

## МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СОПРЯЖЕННЫХ АНАЛОГОВ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СТЕЙНА $A(t) \cdot X^*(t) \cdot B(t) - X(t) = C(t)$

**А.А. Айвазян**

*Национальный политехнический университет Армении*

Рассмотрены два метода решения однопараметрических сопряженных аналогов матричных уравнений типа Стейна: аналитический и численно-аналитический, а также две разновидности численно-аналитического метода: последовательный и параллельный. При использовании обратных дифференциальных преобразований за основу были взяты ряды Тейлора, которые обеспечили точное и эффективное восстановление решения.

На основе этих методов были созданы соответствующие модули программ, интегрированные в уже созданном пакете прикладных программ PARMAT, который создавался для комплексного решения однопараметрических матричных уравнений. Представлена блок-схема программного модуля, а также описаны некоторые части программной реализации и тонкости внедрения модуля в состав пакета.

Исследован также широко распространенный метод решения параметрических матричных уравнений - метод замороженных коэффициентов. Проведен сравнительный анализ всех представленных в работе методов, для которого выстроены диаграммы производительности по нескольким критериям: времени работы, использованию оперативной памяти компьютера и числу элементарных действий.

Рассмотрен модельный пример с квадратными матрицами-коэффициентами малых размеров, для которого были получены точное тейлоровское решение, а также приближенное решение в результате использования метода замороженных коэффициентов и метода Ньютона.

На основе результатов исследования характеристик представлены рекомендации по выбору метода для частных случаев, таких как программная реализация на “облачном” сервере и реализация в локальной сети, а также описаны их преимущества и недостатки.

**Ключевые слова:** однопараметрические сопряженные матричные уравнения типа Стейна, дифференциальные преобразования, модульный пакет прикладных программ PARMAT, метод замороженных коэффициентов, сравнительный анализ методов, диаграммы производительности.

**Введение.** Методы решения сопряженных аналогов числовых матричных уравнений типа Стейна, т.е. матричных уравнений  $A \cdot X^* \cdot B - X = C$ , рассмотрены в работах [1,2]. Однопараметрические непрерывные матричные уравнения типа Стейна  $A(t) \cdot X(t) \cdot B(t) - X(t) = C(t)$  и методы их решения рассмотрены, в частнос-

ти, в [3,4], а их транспонированные аналоги – в [5].

В настоящей работе рассматриваются методы решения однопараметрических сопряженных аналогов матричных уравнений типа Стейна

$$A(t) \cdot X^*(t) \cdot B(t) - X(t) = C(t), \quad (1)$$

где  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  – матрицы - коэффициенты порядка  $m$ ;  $X(t)$  - неизвестная матрица также порядка  $m$ , подлежащая определению:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1m}(t) \\ x_{21}(t) & \dots & x_{2m}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{m1}(t) & \dots & x_{mm}(t) \end{bmatrix} = (x_{ij}(t)), \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, m}. \quad (2)$$

**1. Аналитический метод решения.** Из матричного уравнения (1) можно получить

$$X(t) = A(t) \cdot X^*(t) \cdot B(t) - C(t), \quad (3)$$

откуда

$$X^*(t) = B^*(t) \cdot X(t) \cdot A^*(t) - C^*(t). \quad (4)$$

С другой стороны, при условиях

$$\text{rang}A(t) = m, \quad (5)$$

$$\text{rang}B(t) = m \quad (6)$$

из матричного уравнения (1) получим

$$X^*(t) = A^{-1}(t) \cdot [C(t) + X(t)] \cdot B^{-1}(t). \quad (7)$$

Сопоставление матричных уравнений (4) и (7) приводит к следующему:

$$A^{-1}(t) \cdot X(t) \cdot B^{-1}(t) - B^*(t) \cdot X(t) \cdot A^*(t) = -C^*(t) - A^{-1}(t) \cdot C(t) \cdot B^{-1}(t). \quad (8)$$

Используя алгебру матричных вычислений и аппарат кронекеровых произведений матриц [6,7], из (8) получим

$$\begin{aligned} & \left[ A^{-1}(t) \otimes B^{-T}(t) - B^*(t) \otimes A^{*T}(t) \right]_{m^2 \times m^2} \cdot \hat{X}(t)_{m^2 \times 1} = D(t) \cdot \hat{X}(t) = \\ & = -\left[ C^*(t) + A^{-1}(t) \cdot C(t) \cdot B^{-1}(t) \right]_{m^2 \times 1} = -\hat{F}(t), \end{aligned} \quad (9)$$

где символ  $\otimes$  - знак кронекерова произведения матриц, а гипервектор:

$$\hat{X}(t) = (x_{11}(t), \dots, x_{1m}(t); \dots; x_{m1}(t), \dots, x_{mm}(t))^T. \quad (10)$$

Предположим, что матрица  $D(t)$  полноранговая, т.е. имеет место условие

$$\text{rang}D(t) = m^2. \quad (11)$$

Из (9) получим, что гипервектор

$$\hat{X}(t) = -D^{-1}(t) \cdot \hat{F}(t), \quad (12)$$

а следовательно, в соответствии с (10) и решение (2).

## 2. Последовательный численно-аналитический метод решения.

Предположим, что для матриц  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$ ,  $X^*(t)$  и  $X(t)$  с аналитическими элементами имеют место дифференциальные преобразования [8, 9].

С учетом правил алгебры дифференциальных преобразований при переводе (9) из области оригиналов в область дифференциальных изображений получим:

**при  $K=0$ :**

$$\begin{aligned} \left[ A^{\vee^{-1}}(0) \otimes B^{\vee^{-T}}(0) - B^*(0) \otimes A^{*T}(0) \right] \cdot \hat{X}(0) &= D(0,0) \cdot \hat{X}(0) = \\ &= -[C^*(0) + A^{\vee^{-1}}(0) \cdot C(0) \cdot B^{\vee^{-1}}(0)] = -\hat{F}(0), \end{aligned} \quad (13)$$

откуда при выполнении условия

$$\text{rang}D(0,0) = m^2 \quad (14)$$

из (11) получим

$$\hat{X}(0) = -D^{-1}(0,0) \cdot \hat{F}(0); \quad (15)$$

**при  $K=1$ :**

$$\begin{aligned} \left[ A^{\vee^{-1}}(1) \otimes B^{\vee^{-T}}(0) + A^{\vee^{-1}}(0) \otimes B^{\vee^{-T}}(1) - B^*(0) \otimes A^{*T}(1) - B^*(1) \otimes A^{*T}(0) \right] \cdot \hat{X}(0) + \\ + \left[ A^{\vee^{-1}}(0) \otimes B^{\vee^{-T}}(0) - B^*(0) \otimes A^{*T}(0) \right] \cdot \hat{X}(1) = D(1,0;0,1) \cdot \hat{X}(0) + D(0,0) \cdot \hat{X}(1) = \\ = -[C^*(1) + A^{\vee^{-1}}(1) \cdot C(0) \cdot B^{\vee^{-1}}(0) + A^{\vee^{-1}}(0) \cdot C(1) \cdot B^{\vee^{-1}}(0) + A^{\vee^{-1}}(0) \cdot C(0) \cdot B^{\vee^{-1}}(1)] = -\hat{F}(1), \end{aligned} \quad (16)$$

откуда

$$\hat{X}(1) = -D^{-1}(0,0) \cdot [\hat{F}(1) + D(1,0;0,1) \cdot \hat{X}(0)]; \quad (17)$$

**при  $K=2$ :**

$$\begin{aligned} \left[ A^{\vee^{-1}}(2) \otimes B^{\vee^{-T}}(0) + A^{\vee^{-1}}(1) \otimes B^{\vee^{-T}}(1) + A^{\vee^{-1}}(0) \otimes B^{\vee^{-T}}(2) - \right. \\ \left. - B^*(2) \otimes A^{*T}(0) - B^*(1) \otimes A^{*T}(1) - B^*(0) \otimes A^{*T}(2) \right] \cdot \hat{X}(0) + \\ + \left[ A^{\vee^{-1}}(1) \otimes B^{\vee^{-T}}(0) + A^{\vee^{-1}}(0) \otimes B^{\vee^{-T}}(1) - \right. \\ \left. - B^*(0) \otimes A^{*T}(1) - B^*(1) \otimes A^{*T}(0) \right] \cdot \hat{X}(1) + \left[ A^{\vee^{-1}}(0) \otimes B^{\vee^{-T}}(0) - \right. \\ \left. - B^*(0) \otimes A^{*T}(0) \right] \cdot \hat{X}(2) = \\ = D(2,0;1,1;0,2) \cdot \hat{X}(0) + D(1,0;0,1) \cdot \hat{X}(1) + D(0,0) \cdot \hat{X}(2) = -[C^*(2) + \\ + A^{\vee^{-1}}(2) \cdot C(0) \cdot B^{\vee^{-1}}(0) + A^{\vee^{-1}}(0) \cdot C(2) \cdot B^{\vee^{-1}}(0) + A^{\vee^{-1}}(0) \cdot C(0) \cdot B^{\vee^{-1}}(2) + \\ + A^{\vee^{-1}}(1) \cdot C(0) \cdot B^{\vee^{-1}}(1) + A^{\vee^{-1}}(1) \cdot C(1) \cdot B^{\vee^{-1}}(0) + A^{\vee^{-1}}(0) \cdot C(1) \cdot B^{\vee^{-1}}(1)] = -\hat{F}(2), \end{aligned} \quad (18)$$

откуда

$$\hat{X}(2) = -D^{-1}(0,0) \cdot [\hat{F}(2) + D(2,0;1,1;0,2) \cdot \hat{X}(0) + D(1,0;0,1) \cdot \hat{X}(1)]; \quad (19)$$

⋮

при  $K=K$ :

$$\begin{aligned}
& \left[ \begin{array}{l} A^{-1}(K) \otimes B^{-T}(0) + A^{-1}(K-1) \otimes B^{-T}(1) + \dots \\ \dots + A^{-1}(1) \otimes B^{-T}(K-1) + A^{-1}(0) \otimes B^{-T}(K) - \\ - B^*(K) \otimes A^{*T}(0) - B^*(K-1) \otimes A^{*T}(1) - \dots \\ \dots - B^*(1) \otimes A^{*T}(K-1) - B^*(0) \otimes A^{*T}(K) \end{array} \right] \cdot \hat{X}(0) + \\
& + \left[ \begin{array}{l} A^{-1}(K-1) \otimes B^{-T}(0) + A^{-1}(K-2) \otimes B^{-T}(1) + \dots \\ + A^{-1}(1) \otimes B^{-T}(K-2) + A^{-1}(0) \otimes B^{-T}(K-1) - \\ - B^*(K-1) \otimes A^{*T}(0) - B^*(K-2) \otimes A^{*T}(1) - \\ - B^*(1) \otimes A^{*T}(K-2) - B^*(0) \otimes A^{*T}(K-1) \end{array} \right] \cdot \hat{X}(1) + \dots \\
& \dots + \left[ A^{-1}(0) \otimes B^{-T}(0) - B^*(0) \otimes A^{*T}(0) \right] \cdot \hat{X}(K) = \\
& = D(K,0;K-1,1;\dots;1,K-1;0,K) \cdot \hat{X}(0) + D(K-1,0;K-2,1;\dots;1,K-2;0,K-1) \cdot \hat{X}(1) + \dots \\
& \dots + D(1,0;0,1) \cdot \hat{X}(K-1) + D(0,0) \cdot \hat{X}(K) = -[C^*(K) + A^{-1}(K) \cdot C(0) \cdot B^{-1}(0) + \\
& + A^{-1}(K-1) \cdot C(1) \cdot A^{-1}(0) + A^{-1}(K-1) \cdot C(0) \cdot B^{-1}(1) + A^{-1}(K-2) \cdot C(2) \cdot B^{-1}(0) + \dots \\
& \dots + A^{-1}(K-2) \cdot C(1) \cdot B^{-1}(1) + A^{-1}(K-2) \cdot C(0) \cdot B^{-1}(2) + \dots \\
& \dots + A^{-1}(1) \cdot C(0) \cdot B^{-1}(K-1) + A^{-1}(0) \cdot C(1) \cdot B^{-1}(K-1) + A^{-1}(0) \cdot C(0) \cdot B^{-1}(K)] = -\hat{F}(K),
\end{aligned} \tag{20}$$

откуда

$$\hat{X}(K) = -D^{-1}(0,0) \cdot \left[ \hat{F}(K) + \sum_{l=1}^K D(\ell,0; \ell-1,1;\dots;1, \ell-1; 0, \ell) \cdot \hat{X}(K-\ell) \right], \tag{21}$$

где

$$\begin{aligned}
D(\ell,0; \ell-1,1;\dots;1, \ell-1; 0, \ell) &= \sum_{\ell=0}^K A^{-1}(\ell) \otimes B^{-T}(K-\ell) - \\
&- \sum_{\ell=0}^K B^*(K-\ell) \otimes A^{*T}(\ell), \forall \ell = \overline{1, K},
\end{aligned} \tag{22}$$

а матрица:

$$\hat{F}(K) = \sum_{\ell=0}^K A^{-1}(K-\ell) \prod_{p=0}^{\ell} C(p) \cdot B^{-1}(l-p). \tag{23}$$

Следовательно, имея гипервекторы дискрет (15), (17), (19) и (21), можно без особых усилий трансформировать их в матричные дискреты

$$X(K) = \begin{bmatrix} x_{11}(K) & \dots & x_{1m}(K) \\ x_{21}(K) & \dots & x_{2m}(K) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{m1}(K) & \dots & x_{mm}(K) \end{bmatrix}, \quad K = \overline{0, \infty} \tag{24}$$

и в соответствии с (12) восстановить неизвестное решение задачи - оригинал  $X(t)$ .

**3. Параллельный численно-аналитический метод решения.** Объединив рекуррентные гипервекторные соотношения (13), (16), (18) и (20), получим следующее гиперматрично-гипервекторное представление:

$$\begin{bmatrix} D(0,0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ D(1,0;0,1) & D(0,0) & 0 & \dots & 0 \\ D(2,0;1,1;0,2) & D(1,0;0,1) & D(0,0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D(K,0;K-1,1;\dots,1,K-1,0,K) & D(K-1,0;\dots,0,K-1) & \dots & \dots & D(0,0) \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{X}(0) \\ \hat{X}(1) \\ \hat{X}(2) \\ \vdots \\ \hat{X}(K) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \hat{F}(0) \\ \hat{F}(1) \\ \hat{F}(2) \\ \vdots \\ \hat{F}(K) \end{pmatrix} \quad (25)$$

или

$$D(\bullet) \cdot \hat{X}(\bullet) = -\hat{F}(\bullet), \quad (26)$$

откуда при выполнении условия (24), а следовательно, и условия

$$\text{rang}D(\bullet) = (K+1) \cdot m^2 \quad (27)$$

из (26) имеем

$$\hat{X}(\bullet) = -D^{-1}(\bullet) \cdot \hat{F}(\bullet) \quad (28)$$

или

$$\begin{pmatrix} \hat{X}(0) \\ \hat{X}(1) \\ \hat{X}(2) \\ \vdots \\ \hat{X}(K) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ D_1 & D_0 & 0 & \dots & 0 \\ D_2 & D_1 & D_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ D_K & D_{K-1} & D_{K-2} & \dots & D_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{F}(0) \\ \hat{F}(1) \\ \hat{F}(2) \\ \vdots \\ \hat{F}(K) \end{pmatrix}, \quad (29)$$

где с учетом приведенных в [10] результатов блоки – гиперматрицы:

$$\begin{cases} D_0 = D^{-1}(0,0) = D^{-1}(0,0) \cdot E = D^{-1}(0,0) \cdot \bar{D}_0, \\ D_1 = -D^{-1}(0,0) \cdot [D(1,0;0,1) \cdot D^{-1}(0,0)] = D^{-1}(0,0) \cdot \bar{D}_1, \\ D_2 = -D^{-1}(0,0) \cdot [D(1,0;0,1) \cdot D^{-1}(0,0) \cdot D(1,0;0,1) \cdot D^{-1}(0,0) - \\ - D(2,0;1,1;0,2) \cdot D^{-1}(0,0)] = D^{-1}(0,0) \cdot \bar{D}_2, \\ \dots \\ D_K = -D^{-1}(0,0) \cdot \sum_{r=1}^K D(r,0;r-1,1;\dots,1,r-1,0,r) \cdot D_{K-r} = D^{-1}(0,0) \cdot \bar{D}_K. \end{cases} \quad (30)$$

В конечном итоге, имея гипервектор (28) или (29), в соответствии с обратным дифференциальным преобразованием (12) можно восстановить решение  $X(t)$ .

**4. Метод замороженных коэффициентов.** Предположим, что  $w$  – число коэффициентов, предназначенных для фиксирования (“заморозки”);  $[a,b]$  – пределы отрезка, из которого выбираем коэффициенты.

Теперь, фиксируя параметр  $t$  в выбранных точках:

$$t = t_1, t_2, t_3, \dots, t_w,$$

получим  $w$  разных числовых матричных уравнений

$$A_i \cdot X_i^* \cdot B_i - X_i = C_i, i = \overline{1, w}, \quad (31)$$

а выбрав метод аппроксимации (в этой работе рассмотрен метод Ньютона), получим верхнюю треугольную форму аппроксимирующих функций

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	
$0$	$f(t_0)$			
		$f(t_0, t_1)$		
$1$	$f(t_1)$		$f(t_0, t_1, t_2)$	
		$f(t_1, t_2)$		
$2$	$f(t_2)$		$f(t_1, t_2, t_3)$	
		$f(t_2, t_3)$		
$3$	$f(t_3)$		$f(t_2, t_3, t_4)$	
		$f(t_3, t_4)$		
$4$	$f(t_4)$		$\vdots$	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

где функция имеет вид (31)  $f(t_i) = A_i \cdot X_i^* \cdot B_i - X_i = C_i, i = \overline{1, w}$ , а группа функций:

$$f(t_0, t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=0}^n \frac{f(t_i)}{\prod_{j=0}^{i-1} (t_i - t_j) \cdot \prod_{j=i+1}^w (t_i - t_j)}.$$

В результате получим решение исходного матричного уравнения

$$N_w(t) = f(t_i) + \sum_{i=0}^{w-1} \left( \prod_{j=0}^i (t - t_j) \right) \cdot f(t_0, t_1, \dots, t_i).$$

**Модельный пример.** Рассмотрим следующее однопараметрическое матричное уравнение типа Стейна:

$$\begin{bmatrix} t & 2j \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X^*(t) \cdot \begin{bmatrix} 1+j & -jt \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - X(t) = \begin{bmatrix} t(2-3j) - 6 + 3j & -t^2 + 4t - 2 \\ 3-j & -2t - j \end{bmatrix}.$$

**Решение последовательным численно-аналитическим методом.** При выборе следующих значений параметров  $t_v = 1, H = 1$  имеем матричные дискреты

$$A(0) = \begin{bmatrix} 1 & 2j \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A(K) = [0], \forall K \geq 2;$$

$$B(0) = \begin{bmatrix} 1+j & -j \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B(1) = \begin{bmatrix} 0 & -j \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B(K) = [0], \forall K \geq 2;$$

$$C(0) = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 3-j & -2-j \end{bmatrix}, C(1) = \begin{bmatrix} 2-3j & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, C(2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C(K) = [0], \forall K \geq 3.$$

Для матричных дискретов обратных матриц  $A^{\nabla}(0)$  и  $B^{\nabla}(0)$  можно использовать как прямой подход, описанный в работе [11], так и результаты работ [12, 13]. После чего имеем

$$A^{\nabla}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{j}{2} & \frac{j}{2} \end{bmatrix}, A^{\nabla}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{j}{2} \end{bmatrix}, A^{\nabla}(K) = [0], \forall K \geq 2;$$

$$B^{\nabla}(0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ j & -1+j \end{bmatrix}, B^{\nabla}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -j & 1-j \end{bmatrix}, B^{\nabla}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ j & -1+j \end{bmatrix}, B^{\nabla}(K) = [0], \forall K \geq 3;$$

$$B^{\nabla T}(0) = \begin{bmatrix} 0 & j \\ -1 & -1+j \end{bmatrix}, B^{\nabla T}(1) = \begin{bmatrix} 0 & -j \\ 0 & 1-j \end{bmatrix}, B^{\nabla T}(2) = \begin{bmatrix} 0 & j \\ 0 & -1+j \end{bmatrix}, B^{\nabla T}(K) = [0], \forall K \geq 3;$$

а вместе с тем:

$$B^*(0) = \begin{bmatrix} 1-j & -1 \\ j & 0 \end{bmatrix}, B^*(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ j & 0 \end{bmatrix}, B^*(K) = [0], \forall K \geq 2;$$

$$C^*(0) = \begin{bmatrix} -4 & 3+j \\ 1 & -2+j \end{bmatrix}, C^*(1) = \begin{bmatrix} 2+3j & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, C^*(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, C^*(K) = [0], \forall K \geq 3;$$

$$A^{*\nabla}(0) = \begin{bmatrix} 1 & -2j \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A^{*\nabla}(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A^{*\nabla}(K) = [0], \forall K \geq 2;$$

$$B^{*\nabla}(0) = \begin{bmatrix} 0 & -j \\ -1 & -1-j \end{bmatrix}, B^{*\nabla}(1) = \begin{bmatrix} 0 & j \\ 0 & 1+j \end{bmatrix}, B^{*\nabla}(2) = \begin{bmatrix} 0 & -j \\ 0 & -1-j \end{bmatrix}, B^{*\nabla}(K) = [0], \forall K \geq 3.$$

Следовательно:

**при  $K=0$ :**

$$D(0,0) = \left[ \begin{array}{cc|cc} -1+j & 2+2j & 1 & -j \\ -1+j & 0 & 0 & -1+j \\ \hline -j & -\frac{3j}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{j}{2} & \frac{1}{2} + \frac{j}{2} & -\frac{j}{2} & -\frac{1}{2} - \frac{j}{2} \end{array} \right],$$

$$\hat{X}(0) = D^{-1}(0,0) \cdot \hat{F}(0) = \begin{bmatrix} j \\ 2 \\ -1 \\ (1+j) \end{bmatrix}, \quad X(0) = \begin{bmatrix} j & 2 \\ -1 & (1+j) \end{bmatrix};$$

**при K=1:**

$$D(1,0;0,1) = \left[ \begin{array}{cc|cc} -1+j & 0 & 1 & -j \\ 0 & 0 & 0 & -1+j \\ \hline -2j & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ -j & -\frac{1}{2} - \frac{j}{2} & -\frac{3j}{2} & 0 \end{array} \right],$$

$$\hat{X}(1) = -D^{-1}(0,0) \cdot [\hat{F}(1) + D(1,0;0,1) \cdot \hat{X}(0)] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

**при K=2:**

$$D(2,0;1,1;0,2) = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & j \\ 0 & 0 & 0 & -1+j \\ \hline -j & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{j}{2} & 0 & 0 \end{array} \right],$$

$$\hat{X}(2) = -D^{-1}(0,0) \cdot [\hat{F}(2) + D(2,0;1,1;0,2) \cdot \hat{X}(0) - D(1,0;0,1) \cdot \hat{X}(1)] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X(2) = [0].$$

Можно убедиться, что такая закономерность имеет место и для следующих дискретов, т.е.

$$X(K) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \forall K \geq 3.$$

Наконец, тейлоровское решение задачи будет выглядеть так:

$$X(t) = \begin{bmatrix} j & 2 \\ -1 & (1+j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (t-1) = \begin{bmatrix} j & 2 \\ -1 & (t+j) \end{bmatrix},$$

в точности которой можно убедиться, подставив его в исходное уравнение.



**Решение параллельным численно-аналитическим методом:**

$$D_0 = \begin{bmatrix} (0.75+0.75j) & (0.25-1.5j) & (1+2j) & (1.5-1.5j) \\ (0.75-0.25j) & (-0.75-0.5j) & 1 & (-0.5-1.5j) \\ (1.25-1.75j) & -1.75 & (3-2j) & (-3.5-0.5j) \\ (-0.75-0.75j) & (-0.75+j) & (-1-2j) & (-1.5+1.5j) \end{bmatrix},$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} (2.375+2.375j) & (1.625-4.5j) & (0.5+3j) & (4.75-4.75j) \\ (2.375-1.125j) & (-3.125-2.5j) & 3.5 & (-2.25-4.75j) \\ (1.875-4.625j) & -8.125 & (3.5-4j) & (-9.25-5.75j) \\ (-3.125-3.125j) & (-2.375+5.75j) & (-1.5-5j) & (-6.25+6.25j) \end{bmatrix},$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} (-5.187-5.187j) & (-4.312+11.875j) & (-4.25-9.5j) & (-10.375+10.375j) \\ (-5.937+2.812j) & (8.312+6.75j) & -7.75 & (5.625+11.875j) \\ (-5.687+11.562j) & 20.812 & (-13.75+9j) & (23.125+9.375j) \\ (7.562+7.562j) & (5.937-16.625j) & (4.75+12.5j) & (15.125-15.125j) \end{bmatrix},$$

$$\hat{F}(\bullet) = \begin{bmatrix} (-3-2j) & (3+j) & (2.5+0.5j) & (-1.5-0.5j) \\ (1+3j) & (-1-j) & 3.5 & (0.5+j) \\ 1 & (1+j) & -2 & (-1-j) \end{bmatrix}.$$

После расчетов получим идентичное решение.

**Решение методом замороженных коэффициентов:**

**при  $t=1$ :**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2j \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X^* \begin{bmatrix} 1+j & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - X = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 3-j & -2-j \end{bmatrix},$$

откуда

$$X_{t=1} = \begin{bmatrix} j & 2 \\ -1 & 1+j \end{bmatrix};$$

**при  $t=2$ :**

$$\begin{bmatrix} 2 & 2j \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X^* \begin{bmatrix} 1+j & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - X = \begin{bmatrix} -2-3j & 2 \\ 3-j & -4-j \end{bmatrix},$$

откуда

$$X_{t=2} = \begin{bmatrix} j & 2 \\ -1 & 2+j \end{bmatrix}.$$

Произведя расчеты для всех  $t$  в диапазоне  $[a,b]$ , получим  $w$  разных матриц, при подставлении которых в метод Ньютона получим аппроксимированное решение исходной задачи:

$$X(t) = \begin{bmatrix} j & 2 \\ -1 & (t+j) \end{bmatrix}.$$

**Сравнительный анализ методов.** На рис. 1-3 приведены диаграммы производительности по количеству вызовов (рис. 1), длительности работы (рис. 2) и использованию памяти (рис. 3).

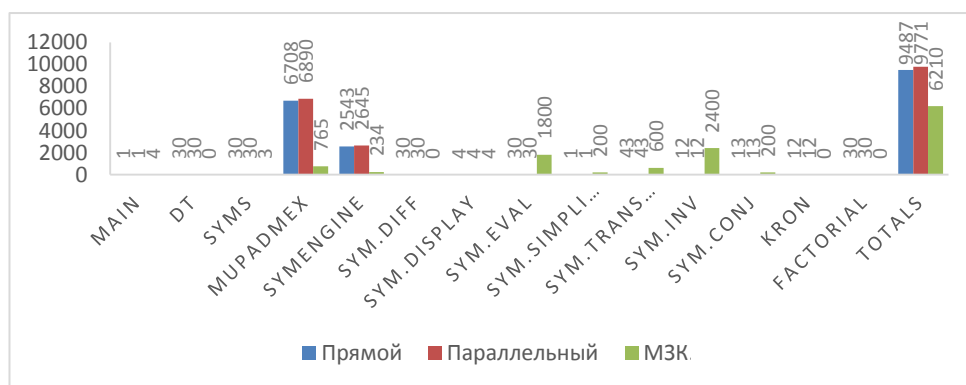


Рис. 1. График производительности по количеству вызовов

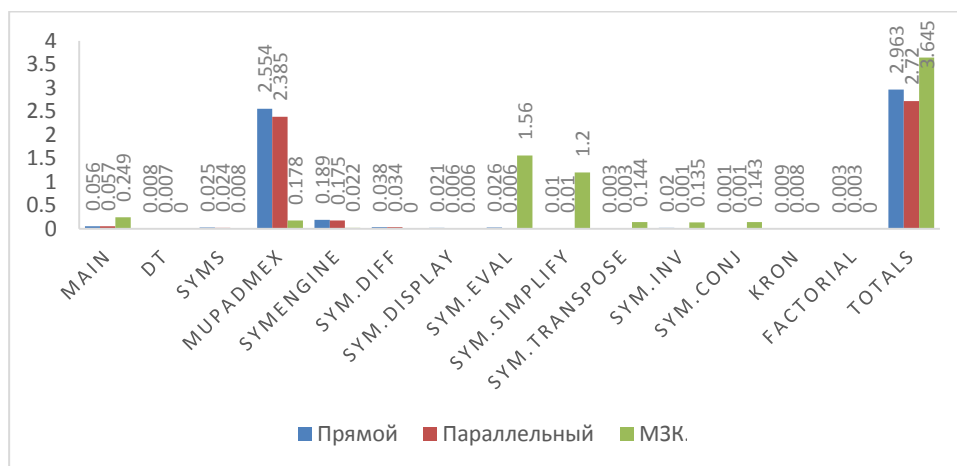


Рис. 2. График производительности по длительности работы

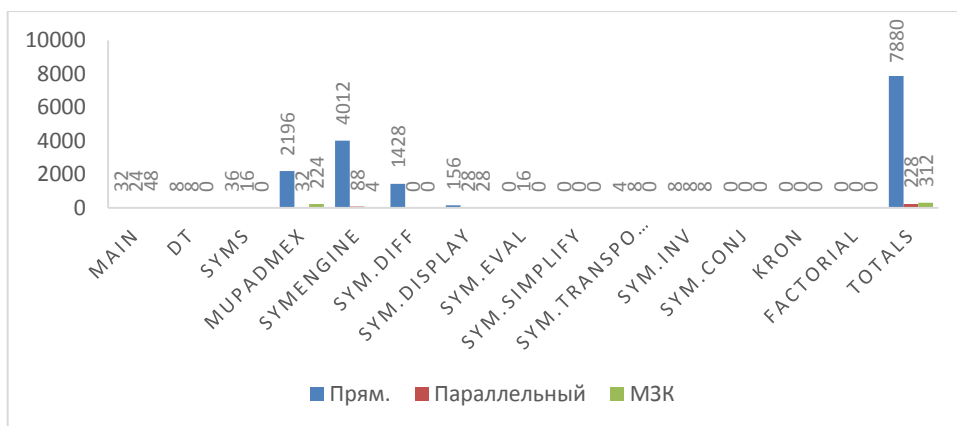


Рис. 3. График производительности по использованию памяти

Назначение функций и обозначения приведены в таблице.

Таблица

Назначение функций и их обозначения

Функция	Назначение
Main	Главная функция, откуда производятся все вызовы к другим функциям.
Dt	Функция дифференциальных преобразований
Syms	Перемены символьного типа
Mupadmex	Работа с символьными переменными
Symengine	Аппарат символьных операций в среде Matlab
Sym.diff	Функция расчета производной
Sym.display	Функция взаимодействия с пользователем (вывод данных)
Sym.eval	Расчет значения выражения
Sym.simplify	Упрощение выражения
Sym.transpose	Функция транспонировки функций
Sym.inv	Нахождение обратной матрицы
Sym.conj	Функция сопряжения матрицы
Kron	Кронекерово произведение матриц

**Заключение.** Предложенные численно-аналитические методы, а также метод замороженных коэффициентов были реализованы и интегрированы в состав пакета прикладных программ PARMAT [12] для решения однопараметрических матричных уравнений. На их основе были произведены эксперименты и выведены графики производительности функций по трем свойствам (использование памяти, время выполнения и количество вызовов функций). Опираясь на данные производительности методов, можно

предполагать, что метод замороженных коэффициентов опережает численно-аналитические методы по “простоте”, т.е. количество запросов значительно меньше по сравнению с другими методами. Сказанное особенно важно, если вычислительная техника работает в так называемом “облачном режиме”, где каждый сторонний запрос нуждается в обслуживании передачи пакета данных из одной сети в другую. Численно-аналитические методы работают значительно быстрее за счет вычисления всего нескольких выражений, в то время как при использовании метода замороженных коэффициентов мы вынуждены решать сотни разных уравнений, хотя и численных, а если уменьшить количество “замороженных точек”, то возможны погрешности при аппроксимации решений любым известным методом. Что касается использования памяти, то параллельный метод занимает первое место, так как усовершенствованный аппарат дает возможность хранить только те данные, которые актуальны при вычислении текущего выражения. Метод замороженных коэффициентов следует за ним, хотя использованная память сильно зависит от количества точек и длины рассматриваемого интервала.

### Литература

1. **Воронцов Ю.О., Икрамов Х.Д.** Численное решение матричных уравнений типа Стейна в самосопряженном случае// Журнал вычислительной математики и математической физики.- 2014.- Том 54, № 5.- С. 723-727.
2. **Воронцов Ю.О.** Условия разрешимости и численные алгоритмы для решения линейных, полулинейных, квадратных и полуторалинейных матричных уравнений: Автореф. дис. ... к.ф.-м.н.- М., 2014.-17 с.
3. **Симонян С.О.** К решению однопараметрических матричных уравнений типа Стейна  $A(t)X(t)B(t)-X(t)=C(t)$  // Вестник НПУА: Информационные технологии, электроника, радиотехника.- 2015.- № 2.- С. 32-42.
4. **Симонян С.О.** Декомпозиционные методы решения однопараметрических матричных уравнений типа Стейна  $A(t)X(t)B(t)-X(t)=C(t)$ // Известия НАН РА и НПУА. Сер. ТН.- 2016.-Т. LXIX, № 2.- С. 176-191.
5. **Симонян С.О., Айвазян А.А.** К решению однопараметрических транспонированных аналогов матричных уравнений типа Стейна  $A(t)X^T(t)B(t)-X(t)=C(t)$  // Вестник НПУА: Информационные технологии, электроника, радиотехника.- 2017.- №2.- С. 9-18.
6. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. –М.: Наука, 2010. – 560 с.
7. **Ланкастер П.** Теория матриц.-М.: Наука, 1978. – 280 с.
8. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования функций и уравнений. – Киев: Наукова думка, 1984.- 420 с.

9. **Симонян С.О., Аветисян А.Г.** Прикладная теория дифференциальных преобразований. –Ереван: Изд-во ГИУА “Чартарагет”, 2010.- 361с.
10. **Симонян С.О.** Параллельные вычислительные методы определения параметрических обобщенных обратных матриц // Известия Томского политехнического университета.- 2013.- Т.323, № 5.- С. 10-15.
11. **Симонян С.О., Аветисян А.Г., Симонян А.С.** Метод определения параметрических обобщенных обратных матриц, основанный на дифференциальных преобразованиях // Вестник ГИУА. Сер. “Моделирование, оптимизация, управление”.- 2008.- Вып. 11, т.1.- С. 78-85.
12. **Айвазян А.А.** Модульный пакет прикладных программ для решения различных однопараметрических матричных уравнений на основе дифференциальных преобразований // Вестник ИАА.- 2016.- Т.13, № 4.- С. 522-526.
13. **Մխմնյան Ս.Հ.** Հաշվողական մեթոդների կիրառական տեսություն. – Երևան: “Ճարտարագետ” հրատ., 2009.- 203 էջ:

*Поступила в редакцию 16.02.2018.  
Принята к опубликованию 05.06.2018.*

**ՍՏԵՅՆԻ ՏԻՊԻ  $A(t) \cdot X^*(t) \cdot B(t) - X(t) = C(t)$  ՄԻԱՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ  
ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԼՈՒԾ ՆՄԱՆԱԿՆԵՐԻ  
ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐ**

**Ա.Ա. Այվազյան**

Դիտարկվել է Ստեյնի տիպի միապարամետրական մատրիցային հավասարումների համալուծ նմանակների լուծման երկու մեթոդ՝ անալիտիկ և թվա-անալիտիկ, ինչպես նաև թվա-անալիտիկ մեթոդի երկու տեսակները՝ հաջորդական և զուգահեռ: Հակադարձ դիֆերենցիալ ձևափոխությունների օգտագործման ժամանակ հիմք է ծառայել Թեյլորի շարքը, որն ապահովել է ճշգրիտ և արդյունավետ լուծման վերականգնում:

Այս մեթոդների հիման վրա ստեղծվել են համապատասխան ծրագրային մոդուլները, որոնք ներդրված են արդեն իսկ ստեղծված PARMAT կիրառական ծրագրերի փաթեթում, որը ստեղծվել է միապարամետրական մատրիցային հավասարումների համակարգային լուծման համար: Ներկայացված է ծրագրային մոդուլի բլոկ-սխեման, ինչպես նաև նկարագրված են ծրագրային իրականացման որոշ հատվածներ և փաթեթի մեջ մոդուլի ներդրման որոշ առանձնահատկություններ:

Ուսումնասիրված է նաև պարամետրական մատրիցային հավասարումների լուծման լայն տարածում ունեցող՝ սառեցված գործակիցների մեթոդը: Անցկացվել է դիտարկված բոլոր մեթոդների համեմատական վերլուծությունը, որոնց համար կազմված են արդյունավետության գրաֆիկները մի քանի չափանիշներով՝ աշխատանքի տևողություն, օգտագործված օպերատիվ հիշողության ծավալ և տարրական գործողությունների թիվ:

Դիտարկվել է մոդելային օրինակ՝ փոքր չափերի քառակուսի մատրից-գործակիցներով, որի համար ստացվել է ճշգրիտ Թեյլորյան լուծումը, ինչպես նաև ստեղծված գործակիցների մեթոդի արդյունքում ստացված մոտարկված լուծումը:

Մեթոդների բնութագրերի վերլուծության արդյունքների հիման վրա տրվել են մեթոդի ընտրության խորհուրդներ մասնավոր դեպքերի համար, ինչպիսիք են՝ ծրագրային իրականացումը ամպային սերվերների վրա և իրականացումը ներքին ցանցում, ինչպես նաև նկարագրված են վերջիններիս դրական և բացասական կողմերը:

**Առանցքային բաներ.** Ստեյնի տիպի միապարամետրական համալուծ մատրիցային հավասարումներ, դիֆերենցիալ ձևափոխություններ, PARMAT կիրառական ծրագրերի մոդուլային փաթեթ, ստեղծված գործակիցների մեթոդ, եղանակների համեմատական վերլուծություն, արդյունավետության գրաֆիկներ:

## METHODS FOR SOLVING CONJUGATE ANALOGUES OF ONE-PARAMETRIC STEYN-TYPE $A(t)X^*(t)B(t)-X(t)=C(t)$ MATRIX EQUATIONS

A.A. Ayvazyan

Two methods for solving one-parametric conjugate analogues of Steyn-type matrix equations are considered: analytical and numerical-analytical, as well as two varieties of the latter-parallel and serial. While using backward differential transformations, Taylor series were taken as a basis, which ensured the accurate and effective recovery of the solution.

Based on these methods corresponding program modules were created, which were integrated in already created applied program package PARMAT intended for solving one-parametric matrix equations using a complex approach. A block-diagram of the program module is presented, as well as several parts of the program realization and nuances of integrating the module in the package were described.

The wide-spread frozen coefficient method for solving parametric matrix equations is examined as well. The comparative analysis of all the methods are introduced in this work, for which the productivity charts are created with regard to several criteria: worktime, the usage of RAM and the number of elementary actions.

A model example with quadratic matrix-coefficient small sized matrices is considered, for which the exact Taylor solution was obtained, as well as an approximate solution obtained on the basis of frozen coefficient and Newton methods.

Reccomendations are presented for particular cases, such as software implementation on a cloud server and implementation in local networks, as well as cons and pros are presented, based on the results of the study of the characteristics of the methods.

**Keywords:** one-parametric conjugate analogues of Steyn-type matrix equations, modular application package PARMAT, frozen coefficient solving method, comparative analysis of the methods, productivity charts.