетом этих обозначений уравнения (2.2) и условия (2.3), (2.4) примут вид

$$\begin{aligned} 2H \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{x}} + 4\gamma\bar{\varphi} &= -3n\bar{q}, \\ H^2 \frac{d^3\bar{w}}{d\bar{x}^3} + 2\gamma H \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} - \chi n H^2 \frac{d^2\bar{\varphi}}{d\bar{x}^2} - 2\chi\gamma n H \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{x}} + 8n^3\bar{\varphi} &= 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

при  $\bar{x} = 0$

$$\bar{w} = m \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} + \bar{B}\bar{N}, \quad \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} = n\bar{D}(m\bar{N} - \bar{M}), \quad (2.7)$$

при  $\bar{x} = 1$

$$\bar{w} = 0, \quad \bar{M} = 0. \quad (2.8)$$

В рамках теории [2] при обозначениях (2.5) безразмерные усилия и изгибающий момент имеют выражения:

$$\bar{N} = \frac{kH}{12n^3} \left[ 8n^3 \bar{\varphi} - \gamma H \left( \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} - n\chi \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{x}} \right) \right], \quad (2.9)$$

$$\bar{M} = -\frac{kH^3}{12n^2} \left( \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} - n\chi \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{x}} \right). \quad (2.10)$$

Задачу можно решить методом коллокаций, представив решение в виде степенных многочленов

$$\bar{w} = a_0 + \sum_{i=1}^j a_i \bar{x}^i, \quad \bar{\varphi} = b_0 + \sum_{i=1}^j b_i \bar{x}^i. \quad (2.11)$$

Разделив интервал  $0 \leq \bar{x} \leq 1$  на  $j$  части и записывая уравнения (2.6) в  $j-1$  точках, а краевые условия (2.7), (2.8) в точках  $\bar{x} = 0, \bar{x} = 1$ , получим систему алгебраических уравнений относительно  $2(j+1)$  неизвестных. Число многочленов (2.11) увеличим настолько, чтобы добиться практической сходимости процесса вычислений. Расчеты удобно делать, считая  $\bar{q} = 1$ ; получим значения величин  $\bar{w}/\bar{q}, \bar{\varphi}/\bar{q}, \bar{N}/\bar{q}$  и  $\bar{M}/\bar{q}$ . В силу линейности задачи в конкретном случае можно эти значения умножить на соответствующее значение  $\bar{q}$  и получить решение для этого случая.

Пусть

$$\begin{aligned} n = 8, \quad m = 1/16, \quad k = 0,5, \quad \gamma = 1, \\ \bar{B} = 0,5; 1; 2; \quad (\bar{D} = 12\bar{B}); \quad \chi = 0; 8. \end{aligned} \quad (2.12)$$

В табл. 1 иллюстрирован процесс сходимости определения значений  $\bar{w}/\bar{q}$  при  $\bar{B} = 1, \chi = 8$ . Имея в виду, что упругие постоянные материалов определяются обычно с точностью от трех до пяти процентов, нетрудно убедиться, что практическая сходимость в данном случае наступает при  $j < 7$ . Такая же картина имеется и во всех остальных случаях (2.12).

Таблица 1

$\bar{B} = 1$	j	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
	$\chi = 8$	6	26.43	71.52	117.6	152.9	172.1	174.1	160.2	132.8	94.79	49.23
7		27.45	75.48	125.1	163.3	184.3	187.2	173.1	144.3	103.9	54.82	0.0
$\gamma = 1$	8	27.03	74.53	123.4	160.8	181.1	183.6	169.4	140.9	101.1	53.07	0.0
	9	27.17	75.08	124.4	162.1	182.8	185.3	171.1	142.4	102.3	53.77	0.0
	10	27.12	74.96	124.3	161.8	182.4	184.9	170.6	141.9	101.9	53.57	0.0
	11	27.14	75.02	124.3	161.9	182.5	185.1	170.8	142.1	102.1	53.65	0.0
	12	27.13	75.01	124.3	161.9	182.5	185.0	170.8	142.1	102.0	53.63	0.0

В табл. 2÷4 приведены значения  $\bar{w}/\bar{q}$ ,  $\bar{N}/\bar{q}$  и  $\bar{M}/\bar{q}$  при (2.12).

**Таблица 2**

	$\frac{\bar{w}}{\bar{q}}$	$\bar{B} = 0$		$\bar{B} = 1$		$\bar{B} = 2$		$\bar{B} = 5$	
		$\chi$		$\chi$		$\chi$		$\chi$	
		0	8	0	8	0	8	0	8
$\bar{x}$	0	0	0	19.86	27.13	32.07	43.03	52.52	68.15
	0.1	15.81	18.07	56.99	75.01	81.44	107.4	119.3	155.4
	0.2	45.75	52.81	97.53	124.3	128.0	164.8	174.4	223.8
	0.3	73.79	86.12	128.8	161.9	162.2	204.7	209.9	266.7
	0.4	92.63	109.4	145.9	182.5	177.2	223.7	224.1	283.1
	0.5	99.70	119.4	147.8	185.0	175.9	221.9	218.2	275.2
	0.6	95.15	115.7	135.7	170.8	159.5	201.7	194.9	246.3
	0.7	80.50	99.61	11.9	142.1	130.4	166.0	157.9	200.4
	0.8	58.03	73.26	79.46	102.0	91.99	118.2	110.7	141.5
	0.9	30.31	39.17	41.15	53.63	47.48	61.75	56.93	73.44
	1	0	0	0	0	0	0	0	0

**Таблица 3**

	$\frac{\bar{N}}{\bar{q}}$	$\bar{B} = 0$		$\bar{B} = 1$		$\bar{B} = 2$		$\bar{B} = 5$	
		$\chi$		$\chi$		$\chi$		$\chi$	
		0	8	0	8	0	8	0	8
$\bar{x}$	0	2.360	2.562	2.233	2.368	2.159	2.259	2.052	2.108
	0.1	1.955	2.162	1.828	1.968	1.754	1.859	1.648	1.708
	0.2	1.555	1.762	1.428	1.568	1.354	1.459	1.248	1.308
	0.3	1.155	1.362	1.028	1.168	0.954	1.059	0.848	0.908
	0.4	0.755	0.962	0.628	0.768	0.554	0.659	0.448	0.508
	0.5	0.355	0.562	0.228	0.368	0.154	0.259	0.048	0.108
	0.6	-0.045	0.162	-0.172	-0.032	-0.245	-0.140	-0.352	-0.292
	0.7	-0.445	-0.238	-0.572	-0.432	-0.645	-0.540	-0.752	-0.692
	0.8	-0.845	-0.638	-0.972	-0.832	-1.045	-0.940	-1.152	-1.092
	0.9	-1.245	-1.038	-1.372	-1.232	-1.446	-1.340	-1.552	-1.492
	1	-1.634	-1.438	-1.762	-1.632	-1.836	-1.739	-1.943	-1.892

**Таблица 4**

	$\frac{\bar{M}}{\bar{q}}$	$\bar{B} = 0$		$\bar{B} = 1$		$\bar{B} = 2$		$\bar{B} = 5$	
		$\chi$		$\chi$		$\chi$		$\chi$	
		0	8	0	8	0	8	0	8
$\bar{x}$	0	-2.838	-4.496	-1.821	-2.943	-1.233	-2.079	-0.382	-0.866
	0.1	-1.115	-2.607	-0.199	-1.209	0.329	-0.431	1.095	0.660
	0.2	0.289	-1.037	1.103	0.205	1.573	0.897	2.254	1.867
	0.3	1.373	0.212	2.085	1.299	2.497	1.904	3.092	2.753
	0.4	2.137	1.142	2.748	2.073	3.100	2.592	3.611	3.320
	0.5	2.581	1.751	3.090	2.528	3.384	2.960	3.809	3.567
	0.6	2.706	2.041	3.112	2.662	3.347	3.008	3.688	3.493
	0.7	2.509	2.011	2.815	2.476	2.991	2.736	3.246	3.099
	0.8	1.994	1.660	2.197	1.971	2.315	2.144	2.485	2.386
	0.9	1.158	0.989	1.259	1.145	1.318	1.231	1.403	1.353
	1	0	0	0	0	0	0	0	

Для наглядности на рис. 4÷7 приведены графики изменения по длине балки величин  $\bar{w}/\bar{q}$ ,  $\bar{\varphi}/\bar{q}$ ,  $\bar{N}/\bar{q}$  и  $\bar{M}/\bar{q}$  при  $\bar{B} = 0.5$ , для классического случая  $\chi = 0$  и для случаев учета влияния поперечного сдвига  $\chi = 5$  и  $\chi = 8$ .

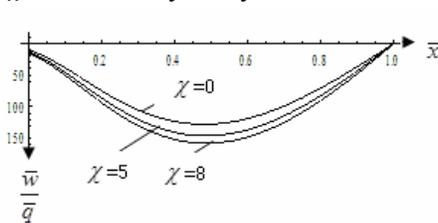


Рис. 4.

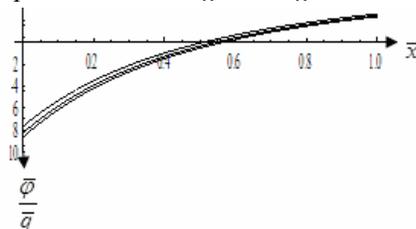


Рис. 5.

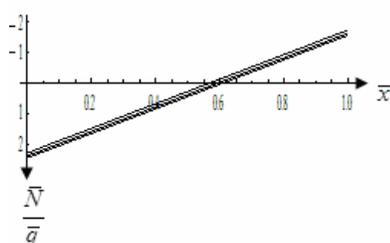


Рис. 6.

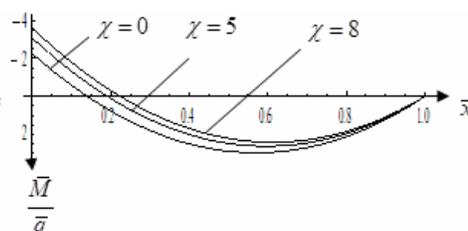


Рис. 7

Отмеченные таблицы и графики приводят к следующим заключениям:

1. С возрастанием параметра  $\bar{B}$ , а следовательно, и  $\bar{D}$  изгибающий момент на упруго-зашемленной опоре  $\bar{x} = 0$ , оставаясь отрицательным, по модулю уменьшается. Это и естественно, так как возрастание параметров  $\bar{B}$  и  $\bar{D}$  означает ослабление упруго-зашемленной опоры, уменьшение ее жесткости.

2. Возрастание  $\bar{B}$  и  $\bar{D}$  приводит к увеличению прогибов.

3. При больших значениях  $\bar{B}$  вместо геометрической линейной постановки принимает нелинейную постановку.

4. При стремлении  $\bar{B}$  к бесконечности упруго-зашемленная опора исчезает и левый конец балки становится свободным, а правый – шарнирно опертым, балка превращается в механизм, и ее равновесие при действии вертикальной нагрузки невозможно.

5. Значение параметра  $\chi$ , учитывающего влияние поперечного сдвига, мало влияет на форму графика изменения  $\bar{\varphi}/\bar{q}$  по длине балки.

6. Значение  $\chi$  практически не влияет на форму графика поперечной силы  $\bar{N}/\bar{q}$ , которая практически остается прямой линией.

7. Как и следовало ожидать, возрастание  $\chi$  приводит к увеличению прогибов балки.

Институт механики НАН РА

**Р. М. Киракосян, С. П. Степанян**

**Неклассическая задача изгиба ортотропной балки  
переменной толщины с упруго-защемленной опорой**

Пользуясь гипотезой, аналогичной гипотезе Фусса – Винклера, определяются параметры упруго-защемленной опоры балки и связь между ними. Решается задача изгиба ортотропной балки линейно-переменной толщины при наличии упруго-защемленной опоры. Учитывается влияние поперечного сдвига. На основе полученного решения делаются качественные заключения.

**Ռ. Մ. Կիրակոսյան, Ս. Պ. Ստեփանյան**

**Առաձգական ամրակցման հենարանով փոփոխական  
հաստության օրթոտրոպ հեծանի ծռման ոչ դասական խնդիրը**

Օգտվելով Ֆուսս – Վինկլերի վարկածին անալոգ վարկածից՝ որոշվում են հեծանի առաձգական ամրակցման հենարանի պարամետրերը և նրանց միջև եղած կապը: Լուծվում է առաձգական ամրակցման հենարանով փոփոխական հաստության օրթոտրոպ հեծանի ծռման խնդիրը ընդլայնական սահմի հաշվառմամբ: Ստացած լուծման հիման վրա արվում են որակական եզրակացություններ:

**R. M. Kirakosyan, S. P. Stepanyan**

**Non Classical Problem of Bending of an Orthotropic Beam of Variable  
Thickness with Elastically Clamped Support**

Using the hypothesis, similar to the Fuss-Winkler's one, parameters of the elastically clamped support of a beam and the connection between them are determined. The problem of bending of an orthotropic beam of variable thickness in the presence of elastically clamped support is solved. The effect of shear forces are taken into account. On the basis of the received solution the qualitative conclusions are made.

**Литература**

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. М. Наука. 1987. 360 с.
2. *Киракосян Р. М.* Прикладная теория ортотропных пластин переменной толщины, учитывающая влияние деформаций поперечных сдвигов. Ереван. Изд. НАН РА «Гитутюн». 2000. 122 с.
3. *Киракосян Р. М.* - ДНАН РА. 2014. Т. 114. № 2. С. 101-107.