УДК 621.52+511.52

К РЕШЕНИЮ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ТРАНСПОНИРОВАННЫХ АНАЛОГОВ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СТЕЙНА $\mathbf{A(t)\cdot X^T(t)\cdot B(t)-X(t)=C(t)}$

С.О. Симонян, А.А. Айвазян

Национальный политехнический университет Армении

Рассмотрены однопараметрические транспонированные аналоги матричных уравнений типа Стейна с квадратными матрицами-коэффициентами. Предложены аналитический, а также основанные на дифференциальных преобразованиях Г.Е. Пухова последовательный и параллельный численно-аналитические методы их решения. Несмотря на то, что аналитический метод ограничен в практических приложениях и пригоден для задач с малыми размерами матриц и их простыми элементами, однако он служит основой для разработки последовательного и параллельного численно-аналитических методов. Предложенные методы определенным образом дополняют имеющийся пробел в рассматриваемой области и легко реализуемы средствами современных информационных технологий. Для всех методов получены соответствующие условия однозначной разрешимости задачи. Рассмотрен модельный пример с квадратными матрицами-коэффициентами, для решения которого был использован последовательный численно-аналитический метод, при котором было получено точное тейлоровское решение задачи. Предложенные методы могут быть легко трансформированы в соответствующие аналоги для решения подобных однопараметрических задач с прямоугольными матрицами-коэффициентами. При этом эти методы остаются в силе с точностью до соответствующих однопараметрических обобщенных обратных матриц, а также их матричных дискретов.

***Ключевые слова*:** однопараметрический транспонированный аналог матричного уравнения типа Стейна с квадратными матрицами-коэффициентами, редукция задачи, аналитический метод решения, дифференциальные преобразования, последовательный и параллельный численно-аналитические методы решения, условия однозначной разрешимости задачи, средства современных информационных технологий, модельный пример с квадратными матрицами-коэффициентами, точное тейлоровское решение.

Введение. Вопросы решения непрерывных матричных уравнений типа Стейна $A\cdot X\cdot B-X=C$ (где A, B, C и X - числовые матрицы порядка m, причём X - неизвестная матрица, подлежащая определению) рассмотрены, в частности, в работах [1,2], а методы решения их транспонированных аналогов, т.е. матричных уравнений $A\cdot X^T\cdot B-X=C$ - в работах [3,4].

Методы решения однопараметрических непрерывных матричных уравнений типа Стейна $A(t)\cdot X(t)\cdot B(t)-X(t)=C(t)$ (где *A(t), B(t), C(t)* и *X(t)* – функциональные матрицы порядка *m*, причём *X(t)* - неизвестная матрица, подлежащая определению) рассмотрены, в частности, в работах [5,6].

В настоящей работе рассматриваются методы решения однопараметрических транспонированных аналогов матричных уравнений типа Стейна

$$A(t)\cdot X^T(t)\cdot B(t)-X(t)=C(t), \tag{1}$$

где *A(t), B(t), C(t)* - матрицы-коэффициенты порядка *m*; *X(t)* - неизвестная матрица также порядка *m*, подлежащая определению:

$$X(t)=\begin{bmatrix} x_{11}(t),...,x_{1m}(t) \\ x_{21}(t),...,x_{2m}(t) \\ .... \\ x_{m1}(t),...,x_{mm}(t) \end{bmatrix}=(x_{ij}(t)),\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,m}. \tag{2}$$

Математический аппарат

1. Редукция и аналитическое решение задачи. Из матричного уравнения (1) имеем

$$X(t)=A(t)\cdot X^T(t)\cdot B(t)-C(t), \tag{3}$$

откуда

$$X^T(t)=B^T(t)\cdot X(t)\cdot A^T(t)-C^T(t). \tag{4}$$

С другой стороны, при предположениях

$$rangA(t)=m, \tag{5}$$

$$rangB(t)=m \tag{6}$$

из того же матричного уравнения (1) получим

$$X^T(t)=A^{-1}(t)\cdot[C(t)+X(t)]\cdot B^{-1}(t). \tag{7}$$

Сопоставление матричных уравнений (4) и (7) приводит к следующему:

$$A^{-1}(t)\cdot X(t)\cdot B^{-1}(t)-B^T(t)\cdot X(t)\cdot A^T(t)=-C^T(t)-A^{-1}(t)\cdot C(t)\cdot B^{-1}(t)\cdot \tag{8}$$

Теперь, используя аппарат кронекеровых произведений матриц [7,8], из (8) имеем

$$\left[A^{-1}(t)\otimes B^{-T}(t)-B^T(t)\otimes A(t)\right]_{m^2\times m^2}\cdot\hat{X}(t)_{m^2\times 1}=D(t)\cdot\hat{X}(t)= \tag{9}$$

$$=-\widehat{[C^T(t)+A^{-1}(t)\cdot C(t)\cdot B^{-1}(t)]}_{m^2\times 1}=-\hat{F}(t),$$

где символ $\otimes$ - знак кронекерова произведения матриц, а гипервектор

$$\hat{X}(t)=(x_{11}(t),...,x_{1m}(t)\vdots\cdots\vdots x_{m1}(t),\cdots,x_{mm}(t))^T. \tag{10}$$

Следовательно, при предположении полноранговости матрицы *D(t),* т.е. условия

$$rangD(t)=m^2, \tag{11}$$

из (9) получим, что гипервектор

$$\hat{X}(t) = -D^{-1}(t) \cdot \hat{F}(t), \tag{12}$$

а следовательно, в соответствии с (10), и решение (2).

2. Последовательный численно-аналитический метод решения. Допустим, что для матриц $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и $X(t)$ с аналитическими элементами имеют место дифференциальные преобразования [9,10]

$$A(K) = \frac{H^k}{K!} \cdot \frac{d^k A(t)}{dt^k}\Big|_{t=t_\nu}, \quad K = \overline{0,\infty} \;\doteq\; A(t) = \chi_1(t, t_\nu, H, A(K),\; K = \overline{0,\infty}), \tag{13}$$

$$B(K) = \frac{H^k}{K!} \cdot \frac{d^k B(t)}{dt^k}\Big|_{t=t_\nu}, \quad K = \overline{0,\infty} \;\doteq\; B(t) = \chi_2(t, t_\nu, H, B(K),\; K = \overline{0,\infty}), \tag{14}$$

$$C(K) = \frac{H^k}{K!} \cdot \frac{d^k C(t)}{dt^k}\Big|_{t=t_\nu}, \quad K = \overline{0,\infty} \;\doteq\; C(t) = \chi_3(t, t_\nu, H, C(K),\; K = \overline{0,\infty}), \tag{15}$$

$$\overset{-1}{\check{A}}(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K A^{-1}(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu}, \; K = \overline{0,\infty} \;\doteq\; A^{-1}(t) = \chi_4(t, t_\nu, H, \overset{-1}{\check{A}}(K), K = \overline{0,\infty}), \tag{16}$$

$$\overset{-1}{\check{B}}(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K B^{-1}(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu}, \; K = \overline{0,\infty} \;\doteq\; B^{-1}(t) = \chi_5(t, t_\nu, H, \overset{-1}{\check{B}}(K), K = \overline{0,\infty}), \tag{17}$$

$$\overset{T}{B}(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K B^T(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu}, \; K = \overline{0,\infty} \;\doteq\; B^T(t) = \chi_6(t, t_\nu, H, \overset{T}{B}(K), K = \overline{0,\infty}), \tag{18}$$

$$\overset{-T}{\check{B}}(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K B^{-T}(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu}, \; K = \overline{0,\infty} \;\doteq\; B^{-T}(t) = \chi_7(t, t_\nu, H, \overset{-T}{\check{B}}(K), K = \overline{0,\infty}), \tag{19}$$

$$\overset{T}{C}(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K C^T(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu}, \; K = \overline{0,\infty} \;\doteq\; C^T(t) = \chi_8(t, t_\nu, H, \overset{T}{C}(K), K = \overline{0,\infty}), \tag{20}$$

$$X(K) = \frac{H^k}{K!} \cdot \frac{dX^k(t)}{dt^k}\Big|_{t=t_\nu}, \; K = \overline{0,\infty} \;\doteq\; X(t) = \chi_9(t, t_\nu, H, X(K),\; K = \overline{0,\infty}), \tag{21}$$

где $A(K)$, $B(K)$, $C(K)$, $\overset{-1}{\check{A}}(K)$, $\overset{-1}{\check{B}}(K)$, $B^T(K)$, $C^T(K)$, $\overset{-T}{\check{B}}(K)$ и $X(K)$, $K = \overline{0,\infty}$ – матричные дискреты матриц $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $A^{-1}(t)$, $B^{-1}(t)$, $B^T(t)$, $C^T(t)$, $B^{-T}(t)$ и $X(t)$ соответственно; $K = \overline{0,\infty}$ – целочисленный аргумент; H – масштабный коэффициент; символ $\doteq$ – знак перехода из области оригиналов в область дифференциальных изображений и наоборот; $\chi_1(\cdot) - \chi_9(\cdot)$ – некоторые аппроксимирующие функции, восстанавливающие оригиналы-матрицы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $A^{-1}(t)$, $B^{-1}(t)$, $B^T(t)$, $C^T(t)$, $B^{-T}(t)$ и $X(t)$. Тогда с учетом правил алгебры дифференциальных преобразований при переводе (9) из области оригиналов в область дифференциальных изображений получим:

при K=0:

$$\left[A^{\overset{-1}{\vee}}(0)\otimes B^{\overset{-T}{\vee}}(0)-B^{T}(0)\otimes A(0)\right]\cdot\hat{X}(0)=D(0,0)\cdot\hat{X}(0)=$$
$$=-[C^{T}(0)+A^{\overset{-1}{\vee}}(0)\cdot C(0)\cdot B^{\overset{-1}{\vee}}(0)]=-\hat{F}(0), \tag{22}$$

откуда при предположении, что

$$rangD(0,0)=m^{2}, \tag{23}$$

из (22) имеем

$$\hat{X}(0)=-D^{-1}(0,0)\cdot\hat{F}(0); \tag{24}$$

при K=1:

$$\left[A^{\overset{-1}{\vee}}(1)\otimes B^{\overset{-T}{\vee}}(0)+A^{\overset{-1}{\vee}}(0)\otimes B^{\overset{-T}{\vee}}(1)-B^{T}(1)\otimes A(0)-B^{T}(0)\otimes A(1)\right]\cdot\hat{X}(0)+$$
$$+\left[A^{\overset{-1}{\vee}}(0)\otimes B^{\overset{-T}{\vee}}(0)-B^{T}(0)\otimes A(0)\right]\cdot\hat{X}(1)=D(1,0;0,1)\cdot\hat{X}(0)+D(0,0)\cdot\hat{X}(1)=$$
$$=-[C^{T}(1)+A^{\overset{-1}{\vee}}(1)\cdot C(0)\cdot B^{\overset{-1}{\vee}}(0)+A^{\overset{-1}{\vee}}(0)\cdot C(1)\cdot B^{\overset{-1}{\vee}}(0)+A^{\overset{-1}{\vee}}(0)\cdot C(0)\cdot B^{\overset{-1}{\vee}}(1)]=-\hat{F}(1), \tag{25}$$

откуда

$$\hat{X}(1)=-\overset{-1}{D}(0,0)\cdot\left[\hat{F}(1)+D(1,0;0,1)\cdot\hat{X}(0)\right]; \tag{26}$$

при K=2:

$$\begin{bmatrix}A^{\overset{-1}{\vee}}(2)\otimes B^{\overset{-T}{\vee}}(0)+A^{\overset{-1}{\vee}}(1)\otimes B^{\overset{-T}{\vee}}(1)+A^{\overset{-1}{\vee}}(0)\otimes B^{\overset{-T}{\vee}}(2)-\\-B^{T}(2)\otimes A(0)-B^{T}(1)\otimes A(1)-B^{T}(0)\otimes A(2)\end{bmatrix}\cdot\hat{X}(0)+$$
$$+\begin{bmatrix}A^{\overset{-1}{\vee}}(1)\otimes B^{\overset{-T}{\vee}}(0)+A^{\overset{-1}{\vee}}(0)\otimes B^{\overset{-T}{\vee}}(1)-\\-B^{T}(1)\otimes A(0)-B^{T}(0)\otimes A(1)\end{bmatrix}\cdot\hat{X}(1)+\begin{bmatrix}A^{\overset{-1}{\vee}}(0)\otimes B^{\overset{-T}{\vee}}(0)-\\-B^{T}(0)\otimes A(0)\end{bmatrix}\cdot\hat{X}(2)=$$
$$=D(2,0;1,1;0,2)\cdot\hat{X}(0)+D(1,0;0,1)\cdot\hat{X}(1)+D(0,0)\cdot\hat{X}(2)=-[C^{T}(2)+$$
$$+A^{\overset{-1}{\vee}}(2)\cdot C(0)\cdot B^{\overset{-1}{\vee}}(0)+A^{\overset{-1}{\vee}}(0)\cdot C(2)\cdot B^{\overset{-1}{\vee}}(0)+A^{\overset{-1}{\vee}}(0)\cdot C(0)\cdot B^{\overset{-1}{\vee}}(2)+$$
$$+A^{\overset{-1}{\vee}}(1)\cdot C(0)\cdot B^{\overset{-1}{\vee}}(1)+A^{\overset{-1}{\vee}}(1)\cdot C(1)\cdot B^{\overset{-1}{\vee}}(0)+A^{\overset{-1}{\vee}}(0)\cdot C(1)\cdot B^{\overset{-1}{\vee}}(1)]=-\hat{F}(2), \tag{27}$$

откуда

$$\hat{X}(2)=-D^{-1}(0,0)\cdot\left[\hat{F}(2)+D(2,0;1,1;0,2)\cdot\hat{X}(0)+D(1,0;0,1)\cdot\hat{X}(1)\right]; \tag{28}$$

$\vdots$

при K=K:

$$\begin{bmatrix}A^{\overset{-1}{\vee}}(K)\otimes B^{\overset{-T}{\vee}}(0)+A^{\overset{-1}{\vee}}(K-1)\otimes B^{\overset{-T}{\vee}}(1)+\ldots\\ \ldots+A^{\overset{-1}{\vee}}(1)\otimes B^{\overset{-T}{\vee}}(K-1)+A^{\overset{-1}{\vee}}(0)\otimes B^{\overset{-T}{\vee}}(K)-\\-B^{T}(K)\otimes A(0)-B^{T}(K-1)\otimes A(1)-\ldots\\ \ldots-B^{T}(1)\otimes A(K-1)-B^{T}(0)\otimes A(K)\end{bmatrix}\cdot\hat{X}(0)+$$
$$+\begin{bmatrix}A^{\overset{-1}{\vee}}(K-1)\otimes B^{\overset{-T}{\vee}}(0)+A^{\overset{-1}{\vee}}(K-2)\otimes B^{\overset{-T}{\vee}}(1)+\ldots\\+A^{\overset{-1}{\vee}}(1)\otimes B^{\overset{-T}{\vee}}(K-2)+A^{\overset{-1}{\vee}}(0)\otimes B^{\overset{-T}{\vee}}(K-1)-\\-B^{T}(K-1)\otimes A(0)-B^{T}(K-2)\otimes A(1)-\\-B^{T}(1)\otimes A(K-2)-B^{T}(0)\otimes A(K-1)+\ldots\end{bmatrix}\cdot\hat{X}(1)+\ldots \tag{29}$$
$$\ldots+\left[A^{\overset{-1}{\vee}}(0)\otimes B^{\overset{-T}{\vee}}(0)-B^{T}(0)\otimes A(0)\right]\cdot\hat{X}(K)=$$

$$= D(K,0;K-1,1;\ldots;1,K-1;0,K)\cdot\hat{X}(0) + D(K-1,0;K-2,1;\ldots;1,K-2;0,K-1)\cdot\hat{X}(1)+\ldots$$

$$\ldots + D(1,0;0,1)\cdot\hat{X}(K-1) + D(0,0)\cdot\hat{X}(K) = -[C^T(K) + A^{\overset{-1}{\vee}}(K)\cdot C(0)\cdot B^{\overset{-1}{\vee}}(0)+$$

$$+A^{\overset{-1}{\vee}}(K-1)\cdot C(1)\cdot A^{\overset{-1}{\vee}}(0) + A^{\overset{-1}{\vee}}(K-1)\cdot C(0)\cdot B^{\overset{-1}{\vee}}(1) + A^{\overset{-1}{\vee}}(K-2)\cdot C(2)\cdot B^{\overset{-1}{\vee}}(0)+\ldots$$

$$\ldots + A^{\overset{-1}{\vee}}(K-2)\cdot C(1)\cdot B^{\overset{-1}{\vee}}(1) + A^{\overset{-1}{\vee}}(K-2)\cdot C(0)\cdot B^{\overset{-1}{\vee}}(2)+\ldots$$

$$\ldots + A^{\overset{-1}{\vee}}(1)\cdot C(0)\cdot B^{\overset{-1}{\vee}}(K-1) + A^{\overset{-1}{\vee}}(0)\cdot C(1)\cdot B^{\overset{-1}{\vee}}(K-1) + A^{\overset{-1}{\vee}}(0)\cdot C(0)\cdot B^{\overset{-1}{\vee}}(K)] = -\hat{F}(K),$$

откуда

$$\hat{X}(K) = -D^{-1}(0,0)\cdot\left[\hat{F}(K) + \sum_{l=1}^{K} D(\ell,0;\ell-1,1;\ldots;1,\ell-1;0,\ell)\cdot\hat{X}(K-\ell)\right], \qquad (30)$$

где

$$D(\ell,0;\ell-1,1;\ldots;1,\ell-1;0,\ell) = \sum_{\ell=0}^{K} A^{\overset{-1}{\vee}}(\ell)\otimes B^{-T}(K-\ell) - \\ -\sum_{\ell=0}^{K} B^{T}(K-\ell)\otimes A(\ell),\ \forall\ell=\overline{1,K}, \qquad (31)$$

а матрица

$$\hat{F}(K) = \sum_{\ell=0}^{K} A^{\overset{-1}{\vee}}(K-l)\prod_{p=0}^{l} C(p)\cdot B^{\overset{-1}{\vee}}(l-p). \qquad (32)$$

Таким образом, имея гипервекторы дискретов (24), (26), (28) и (30), можно их легко трансформировать в матричные дискреты

$$X(K) = \begin{bmatrix} x_{11}(K),\ldots,x_{1m}(K) \\ x_{21}(K),\ldots,x_{2m}(K) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1}(K),\ldots,x_{mm}(K) \end{bmatrix},\quad K=\overline{0,\infty} \qquad (33)$$

и в соответствии с (21) восстановить неизвестное решение задачи - оригинал $X(t)$.

3. Параллельный численно-аналитический метод решения. Объединение рекуррентных гипервекторных соотношений (22), (25), (27) и (29) приводит к следующему гиперматрично-гипервекторному представлению:

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} D(0,0) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline D(1,0;0,1) & D(0,0) & 0 & \ldots & 0 \\ \hline D(2,0;1,1;0,2) & D(1,0;0,1) & D(0,0) & \ldots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline D(K,0;K-1,1;\ldots;1,K-1;0,K) & D(K-1,0;\ldots;0,K-1) & \ldots & \ldots & D(0,0) \end{array}\right]\times$$

$$\times\begin{pmatrix} \hat{X}(0) \\ \hline \hat{X}(1) \\ \hline \hat{X}(2) \\ \hline \vdots \\ \hline \hat{X}(K) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \hat{F}(0) \\ \hline \hat{F}(1) \\ \hline \hat{F}(2) \\ \hline \vdots \\ \hline \hat{F}(K) \end{pmatrix} \qquad (34)$$

или

$$D(\bullet)\cdot \hat{X}(\bullet) = -\hat{F}(\bullet), \tag{35}$$

откуда с учетом условия (23), а следовательно, и условия

$$rang D(\bullet) = (K+1)\cdot m^2 \tag{36}$$

из (35) получим

$$\hat{X}(\bullet) = -D^{-1}(\bullet)\cdot \hat{F}(\bullet) \tag{37}$$

или

$$\begin{pmatrix} \hat{X}(0) \\ \hline \hat{X}(1) \\ \hline \hat{X}(2) \\ \hline \vdots \\ \hline \hat{X}(K) \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} D_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline D_1 & D_0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline D_2 & D_1 & D_0 & \dots & 0 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ \hline D_K & D_{k-1} & D_{k-2} & \dots & D_0 \end{array}\right] \cdot \begin{pmatrix} \hat{F}(0) \\ \hline \hat{F}(1) \\ \hline \hat{F}(2) \\ \hline \vdots \\ \hline \hat{F}(K) \end{pmatrix}, \tag{38}$$

где с учетом приведенных в [10] результатов блоки - гиперматрицы

$$\begin{cases} D_0 = D^{-1}(0,0) = D^{-1}(0,0)\cdot E = D^{-1}(0,0)\cdot \overline{D}_0, \\ D_1 = -D^{-1}(0,0)\cdot [\,D(1,0;0,1)\cdot D^{-1}(0,0)] = D^{-1}(0,0)\cdot \overline{D}_1, \\ D_2 = -D^{-1}(0,0)\cdot [\,D(1,0;0,1)\cdot D^{-1}(0,0)\cdot D(1,0;0,1)\cdot D^{-1}(0,0) - \\ \qquad\qquad - D(2,0;1,1;0,2)\cdot D^{-1}(0,0)] = D^{-1}(0,0)\cdot \overline{D}_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ D_K = -D^{-1}(0,0)\cdot \sum\limits_{r=1}^{K} D(r,0;r-1,1;\dots;1,r-1;0,r)\cdot D_{k-r} = D^{-1}(0,0)\cdot \overline{D}_k. \end{cases} \tag{39}$$

И, наконец, имея гипервектор (37) или (38), в соответствии с обратным дифференциальным преобразованием (21) можно восстановить решение $X(t)$.

Модельный пример. Рассмотрим однопараметрическое матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 1 & jt \\ t & 0 \end{bmatrix}\cdot X^T(t)\cdot \begin{bmatrix} jt & -1 \\ -t & 0 \end{bmatrix} - X(t) = \begin{bmatrix} (-t(tj+t^2 j-1+j)) & (t(1-j)-j) \\ (-t^3+t^2+1) & (-t^2 j-t-j) \end{bmatrix}.$$

Очевидно, при $t_\nu = 1,\ H = 1$ имеем следующие матричные дискреты:

$$A(0) = \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ A(1) = \begin{bmatrix} 0 & j \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ A(K) = [0],\ \forall K \ge 2;$$

$$B(0) = \begin{bmatrix} j & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ B(1) = \begin{bmatrix} j & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix};\ B(K) = [0],\ \forall K \ge 2;$$

$$C(0) = \begin{bmatrix} (1-3j) & (1-2j) \\ 1 & (-1-2j) \end{bmatrix}, C(1) = \begin{bmatrix} (1-6j) & (1-j) \\ -1 & (-1-2j) \end{bmatrix},$$

$$C(2) = \begin{bmatrix} -4j & 0 \\ -2 & -j \end{bmatrix},\ C(3) = \begin{bmatrix} -j & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, C(K) = [0],\ \forall K \ge 4.$$

С другой стороны, используя результаты работ [11, 12], для матричных дискретов обратных матриц $A_{\nabla}^{-1}(0)$ и $B_{\nabla}^{-1}(0)$ получим

$$A_{\nabla}^{-1}(0)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -j & j\end{bmatrix},\ A_{\nabla}^{-1}(1)=\begin{bmatrix}0 & -1\\ j & -2j\end{bmatrix},A_{\nabla}^{-1}(2)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -j & 3j\end{bmatrix},A_{\nabla}^{-1}(K)=[0],\forall K\geq 3;$$

$$B_{\nabla}^{-1}(0)=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & -j\end{bmatrix},B_{\nabla}^{-1}(1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},B_{\nabla}^{-1}(2)=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix},B_{\nabla}^{-1}(K)=[0],\forall K\geq 3;$$

$$B_{\nabla}^{-T}(0)=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & -j\end{bmatrix},\ B_{\nabla}^{-T}(1)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},B_{\nabla}^{-T}(2)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix},B_{\nabla}^{-T}(K)=[0],\ \forall K\geq 3.$$

Кроме того, очевидно, что

$$B^{T}(0)=\begin{bmatrix}j & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\ B^{T}(1)=\begin{bmatrix}j & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix},B^{T}(K)=[0],\ \forall K\geq 2;$$

$$C^{T}(0)=\begin{bmatrix}(1-3j) & 1\\ (1-2j) & (-1-2j)\end{bmatrix},\ C^{T}(1)=\begin{bmatrix}(1-6j) & -1\\ (1-j) & (-1-2j)\end{bmatrix},$$

$$C^{T}(2)=\begin{bmatrix}-4j & -2\\ 0 & -j\end{bmatrix},\ C^{T}(3)=\begin{bmatrix}-j & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix},C^{T}(K)=[0],\forall K\geq 4.$$

Следовательно,

<u>при *K*=0:</u>

$$D(0,0)=\left[\begin{array}{cc|cc}-j & 1 & 1 & (-1+j)\\ -j & 0 & 0 & -j\\ \hline 1 & 2j & 0 & -j\\ (1+j) & -1 & -j & 1\end{array}\right],$$

$$\hat{X}(0)=D^{-1}(0,0)\cdot\hat{F}(0)=\left[\begin{array}{c}j\\ j\\ \hline -1\\ (1+j)\end{array}\right],\quad X(0)=\begin{bmatrix}j & j\\ -1 & (1+j)\end{bmatrix};$$

<u>при *K*=1</u>:

$$D(1,0;0,1)=\left[\begin{array}{cc|cc}-j & 2 & 1 & (1+2j)\\ -2j & 0 & 4 & j\\ \hline 0 & 0 & 0 & 2j\\ (1-2j) & 1 & 3j & -2\end{array}\right],$$

$$\hat{X}(1)=-D^{-1}(0,0)\cdot\left[\hat{F}(1)+D(1,0;0,1)\cdot\hat{X}(0)\right]=\left(\begin{array}{c}j\\ 0\\ \hline 0\\ 1\end{array}\right),X(1)=\begin{bmatrix}j & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix};$$

<u>при *K*=2:</u>

$$D(2,0;1,1;0,2)=\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & (-1+j) \\ -j & 0 & -2 & -j \\ \hline 0 & j & 0 & -3j \\ 3j & -1 & -6j & 3 \end{array}\right],$$

$$\hat{X}(2)=-D^{-1}(0,0)\cdot\left[\hat{F}(2)+D(2,0;1,1;0,2)\cdot\hat{X}(0)-D(1,0;0,1)\cdot\hat{X}(1)\right]=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ X(2)=[0].$$

Нетрудно убедиться, что такая же картина имеет место и для последующих дискретов, т.е.

$$X(K)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \forall K\geq 3.$$

Следовательно, тейлоровское решение задачи будет иметь вид

$$X(t)=\begin{bmatrix} j & j \\ -1 & (1+j) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot(t-1)=\begin{bmatrix} jt & j \\ -1 & (1+j) \end{bmatrix},$$

в точности которой также нетрудно убедиться.

Заключение. Таким образом, решение однопараметрических транспонированных аналогов матричных уравнений типа Стейна $A(t)\cdot X^T(t)\cdot B(t)-X(t)=C(t)$ с аналитическими элементами на основе использования прямых дифференциальных преобразований сводится к рекуррентным численным процедурам при разработанном последовательном численно-аналитическом методе и к поточной численной процедуре при разработанном параллельном численно-аналитическом методе. В обоих случаях восстановление оригиналов-решений осуществляется использованием обратных дифференциальных преобразований, что не связано с особыми вычислительными затруднениями. Что касается аналитического метода, то он представляет, скорее всего, теоретический интерес ввиду его достаточно сильной ограниченности в практическом плане.

И, наконец, заметим, что предложенные численно-аналитические методы могут быть эффективно реализованы средствами современных информационных технологий [13].

Литература

1. **Икрамов Х.Д.** Численное решение матричных уравнений.- М.: Наука, 1984. – 190 с.
2. **Мамонов С.С.** Решение матричных уравнений // Вестник Ряз. гос. ун-та. им. С.А. Есенина. - Рязань, 2009.- Вып. 21, №1. – С. 115 - 136.
3. **Воронцов Ю.О., Икрамов Х.Д.** Численное решение матричных уравнений типа Стейна в самосопряженном случае // Журнал вычислительной математики и математической физики.- 2014.- Том 54, № 5.- С. 723-727.
4. **Воронцов Ю.О.** Условия разрешимости и численные алгоритмы для решения линейных, полулинейных, квадратных и полуторалинейных матричных уравнений: Автореф. дис. ... к.ф.-м.н. - М., 2014.-17 с.

5. **Симонян С.О.** К решению однопараметрических матричных уравнений типа Стейна A(t)X(t)B(t)-X(t)=C(t) // Вестник НПУА: Информационные технологии, электроника, радиотехника.- 2015.- № 2.- С. 32-42.
6. **Симонян С.О.** Декомпозиционные методы решения однопараметрических матричных уравнений типа Стейна A(t)X(t)B(t)-X(t)=C(t) // Известия НАН РА и НПУА. Сер. ТН.- 2016.-Т. LXIX, № 2.- С. 176-191.
7. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц.- М.: Наука, 2010. – 560 с.
8. **Ланкастер П.** Теория матриц.-М.: Наука, 1978. – 280 с.
9. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования функций и уравнений. - Киев: Наукова думка, 1984.- 420 с.
10. **Симонян С.О., Аветисян А.Г.** Прикладная теория дифференциальных преобразований. - Ереван: Издательство ГИУА “Чартарагет”, 2010.- 361 с.
11. **Симонян С.О., Аветисян А.Г., Симонян А.С.** Метод определения параметрических обобщенных обратных матриц, основанный на дифференциальных преобразованиях // Вестник ГИУА. Сер. “Моделирование, оптимизация, управление”.- 2008.- Вып. 11, т.1.- С. 78-85.
12. **Симонян С.О.** Параллельные вычислительные методы определения параметрических обобщенных обратных матриц // Известия Томского политехнического университета.- 2013.- Т.323, № 5.- С. 10-15.
13. **Метьюз Дж. Г., Финк К.Д.** Численные методы. Использование MATLAB.- М., СПб., Киев, 2001.- 713 с.

Поступила в редакцию 07.06.2017.
Принята к опубликованию 21.12.2017.

ՍՏԵՅՆԻ ՏԻՊԻ A(t)·X^{T}(t)·B(t)-X(t)=C(t) ՄԻԱՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՏՐԱՆՍՊՈՆԱՑՎԱԾ ՆՄԱՆԱԿՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ս.Հ. Սիմոնյան, Ա.Ա. Այվազյան

Դիտարկվել են Ստեյնի տիպի քառակուսի մատրից-գործակիցներով միապարամետրական մատրիցային հավասարումների տրանսպոնացված նմանակները: Առաջարկվել են դրանց լուծման անալիտիկ, ինչպես նաև Գ.Ե. Պուխովի դիֆերենցիալ ձևափոխությունների վրա հիմնված հաջորդական և զուգահեռ թվա-անալիտիկ եղանակներ: Չնայած այն բանին, որ անալիտիկ եղանակը սահմանափակված է գործնական կիրառություններում և պիտանի է փոքր չափերով մատրիցներով և դրանց պարզ տարրերով խնդիրների լուծման դեպքում, այդուհանդերձ, այն հիմք է ծառայում հաջորդական և զուգահեռ թվա-անալիտիկ եղանակների համար: Առաջարկված եղանակները որոշակիորեն լրացնում են դիտարկվող տիրույթում գոյություն ունեցող բացը և հեշտությամբ իրականացնելի են տեղեկատվական տեխնոլոգիաների ժամանակակից միջոցներով:

Բոլոր եղանակների համար էլ ստացվել են խնդրի միարժեք լուծելիության համապատասխան պայմանները: Դիտարկվել է քառակուսի մատրից-գործակիցներով մոդելային օրինակ, որի լուծման համար օգտագործվել է հաջորդական թվա-անալիտիկ եղանակը, որի դեպքում ստացվել է խնդրի ճշգրիտ թեյլորյան լուծումը: Առաջարկված

եղանակները հեշտությամբ կարող են տրանսֆորմացվել ուղղանկյուն մատրից-գործակիցներով՝ նման միապարամետրական խնդիրների լուծման համապատասխան նմանակներին: Այդ դեպքում այս եղանակներն ուժի մեջ են մնում՝ համապատասխան միապարամետրական ընդհանրացված հակադարձ մատրիցների, ինչպես նաև դրանց մատրիցային դիսկրետների ճշտությամբ:

Առանցքային բառեր. Ստեյնի տիպի քառակուսի մատրից-գործակիցներով միապարամետրական մատրիցային հավասարման տրանսպոնացված նմանակ, խնդրի ռեդուկցիա, լուծման անալիտիկ եղանակ, դիֆերենցիալ ձևափոխություններ, լուծման հաջորդական և զուգահեռ թվա-անալիտիկ եղանակներ, խնդրի միարժեք լուծելիության պայմաններ, տեղեկատվական տեխնոլոգիաների ժամանակակից միջոցներ, քառակուսի մատրից-գործակիցներով մոդելային օրինակ, ճշգրիտ թեյլորյան լուծում:

SOLUTION OF STEYN-TYPE $A(t) \cdot X^T(t) \cdot B(t)-X(t)=C(t)$ ONE-PARAMETRIC TRANSPOSED ANALOGUES OF MATRIX EQUATIONS

S.H. Simonyan, A.A. Ayvazyan

One-parametric transposed analogues of Steyn-type matrix equations with quadratic coefficient matrices are considered. Analytical, as well, as sequential and parallel numerical-analytical methods based on G.E. Pukhov’s differential transformations are proposed. Although the analytical method is limited in practical applications and is useful for problems with small matrices, and their simple elements, it serves as a basis for developing the sequential and parallel numerical-analytical methods. The presented methods, in a certain way, complement the existing gap in the field considered and are easy to implement by means of modern information technologies. Corresponding conditions of unique solvability of the problem are obtained for all the methods. A model example with square coefficient matrices is considered for whose solution the sequential numerical-analytical method has been used for which the exact Taylor solution is obtained. The presented methods can be easily transformed into corresponding analogues for solving similar one-parametric problems with rectangular coefficient matrices. At the same time, these methods remain valid up to the corresponding one-parametric generalized inverse matrices, as well as their matrix discrepancies.

Keywords: Steyn-type one-parametric transposed analogue of the matrix equation with square matrix coefficients, problem reduction, analytical method of solution, differential transformations, sequential numerical-analytical solution method, parallel numerical-analytical solution method, conditions for unique solvability of the problem, means of modern information technologies, a model example with square matrix-coefficients, the exact Taylor solution.