ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 114 2014 № 2

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Р. М. Киракосян

Неклассическая задача изгиба ортотропной балки с упруго-защемленной опорой

(Представлено академиком С. А. Амбарцумяном 21/XI 2013)

Ключевые слова: *упруго-защемленная опора, уточненная теория, поперечный сдвиг, ортотропная балка.*

Рассматривается упруго-защемленная опора общего типа, из которой как частные случаи получаются все типы опор балки, включая и случай свободного конца. В рамках уточненной теории С. А. Амбарцумяна [1] решается задача изгиба ортотропной балки прямоугольного постоянного поперечного сечения при действии равномерно распределенной нагрузки. Считается, что один конец балки упруго защемлен, а другой лежит на классической шарнирной подвижной опоре. Получаются аналитически замкнутые выражения прогиба, поперечной силы и изгибающего момента балки. Рассматриваются два частных случая.

1. В правой системе декартовых координат x, y, z рассмотрим упруго-защемленную опору общего типа (рис. 1).

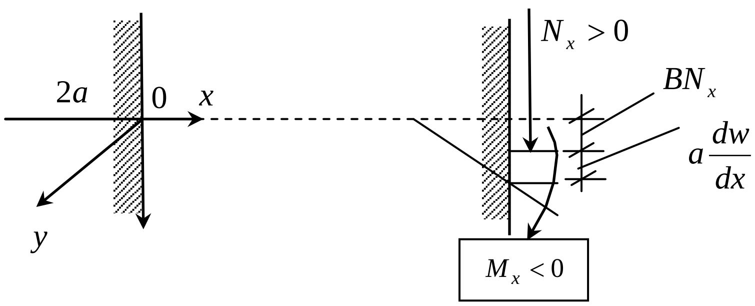

Рис. 1.

Краевая часть балки вставлена в упруго-деформированный массив. Длина этой части составляет $2a$, что достаточно мало относительно длины балки. Из-за малой длины будем считать, что вставленная часть балки подобно абсолютно твердому элементу может поступательно перемещаться и вращаться как одно целое. Поэтому в ее пределах значение dw/dx будем считать постоянным.

Для простоты положим, что балка испытает деформирование только поперечного изгиба. Тогда в опорном сечении балки возникнут только поперечная сила N_x и изгибающий момент M_x. Не нарушая общности, положим, что в принятой системе координат $N_x > 0, M_x < 0$ (рис. 1).

Под действием момента поперечной силы относительно середины вставленной части aN_x и момента M_x ось балки в опорном сечении $x = 0$ будет вращаться на некоторый угол. Этот угол, а следовательно, и его тангенс dw/dx зависят от вращающих моментов. Считая, что величина dw/dx прямо пропорциональна сумме этих моментов и в принятой правой системе координат $dw/dx > 0$ при отрицательном моменте, можно написать

$$\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=0} = D(aN_x - M_x). \tag{1.1}$$

Здесь D – постоянная, обратная жесткости упруго-защемленной опоры на вращение.

Прогиб балки в опорном сечении $x = 0$ состоит из двух частей. Одна из них возникает от вращения вставленной части балки, а другая – от ее поступательного вертикального перемещения от действия поперечной силы $N_x(x = 0)$. По аналогии с гипотезой Фусса–Винклера можно считать, что вторая часть опорного прогиба прямо пропорциональна поперечной силе N_x. В итоге для $w(x-0)$ получим

$$w\big|_{x=o} = a\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=0} + BN_x\big|_{x=0}. \tag{1.2}$$

Здесь B – постоянная, обратная жесткости упруго-защемленной опоры на прогиб.

Таким образом, условия упруго-защемленной опоры будут:

$$при \;\; x = 0 \quad w = a\frac{dw}{dx} + BN_x, \quad \frac{dw}{dx} = D\left(aN_x - M_x\right). \tag{1.3}$$

Несколько слов об экспериментальном определении характеристик B и D. Надо изготовить опытный образец опоры общего типа натуральных размеров и вместо балки сделать выступ ничтожно малой длины. К сечению $x = 0$ надо приложить только некоторую вертикальную силу P достаточно большой величины и измерить значения прогиба w и угла вращения dw/dx. Постоянные B и D определятся по формулам

$$B = \frac{1}{P}\left(w - a\frac{dw}{dx}\right), \;\; D = \frac{1}{aP}\cdot\frac{dw}{dx}. \tag{1.4}$$

В случае же, когда торец $x = 0$ склеен или сварен с упругим массивом $(a = 0)$, к сечению $x = 0$ надо по очереди приложить силу P и момент M. Измерив значения w и dw/dx, B и D можно определить формулами

$$B = \frac{w}{P}, \; D = -\frac{1}{M}\frac{dw}{dx}. \qquad (1.5)$$

Постоянные B и D в системе СИ имеют размерность

$$[B] = M \cdot H^{-1}, \; [D] = (H \cdot M)^{-1}. \qquad (1.6)$$

Из условий (1.3) можно получить условия всех типов опор. Приведем несколько примеров:

I) условия абсолютно жестко защемленной опоры:

$$B = 0, \; D = 0; \qquad (1.7)$$

II) условия классической шарнирной опоры:

$$a = 0, \; B = 0, \; D = \infty; \qquad (1.8)$$

III) условия классической шарнирной опоры на упругом основании:

$$a = 0, \; B > 0, \; D = \infty; \qquad (1.9)$$

IV) условия упругой шарнирной опоры на жестком основании:

$$a = 0, \; B = 0, \; 0 < D < \infty \qquad (1.10)$$

и т.д.

2. Рассмотрим ортотропную балку с прямоугольным постоянным поперечным сечением $b \times h$. Балка находится под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки интенсивности q. Левый край балки $x = 0$ имеет упруго-защемленную опору общего типа, а ее правый край $x = l$ опирается на классическую шарнирную подвижную опору (рис. 2).

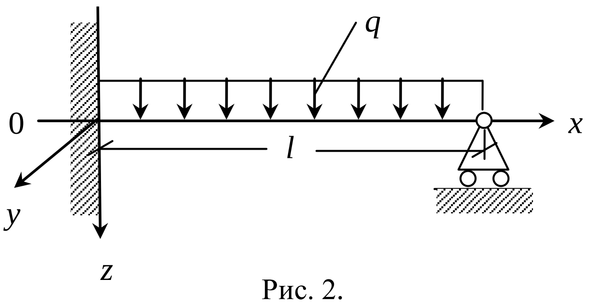

Рис. 2.

Изгибающий момент M_x и перерезывающая сила N_x в рамках уточненной теории С. А. Амбарцумяна [1], учитывающей влияние деформаций поперечных сдвигов, имеют вид

$$M_x = -EJ\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{h^2\chi}{10} \cdot J \cdot \frac{d\varphi}{dx}, \qquad (2.1)$$

$$N_x = J\varphi, \; (\chi = a_{55}E). \qquad (2.2)$$

Здесь E – модуль Юнга материала балки по направлению оси $0x$, φ – искомая функция, определяющая перерезывающую силу, a_{55} – упругая постоянная, связывающая деформацию поперечного сдвига и касательного напряжения балки в плоскости $y0z$. Через J обозначен момент инерции поперечного сечения балки относительно его центральной оси $0y$

$$J = \frac{bh^3}{12}. \qquad (2.3)$$

Дифференциальные уравнения равновесия балки имеют вид [1]

$$\frac{dM_x}{dx} = N_x\ , \quad \frac{dN_x}{dx} = -q. \tag{2.4}$$

С учетом (2.1) и (2.2) из (2.4) получим

$$\begin{aligned} &E\frac{d^3w}{dx^3} - \frac{h^2\chi}{10}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \varphi = 0, \\ &\frac{d\phi}{dx} = -\frac{q}{J}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Решение этой системы будет

$$\varphi = -\frac{q}{J}x - \frac{C_1}{J}\ ,\ \left(N_x = -qx - C_1\right), \tag{2.6}$$

$$EJw = q\frac{x^4}{24} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4. \tag{2.7}$$

Через C_i обозначены постоянные интегрирования, которые определятся из краевых условий:

$$\begin{aligned} &\text{при}\ \ x = 0 \quad w = a\frac{dw}{dx} + BN_x\ ,\ \frac{dw}{dx} = D\left(aN_x - M_x\right), \\ &\text{при}\ \ x = l \quad w = 0,\ M_x = 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Удовлетворив этим условиям, с учетом (2.6) и (2.7) относительно постоянных C_i получим систему уравнений

$$\begin{cases} BEJ \cdot C_1 - aC_3 + C_4 = 0, \\ aDEJ \cdot C_1 - DEJC_2 + C_3 = \dfrac{EJDh^2\chi}{10}\cdot q, \\ 4l^3C_1 + 12l^2C_2 + 24lC_3 + 24C_4 = -ql^4, \\ lC_1 + C_2 = -\dfrac{ql^2}{2} - \dfrac{h^2\chi}{10}\cdot q. \end{cases} \tag{2.9}$$

Решая (2.9), получим

$$\begin{aligned} &C_1 = -\frac{ql^2}{40H}\left[25l^2 + 60EJD\left(l+a\right) + 6h^2\chi\right], \\ &C_2 = \frac{q}{40H}\left\{5l^5 - 60EJl^2\left[B + aD\left(l+a\right)\right] + 2h^2\chi l^3 - 12EJh^2\chi\left[B + D\left(l+a\right)^2\right]\right\}, \\ &C_3 = \frac{qEJl^2D}{40H}\left[5l^2\left(l+5a\right) - 60EJB + 6h^2\chi\left(l+a\right)\right], \\ &C_4 = \frac{qEJl^2}{40H}\left\{5l^2\left[5B + aD\left(l+5a\right)\right] + 60EJDBl + 6h^2\chi\left[B + aD\left(l+a\right)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Через H обозначено выражение

$$H = l^3 + 3EJ\left[B + D\left(l+a\right)^2\right]. \tag{2.11}$$

Отметим, что члены с множителем χ учитывают влияние деформации поперечного сдвига.

Подставляя (2.10) в (2.1), (2.2), (2.6) и (2.7), после некоторых видоизменений для N_x, M_x и w получим

$$N_x = \frac{q}{40M}\left[5l^3\left(5l-8x\right)+60EJD(l+a)\left(l^2-2lx-2ax\right)-120EJBx+6h^2\chi l^2\right], \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} M_x = \frac{q}{40H}\Big\{&5l^3\left(5lx-l^2-4x^2\right)+60EJB\left(l^2-x^2\right)+ \\ &+60EJD\left[l^2x\left(l-x\right)+a\left(l+a\right)\left(l^2-x^2\right)\right]-6h^2\chi l^2\left(l-x\right)\Big\}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} W = \frac{q}{240EJH}\Big\{&5l^3x^2\left(3l^2-5lx+2x^2\right)+ \\ &30EJD\Big[l^2x\left(l^3-2lx^2+x^3\right)+al\Big(2x^4-2lx^3- \\ &-6l^2x^2+5l^3x+l^4\Big)+a^2\left(5l^4-6l^2x^2+x^4\right)\Big]+ \\ &+30EJB\left(5l^4-6l^2x^2+x^4\right)+360E^2J^2DBl^2\left(l-x\right)+ \\ &+6h^2\chi l^2x^2\left(l-x\right)+36EJh^2\chi B\left(l^2-x^2\right)+ \\ &+36EJh^2\chi D\left(l+a\right)\left(l^2x-lx^2+al^2-ax^2\right)\Big\}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Рассмотрим частные случаи.

I. Вместо упруго-защемленной опоры имеется классическая жестко защемленная опора. В этом случае

$$B=0,\ D=0,\ H=l^3. \quad (2.15)$$

С учетом (2.15) из (2.12)÷(2.14) получим

$$N_x = \frac{q}{40l}\left[5l\left(5l-8x\right)+6h^2\chi\right], \quad (2.16)$$

$$M_x = -\frac{q}{40l}\left[5l\left(l^2-5lx+4x^2\right)+6h^2\chi\left(l-x\right)\right], \quad (2.17)$$

$$w = \frac{qx^2}{240EJl}\left[5l\left(3l^2-5lx+2x^2\right)+6h^2\chi\left(l-x\right)\right]. \quad (2.18)$$

Из этих выражений видно, что учет поперечного сдвига влияет на значения всех расчетных величин балки.

II. Вместо упруго-защемленной опоры имеется классическая шарнирная опора. Тогда

$$a=B=0,\ D=\infty,\ H=3EJDl^2. \quad (2.19)$$

С учетом (2.19) из (2.12)÷(2.14) получим

$$N_x = \frac{q}{2}\left(l-2x\right), \quad (2.20)$$

$$M_x = \frac{qx}{2}\left(l-x\right), \quad (2.21)$$

$$w = \frac{qx}{120EJ}\left[5\left(l^3-2lx^2+x^3\right)+6h^2\chi\left(l-x\right)\right]. \quad (2.22)$$

В отличие от случая I учет поперечного сдвига в данном случае влияет только на значение прогиба балки, что является следствием статической определимости задачи.

Аналогичным образом из (2.12)÷(2.14) можно получить решения и остальных частных случаев.

В заключение отметим, что идею упруго-защемленной опоры можно распространить как на более сложные виды деформирования балки, так и на анизотропные пластинки и оболочки постоянной и переменной толщины [2]÷[4].

Институт механики НАН РА

Р. М. Киракосян

Неклассическая задача изгиба ортотропной балки с упруго-защемленной опорой

Рассматривается упруго-защемленная опора, из которой как частный случай получаются все типы опор, включая и случай свободного конца. В рамках уточненной теории С. А. Амбарцумяна решается задача изгиба ортотропной балки прямоугольного постоянного поперечного сечения при действии равномерно распределенной поперечной нагрузки. Считается, что один конец балки упруго защемлен, а другой лежит на классической шарнирной подвижной опоре. Получаются аналитически замкнутые выражения прогиба, поперечной силы и изгибающего момента балки. Рассматриваются два частных случая.

Ռ. Մ. Կիրակոսյան

Առաձգական ամրակցված հենարանով հեծանի ծռման ոչ դասական խնդիրը

Դիտարկվում է առաձգական ամրակցման հենարան, որից, որպես մասնավոր դեպքեր, ստացվում են բոլոր տիպի հենարանները, ներառյալ նաև ազատ եզրը: Ճշգրտված [1] տեսության շրջանակներում լուծվում է ուղղանկյուն հաստատուն կտրվածքով օրթոտրոպ հեծանի ծռման խնդիրը հավասարաչափ բաշխված բեռի ազդեցության դեպքում ընդունվում է, որ հեծանի մի ծայրն առաձգական ամրակցված է, իսկ մյուսը հենված է դասական հոդակապային հենարանին: Ստացվում են հեծանի ճկվածքի, լայնական ուժի և ծռող մոմենտի անալիտիկ փակ արտահայտությունները: Դիտարկվում են երկու մասնավոր դեպքեր:

R. M. Kirakosyan

Non-Classical Problem of a Bend Orthotropic Beams with the Elastic Clamped Support

The elastic clamped support from which as a special case, several types of supports turn out, including the case of the free end is considered. Within S. A. Ambartsumyan's refined theory the problem of a bend of an orthotropic beam of rectangular constant

cross section is solved under the action of uniformly distributed transverse loads. It is considered that one end of a beam is elastically clamped and the other one is hinged on a classical mobile support. It is recieved analytically closed expressions of deflection, sher force and bending moment of the beam. Two special cases are considered.

Литература

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. М. Наука. 1987. 360 с.
2. *Амбарцумян С. А*. Общая теория анизотропных оболочек. М. Наука. 1974. 448 с.
3. *Киракосян Р. М.* Прикладная теория ортотропных пластин переменной толщины, учитывающая влияние деформаций поперечных сдвигов. Изд. НАН РА “Гитутюн”. 2000. 122 с.
4. *Киракосян Р. М*. - ДНАН РА. 2012. Т. 112. №4. С. 369–376.