ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 621.52+511.52

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ТРАНСПОНИРОВАННЫХ АНАЛОГОВ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СИЛЬВЕСТРА $\mathbf{A(t)\cdot X(t)\cdot D(t)+F(t)\cdot X^{T}(t)\cdot B(t)=C(t)}$

С.О. Симонян

Национальный политехнический университет Армении

Предложены три метода решения обобщенных однопараметрических транспонированных аналогов матричных уравнений типа Сильвестра с квадратными матрицами-коэффициентами: аналитический метод; последовательный и параллельный численно-аналитические методы, основанные на дифференциальных преобразованиях Г.Е. Пухова. Во всех случаях получены соответствующие условия однозначной разрешимости задачи. Аналитический метод ограничен в практических приложениях, однако служит основой для разработки последовательного и параллельного численно-аналитических методов. Последние обладают такими структурами, которые дают возможность достаточно легко реализовать эти методы средствами современных информационных технологий. Предложенные методы определенным образом дополняют имеющийся пробел в рассматриваемой области и, кроме того, легко трансформируются в соответствующие аналоги для решения подобных задач с прямоугольными матрицами–коэффициентами. При этом вместо обычных функциональных или числовых обратных матриц используются обобщенные однопараметрические функциональные или числовые обратные матрицы, задающие в общем случае приближенные решения рассматриваемых задач.

Предложенные методы, как частные случаи, охватывают методы решения однопараметрических матричных уравнений типа Сильвестра, Стейна, Ляпунова и др.

Рассмотрен модельный пример с квадратными матрицами-коэффициентами, для решения которого был использован последовательный численно-аналитический метод. При этом получено точное тейлоровское решение, демонстрирующее эффективность предложенных методов.

Ключевые слова: обобщенный однопараметрический транспонированный аналог матричного уравнения типа Сильвестра, редукция, аналитическое решение, дифференциальные преобразования, последовательный и параллельный численно-аналитические методы, непрерывное решение непрерывной задачи, модельный пример.

Введение. В работе [1] были предложены методы решения однопараметрических транспонированных аналогов матричных уравнений типа Сильвестра

$$A(t)\cdot X(t)+X^{T}(t)\cdot B(t)=C(t) \tag{1}$$

с квадратными матрицами $A(t), B(t), C(t)$ и $X(t)$ одного и того же порядка m, где $X(t)$ - неизвестная функциональная матрица, подлежащая определению.

В настоящей работе рассматриваются методы решения обобщенных однопараметрических транспонированных аналогов матричных уравнений типа Сильвестра

$$A(t)\cdot X(t)\cdot D(t)+F(t)\cdot X^{T}(t)\cdot B(t)=C(t), \tag{2}$$

являющихся обобщениями числовых матричных уравнений, рассмотренных, в частности, в [2].

Здесь $A(t), D(t), F(t), B(t), C(t)$ и $X(t)$ – квадратные матрицы одного и того же порядка m, где $X(t)$ – неизвестная функциональная матрица, подлежащая определению.

Замечание 1. Очевидно, что уравнение (1) является частным случаем уравнения (2), когда $D(t)=F(t)=E$, где E – единичная матрица порядка m. Следовательно, решение уравнения будет связано с намного более сложными вычислительными затруднениями, нежели решение уравнения (1), характеризующееся, в свою очередь, непростыми численными процедурами.

Редукция и аналитическое решение задачи. Допустив, что матрицы $A(t), D(t), F(t)$ и $B(t)$ невырождены на рассматриваемом интервале изменения параметра t, из (2) получим, что

$$\begin{aligned}X(t)&=A^{-1}(t)\cdot[C(t)-F(t)\cdot X^{T}(t)\cdot B(t)]\cdot D^{-1}(t)=\\&=A^{-1}(t)\cdot C(t)\cdot D^{-1}(t)-A^{-1}(t)\cdot F(t)\cdot X^{T}(t)\cdot B(t)\cdot D^{-1}(t),\end{aligned}$$

откуда

$$X^{T}(t)=D^{-T}(t)\cdot C^{T}(t)\cdot A^{-T}(t)-D^{-T}(t)\cdot B^{T}(t)\cdot X(t)\cdot F^{T}(t)\cdot A^{-T}(t). \tag{3}$$

С другой стороны, из того же уравнения (2) имеем

$$\begin{aligned}X^{T}(t)&=F^{-1}(t)\cdot[C(t)-A(t)\cdot X(t)\cdot D(t)]\cdot B^{-1}(t)=\\&=F^{-1}(t)\cdot C(t)\cdot B^{-1}(t)-F^{-1}(t)\cdot A(t)\cdot X(t)\cdot D(t)\cdot B^{-1}(t).\end{aligned} \tag{4}$$

В результате сопоставления соотношений (3) и (4) приходим к выражению

$$\begin{aligned}&D^{-T}(t)\cdot C^{T}(t)\cdot A^{-T}(t)-D^{-T}(t)\cdot B^{T}(t)\cdot X(t)\cdot F^{T}(t)\cdot A^{-T}(t)=\\&=F^{-1}(t)\cdot C(t)\cdot B^{-1}(t)-F^{-1}(t)\cdot A(t)\cdot X(t)\cdot D(t)\cdot B^{-1}(t),\end{aligned} \tag{5}$$

в котором, в отличие от (2), фигурирует лишь только неизвестная матрица $X(t)$.

Далее, из (5) получим следующее, достаточно сложное матричное уравнение:

$$\begin{aligned}&F^{-1}(t)\cdot A(t)\cdot X(t)\cdot D(t)\cdot B^{-1}(t)-D^{-T}(t)\cdot B^{T}(t)\cdot X(t)\cdot F^{T}(t)\cdot A^{-T}(t)=\\&=F^{-1}(t)\cdot C(t)\cdot B^{-1}(t)-D^{-T}(t)\cdot C^{T}(t)\cdot A^{-T}(t).\end{aligned} \tag{6}$$

Для решения этого линейного по отношению к матрице $X(t)_{m\times m}$ уравнения воспользуемся известным аппаратом кронекеровых произведений [3], в результате чего получим следующую линейную по отношению к $\hat{X}(t)_{m^2\times 1}$ гиперматрично-гипервекторную систему уравнений:

$$\{[F^{-1}(t)\cdot A(t)]\otimes[B^{-T}(t)\cdot D^{T}(t)]-[D^{-T}(t)\cdot B^{T}(t)]\otimes[A^{-1}(t)\cdot F(t)]\}_{m^2\times m^2}\cdot\hat{X}(t)_{m^2\times 1}=$$

$$=[F^{-1}(t)\cdot C(t)\cdot B^{-1}(t)-D^{-T}(t)\cdot C^{T}(t)\cdot A^{-T}(t)]_{m^2\times 1}=\hat{D}_1(t)_{m^2\times 1}, \tag{7}$$

откуда при предположении выполнения условия гиперрегулярности

$$rang\{[F^{-1}(t)\cdot A(t)]\otimes[B^{-T}(t)\cdot D^{T}(t)]-[D^{-T}(t)\cdot B^{T}(t)]\otimes[A^{-1}(t)\cdot F(t)]\}=m^2 \tag{8}$$

будем иметь

$$\hat{X}(t)=\{[F^{-1}(t)\cdot A(t)]\otimes[B^{-T}(t)\cdot D^{T}(t)]-[D^{-T}(t)\cdot B^{T}(t)]\otimes[A^{-1}(t)\cdot F(t)]\}^{-1}\cdot$$

$$\cdot\hat{D}_1(t)=D(t)\cdot\hat{D}_1(t). \tag{9}$$

Теперь, обозначив

$$F^{-1}(t)\cdot A(t)=P(t), \tag{10}$$

$$B^{-T}(t)\cdot D^{T}(t)=Q(t), \tag{11}$$

$$D^{-T}(t)\cdot B^{T}(t)=M(t), \tag{12}$$

$$A^{-1}(t)\cdot F(t)=N(t), \tag{13}$$

гиперматрично-гипервекторную систему уравнений (7) представим в виде

$$[P(t)\otimes Q(t)-M(t)\otimes N(t)]\cdot\hat{X}(t)=\hat{D}_1(t). \tag{14}$$

Тогда условия однозначной разрешимости задачи (2), по аналогии с [1], сводятся к одновременному выполнению условий:

- гиперрегулярности:

$$rang[P(t)\otimes Q(t)-M(t)\otimes N(t)]=m^2; \tag{15 а}$$

- регулярности:

$$rang\ F(t)=m\Leftrightarrow\exists F^{-1}(t),\ \forall t, \tag{15 б}$$

$$rang\ B(t)=m\Leftrightarrow\exists B^{-1}(t),\ \forall t, \tag{15 в}$$

$$rang\ D(t)=m\Leftrightarrow\exists D^{-1}(t),\ \forall t, \tag{15 г}$$

$$rang\,A(t)=m\Leftrightarrow\exists A^{-1}(t),\ \forall t. \tag{15 д}$$

При этом решение системы (14) имеет вид

$$\hat{X}(t)=[P(t)\otimes Q(t)-M(t)\otimes N(t)]^{-1}\cdot\hat{D}_1(t)=D(t)\cdot\hat{D}_1(t). \tag{16}$$

Замечание 2. Очевидно, аналитические решения (9) или (16) малопригодны для практических приложений, ибо они связаны с необходимостью определения функциональных обратных матриц $A^{-1}(t),\ D^{-1}(t),\ F^{-1}(t)$ и $B^{-1}(t)$, а также кронекеровой функциональной обратной матрицы $[P(t)\otimes Q(t)-M(t)\otimes N(t)]^{-1}$. Ясно, что такой подход достаточно трудоемок и в подавляющем большинстве случаев практически нереализуем. Поэтому необходимо воспользоваться другими, более эффективными подходами. К одному из таких подходов, основанному на дифференциальных преобразованиях Г.Е. Пухова [4] и достаточно развитому в работах [5-10] для решения других аналогичных задач, и перейдем далее.

Последовательный численно-аналитический метод решения. Предположим, что функциональные матрицы $A(t)$, $D(t)$, $F(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и $X(t)$, а также их обратные $A^{-1}(t)$, $D^{-1}(t)$, $F^{-1}(t)$ и $B^{-1}(t)$ аналитичны в некотором центре аппроксимации $t=t_\nu$. При этом, естественно, аналитичны и матрицы $M(t)$, $N(t)$, $P(t)$ и $Q(t)$. Следовательно, для всех этих матриц будут иметь место следующие дифференциальные преобразования [4]:

$$A(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K A(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu},\quad K=\overline{0,\infty}\ \doteq\ A(t)=\chi_1(t,t_\nu,H,A(K),\ K=\overline{0,\infty}), \tag{17}$$

$$D(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K D(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu},\quad K=\overline{0,\infty}\ \doteq\ D(t)=\chi_2(t,t_\nu,H,D(K),\ K=\overline{0,\infty}), \tag{18}$$

$$F(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K F(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu},\quad K=\overline{0,\infty}\ \doteq\ F(t)=\chi_3(t,t_\nu,H,F(K),\ K=\overline{0,\infty}), \tag{19}$$

$$B(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K B(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu},\quad K=\overline{0,\infty}\ \doteq\ B(t)=\chi_4(t,t_\nu,H,B(K),\ K=\overline{0,\infty}), \tag{20}$$

$$C(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K C(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu},\quad K=\overline{0,\infty}\ \doteq\ C(t)=\chi_5(t,t_\nu,H,C(K),\ K=\overline{0,\infty}), \tag{21}$$

$$\overset{\underset{\vee}{-1}}{A}(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K A^{-1}(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu},\ K=\overline{0,\infty}\ \doteq\ A^{-1}(t)=\chi_6(t,t_\nu,H,\overset{\underset{\vee}{-1}}{A}(K),K=\overline{0,\infty}), \tag{22}$$

$$\overset{\underset{\vee}{-1}}{D}(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K D^{-1}(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu},\ K=\overline{0,\infty}\ \doteq\ D^{-1}(t)=\chi_7(t,t_\nu,H,\overset{\underset{\vee}{-1}}{D}(K),K=\overline{0,\infty}), \tag{23}$$

$$\overset{\underset{\vee}{-1}}{F}(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K F^{-1}(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu},\ K=\overline{0,\infty}\ \doteq\ F^{-1}(t)=\chi_8(t,t_\nu,H,\overset{\underset{\vee}{-1}}{F}(K),K=\overline{0,\infty}), \tag{24}$$

$$\overset{\underset{\vee}{-1}}{B}(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K B^{-1}(t)}{dt^K}\Bigg|_{t=t_\nu},\ K=\overline{0,\infty}\ \doteq\ B^{-1}(t)=\chi_9(t,t_\nu,H,\overset{\underset{\vee}{-1}}{B}(K),K=\overline{0,\infty}), \tag{25}$$

$$P(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K P(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu},\ K=\overline{0,\infty}\ \doteq\ P(t)=\chi_{10}(t,t_\nu,H,P(K),\ K=\overline{0,\infty}), \tag{26}$$

$$Q(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K Q(t)}{dt^K}\bigg|_{t=t_\nu},\ K=\overline{0,\infty}\ \risingdotseq\ Q(t)=\chi_{11}(t,t_\nu,H,Q(K),\ K=\overline{0,\infty}),\quad (27)$$

$$M(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K M(t)}{dt^K}\bigg|_{t=t_\nu},\ K=\overline{0,\infty}\ \risingdotseq\ M(t)=\chi_{12}(t,t_\nu,H,M(K),K=\overline{0,\infty}),\quad (28)$$

$$N(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K N(t)}{dt^K}\bigg|_{t=t_\nu},\ K=\overline{0,\infty}\ \risingdotseq\ N(t)=\chi_{13}(t,t_\nu,H,N(K),\ K=\overline{0,\infty}),\quad (29)$$

$$X(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K X(t)}{dt^K}\bigg|_{t=t_\nu},\ K=\overline{0,\infty}\ \risingdotseq\ X(t)=\chi_{14}(t,t_\nu,H,X(K),\ K=\overline{0,\infty}),\quad (30)$$

где матрицы *A(K), D(K), F(K), B(K), C(K),* $\overset{-1}{A^\vee}(K),\ \overset{-1}{D^\vee}(K),\ \overset{-1}{F^\vee}(K),\ \overset{-1}{B^\vee}(K)$, *P(K), Q(K), M(K), N(K)* и *X(K),* $K=\overline{0,\infty}$ – матричные дискреты матриц *A(t), D(t), F(t), B(t), C(t),* $A^{-1}(t),\ D^{-1}(t),\ F^{-1}(t),\ B^{-1}(t)$, *P(t), Q(t), M(t), N(t)* и *X(t)* соответственно.

Заметим, что матрицы $\overset{-1}{A^\vee}(K),\ \overset{-1}{D^\vee}(K),\ \overset{-1}{F^\vee}(K),\ \overset{-1}{B^\vee}(K)$, $K=\overline{0,\infty}$ – матричные дискреты обратных матриц $A^{-1}(t), D^{-1}(t),\ F^{-1}(t)$ и $B^{-1}(t)$, а не обратные матрицы матричных дискрет *A(K), D(K), F(K)* и *B(K);* $K=\overline{0,\infty}$ – целочисленный аргумент; *H* – масштабный коэффициент; символ $\risingdotseq$ – знак перехода из области оригиналов в область дифференциальных изображений и наоборот; $\chi_1(\cdot)-\chi_{14}(\cdot)$ – некоторые аппроксимирующие функции, восстанавливающие оригиналы *A(t), D(t), F(t), B(t), C(t),* $A^{-1}(t),\ D^{-1}(t),\ F^{-1}(t), B^{-1}(t)$, *P(t), Q(t), M(t), N(t)* и *X(t)* соответственно.

Теперь в соответствии с правилами алгебры дифференциальных преобразований [4] оригиналы (10)-(13) переведем в область дифференциальных изображений. При этом будем иметь

$$P(K)=\sum_{l=0}^{K}\overset{-1}{F^\vee}(l)\cdot A(K-l),\ K=\overline{0,\infty},\quad (31)$$

$$Q(K)=\sum_{l=0}^{K}\overset{-1}{B^\vee}(l)\cdot D^T(K-l),\ K=\overline{0,\infty},\quad (32)$$

$$M(K)=\sum_{l=0}^{K}\overset{-1}{D^\vee}(l)\cdot B^T(K-l),\ K=\overline{0,\infty},\quad (33)$$

$$N(K)=\sum_{l=0}^{K} A^{-1}_{\vee}(l)\cdot F(K-l),\ K=\overline{0,\infty}. \tag{34}$$

Далее с учетом (14) и (16) имеем:

<u>при К=0</u>:

$$D(0,0)\cdot\hat{X}(0)=\hat{D}_1(0), \tag{35}$$

откуда при условии гиперрегулярности

$$rang\,D(0,0)=m^2 \tag{36}$$

получим

$$\hat{X}(0)=\hat{D}^{-1}(0,0)\cdot\hat{D}_1(0); \tag{37}$$

<u>при К=1</u>:

$$D(0,0)\cdot\hat{X}(1)+D(1,0;0,1)\cdot\hat{X}(0)=\hat{D}_1(1), \tag{38}$$

откуда

$$\hat{X}(1)=D^{-1}(0,0)\cdot[\hat{D}_1(1)-D(1,0;0,1)\cdot\hat{X}(0)]; \tag{39}$$

<u>при К=2:</u>

$$D(0,0)\cdot\hat{X}(2)+D(1,0;0,1)\cdot\hat{X}(1)+D(2,0;1,1;0,2)\cdot\hat{X}(0)=\hat{D}_1(2), \tag{40}$$

откуда

$$\hat{X}(2)=D^{-1}(0,0)\cdot[\hat{D}_1(2)-D(1,0;0,1)\cdot\hat{X}(1)-D(2,0;1,1;0,2)\cdot\hat{X}(0)]; \tag{41}$$

…

***<u>при К=К</u>*:**

$$\begin{aligned}
&D(0,0)\cdot\hat{X}(K)+D(1,0;0,1)\cdot\hat{X}(K-1)+D(2,0;1,1;0,2)\cdot\hat{X}(K-2)+\ldots\\
&\ldots+D(K-2,0;K-3;1;\ldots,1;K-3;0,K-2)\cdot\hat{X}(2)+\\
&+D(K-1;0;K-2;1;\ldots;1;K-2;0;K-1)\cdot\hat{X}(1)+\\
&+D(K,0;K-1,1;\ldots;1;K-1;0,K)\cdot\hat{X}(0)=\hat{D}_1(K),
\end{aligned} \tag{42}$$

откуда

$$\begin{aligned}
&\hat{X}(K)=D^{-1}(0,0)\cdot[\hat{D}_1(K)-D(1,0;0,1)\cdot\hat{X}(K-1)-D(2,0;1,1;0,2)\cdot\hat{X}(K-2)-\ldots\\
&\ldots=D(K-2,0;K-3,1;\ldots,1,K-3;0,K-2)\cdot\hat{X}(2)-\\
&-D(K-1,0;K-2,1;\ldots;1,K-2;0,K-1)\cdot\hat{X}(1)-\\
&-D(K,0;K-1,1;\ldots;1,K-1;0,K)\cdot\hat{X}(0)],
\end{aligned} \tag{43}$$

причем гипервекторы:

$$D_1(0)=\widehat{[F^{-1}_{\vee}(0)\cdot C(0)\cdot B^{-1}_{\vee}(0)-D^{-T}_{\vee}(0)\cdot C^T(0)\cdot A^{-T}_{\vee}(0)]}, \tag{44}$$

$$\hat{D}_1(1)=\widehat{\begin{bmatrix}[\check{F}^{-1}(1)\cdot C(0)\cdot \check{B}^{-1}(0)+\check{F}^{-1}(0)\cdot C(1)\cdot \check{B}^{-1}(0)+\check{F}^{-1}(0)\cdot C(0)\cdot \check{B}^{-1}(1)]-\\ -[\check{D}^{-T}(1)\cdot C^T(0)\cdot \check{A}^{-T}(0)+\check{D}^{-T}(0)\cdot C^T(1)\cdot \check{A}^{-T}(0)+\check{D}^{-T}(0)\cdot C^T(0)\cdot \check{A}^{-T}(1)]\end{bmatrix}}, \quad (45)$$

$$\hat{D}_1(2)=\widehat{\begin{bmatrix}[\check{F}^{-1}(2)\cdot C(0)\cdot \check{B}^{-1}(0)+\check{F}^{-1}(0)\cdot C(2)\cdot \check{B}^{-1}(0)+\check{F}^{-1}(0)\cdot C(0)\cdot \check{B}^{-1}(2)]+\\ +\check{F}^{-1}(1)\cdot C(1)\cdot \check{B}^{-1}(0)+\check{F}^{-1}(1)\cdot C(0)\cdot \check{B}^{-1}(1)+\check{F}^{-1}(0)\cdot C(1)\cdot \check{B}^{-1}(1)]-\\ -[\check{D}^{-T}(2)\cdot C^T(0)\cdot \check{A}^{-T}(0)+\check{D}^{-T}(0)\cdot C^T(2)\cdot \check{A}^{-T}(0)+\check{D}^{-T}(0)\cdot C^T(0)\cdot \check{A}^{-T}(2)+\\ +\check{D}^{-T}(1)\cdot C^T(1)\cdot \check{A}^{-T}(0)+\check{D}^{-T}(1)\cdot C^T(0)\cdot \check{A}^{-T}(1)+\check{D}^{-T}(0)\cdot C^T(1)\cdot \check{A}^{-T}(1)]^T\end{bmatrix}}, \quad (46)$$

…

$$\hat{D}_1(K)=\widehat{\begin{bmatrix}\sum_{l=0}^{S}\check{F}^{-1}(S)\ \sum_{S=0}^{K}C(l-S)\cdot \check{B}^{-1}(K-l)-\\ -\sum_{l=0}^{S}\check{D}^{-T}(S)\ \sum_{S=0}^{K}C^T(l-S)\cdot \check{A}^{-T}(K-l)\end{bmatrix}}, \quad (47)$$

а гиперматрицы:

$$D(0,0)=P(0)\otimes Q(0)-M(0)\otimes N(0), \quad (48)$$

$$D(1,0;0,1)=[P(1)\otimes Q(0)+P(0)\otimes Q(1)]-[M(1)\otimes N(0)+M(0)\otimes N(1)], \quad (49)$$

$$\begin{gathered}D(2,0;1,1;0,2)=[P(2)\otimes Q(0)+P(1)\otimes Q(1)+P(0)\otimes Q(2)]-\\ -[M(2)\otimes N(0)+M(1)\otimes N(1)+M(0)\otimes N(2)],\end{gathered} \quad (50)$$

………………………………………………………………………..

$$\begin{gathered}D(K-2,0;K-3,1;\ldots;1,K-3;\,0,K-2)= \quad (51)\\ =[P(K-2)\otimes Q(0)+P(K-3)\otimes Q(1)+\ldots+P(1)\otimes Q(K-3)+P(0)\otimes Q(K-2)]-\\ -[M(K-2)\otimes N(0)+M(K-3)\otimes N(1)+\ldots+M(1)\otimes N(K-3)+M(0)\otimes N(K-2)],\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}D(K-1,0;K-2,1;\ldots;1,\ K-2;\ 0,\ K-1)= \quad (52)\\ =[P(K-1)\otimes Q(0)+P(K-2)\otimes Q(1)+\ldots+P(1)\otimes Q(K-2)+P(0)\otimes Q(K-1)]-\\ -[M(K-1)\otimes N(0)+M(K-2)\otimes N(1)+\ldots+M(1)\otimes N(K-2)+M(0)\otimes N(K-1)],\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}D(K,0;K-1,1;\ldots;1,K-1;\,0,K)= \quad (53)\\ =[P(K)\otimes Q(0)+P(K-1)\otimes Q(1)+\ldots+P(1)\otimes Q(K-1)+P(0)\otimes Q(K]-\\ -[M(K)\otimes N(0)+M(K-1)\otimes N(1)+\ldots+M(1)\otimes N(K-1)+M(0)\otimes N(K)].\end{gathered}$$

Таким образом, вычислив матричные дискреты (31)-(34), гипервекторы (44)-(47), а также гиперматрицы (48)-(53), в соответствии с (37), (39), (41) - (43) можно вычислить и гипервекторы $\hat{X}(0),\ \hat{X}(1),\ \hat{X}(2),...,\hat{X}(K),\quad K=\overline{0,\infty}$ и, следовательно, матричные дискреты $X(0),\ X(1),\ X(2),...,X(K),\ K=\overline{0,\infty}$, а в соответствии с (30) - и неизвестную матрицу *X(t)*.

И, наконец, условия однозначной разрешимости задачи (2) при использовании последовательного численно-аналитического метода сводятся к одновременному выполнению условий:

- гиперегулярности:

$$rang D(0,0)=m^2; \tag{54а}$$

- регулярности:

$$rang \overset{-1}{F^{\vee}}(K)=m,\quad \forall K=\overline{0,\infty}, \tag{54б}$$

$$rang \overset{-1}{B^{\vee}}(K)=m,\quad \forall K=\overline{0,\infty}, \tag{54в}$$

$$rang \overset{-1}{D^{\vee}}(K)=m,\quad \forall K=\overline{0,\infty}, \tag{54г}$$

$$rang \overset{-1}{A^{\vee}}(K)=m,\quad \forall K=\overline{0,\infty} \tag{54д}$$

в центре аппроксимации $t=t_V$.

Параллельный численно-аналитический метод решения. Объединив соотношения (35), (38), (40) и (42), получим гиперматрично-гипервекторное представление с точностью до соотношений (44)-(47) и (48)-(53), аналогичное представлению (28) из работы [1]. Таким образом, имея гиперматрично-гипервекторную систему

$$D(\bullet)\cdot\hat{X}(\bullet)\cdot=\hat{D}_1(\bullet), \tag{55}$$

где $\hat{X}(\bullet)\cdot=(\hat{X}(0)^T \,\vdots\, \hat{X}(1)^T \,\vdots\, \hat{X}(2)^T \,\vdots\, ... \,\vdots\, \hat{X}(K)^T)^T$,

а $\hat{D}_1(\bullet)\cdot=(\hat{D}_1(0)^T \,\vdots\, \hat{D}_1(1)^T \,\vdots\, \hat{D}_1(2)^T \,\vdots\, ... \,\vdots\, \hat{D}_1(K)^T)^T$, можно определить гипервектор $\hat{X}(\bullet)$ и в соответствии с (30) затем восстановить решение *X(t)* исходной задачи.

Заметим также, что при использовании параллельного численно-аналитического метода для однозначной разрешимости задачи (2) должны быть одновременно выполнены условия:

- гиперегулярности:

$$rang\,D(\bullet)=(K+1)\,rang\,D(0,0)=(K+1)\cdot m^2; \tag{56}$$

- регулярности (54б)-(54д) (57)

в центре аппроксимации $t=t_V$.

Модельный пример. Пусть имеется матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & (1+t) \end{bmatrix} \cdot X(t) \cdot \begin{bmatrix} -t & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t & 1 \\ -t & 0 \end{bmatrix} \cdot X(t) \cdot \begin{bmatrix} (1+t) & (1-t) \\ 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -t & (-t-t^2) \\ (-t-t^2+t^3) & (-t-t^2) \end{bmatrix}.$$

Следовательно, как нетрудно вычислить, при этом будем иметь

$$A^{-1}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{t}{1+t} & \dfrac{1}{1+t} \end{bmatrix}, \quad D^{-1}(t) = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{t} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$F^{-1}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{t} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+t} & \dfrac{1-t}{1+t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Тогда с учетом того, что $t_\nu \neq 0$, $t_\nu \neq -1$, при $t_\nu = 1, H = 1$ получим

$$A(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A(K) = [0], \ \forall K \geq 2;$$

$$D(0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad D(1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D(K) = [0], \ \forall K \geq 2;$$

$$F(0) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F(1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F(K) = [0], \ \forall K \geq 2;$$

$$B(0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B(1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B(K) = [0], \ \forall K \geq 2;$$

$$C(0) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad C(1) = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad C(2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, C(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C(K) = [0], \ \forall K \geq 2;$$

$$\overset{-1}{A}{}^{\vee}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}, \quad \overset{-1}{A}{}^{\vee}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0{,}25 & -0{,}25 \end{bmatrix}, \quad \overset{-1}{A}{}^{\vee}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0{,}125 & 0{,}125 \end{bmatrix}, \ldots,$$

$$\overset{-1}{D}{}^{\vee}(0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \overset{-1}{D}{}^{\vee}(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \overset{-1}{D}{}^{\vee}(2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots,$$

$$\overset{-1}{F}{}^{\vee}(0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \overset{-1}{F}{}^{\vee}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \overset{-1}{F}{}^{\vee}(2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots.$$

Далее имеем

$$D(0,0)=\left[\begin{array}{cc|cc} -1{,}5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ \hline & & 2 & -1 \\ \multicolumn{2}{c|}{\mathbf{0}} & 0 & -1{,}5 \end{array}\right],\quad \det D(0,0)=9\neq 0,$$

откуда

$$D^{-1}(0,0)=\left[\begin{array}{cc|cc} -2/3 & -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & -1/2 & 0 & 2/3 \\ \hline & & 1/2 & -1/3 \\ \multicolumn{2}{c|}{\mathbf{0}} & 0 & -2/3 \end{array}\right],$$

а согласно (44):

$$\hat{D}_1(0)=\widehat{\begin{bmatrix} -0{,}5 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}}=\left(\begin{array}{c} -0{,}5 \\ -2 \\ \hdashline -2 \\ 0 \end{array}\right).$$

Тогда с учетом (37) получим

$$\hat{X}(0)=\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hdashline -1 \\ 0 \end{array}\right),\quad X(0)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Далее в соответствии с (49) имеем

$$D(1{,}0;\ 0{,}1)=\left[\begin{array}{cc|cc} -0{,}75 & -1 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & -1 & 1 \\ \hline 1{,}5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & -1{,}5 & -0{,}75 \end{array}\right],$$

а согласно (45):

$$\hat{D}_1(1)=\widehat{\begin{bmatrix} -0{,}75 & -0{,}5 \\ -3{,}5 & 1 \end{bmatrix}}=\left(\begin{array}{c} -0{,}75 \\ -0{,}5 \\ \hdashline -3{,}5 \\ 1 \end{array}\right).$$

Тогда с учетом (31) получим

$$\hat{X}_1(1)=\left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hdashline -1 \\ 0 \end{array}\right),\quad X(1)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Дальнейшие вычисления приводят к следующему:

$$\hat{X}(K) = (0);\ X(K) = [0],\ \ \forall K \geq 2.$$

Следовательно, тейлоровское решение задачи имеет вид

$$X(t) = X(0) + X(1)\cdot(t-1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\cdot(t-1) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ -t & 0 \end{bmatrix},$$

в абсолютной точности которого нетрудно убедиться подстановкой его в исходное матричное уравнение.

Замечание 3. При рассмотренном модельном примере с целью демонстрации особенностей предложенных методов мы пользовались аналитическими выражениями функциональных обратных матриц $A^{-1}(t),\ D^{-1}(t),\ F^{-1}(t)$ и $B^{-1}(t)$ (определение которых не связано с особыми вычислительными трудностями) для нахождения точных матричных дискрет $\overset{-1}{A}{}^{\vee}(K),\ \overset{-1}{D}{}^{\vee}(K),\ \overset{-1}{F}{}^{\vee}(K),$ и $\overset{-1}{B}{}^{\vee}(K),\ \ \forall K = \overline{0,\infty}$. Разумеется, что в общем случае, с той же целью, необходимо воспользоваться численными *D*-процедурами, в частности, средствами, предложенными в работах [5-10].

Замечание 4. Нетрудно также убедиться, что при рассмотрении аналогичных (2) матричных уравнений с прямоугольными матрицами-коэффициентами *A(t), D(t), F(t), B(t)* и *C(t)* предложенные в настоящей работе методы остаются в силе с точностью до однопараметрических обобщенных обратных матриц $A^{+}(t),\ D^{+}(t),\ F^{+}(t)$ и $B^{+}(t)$, а также их матричных дискрет $\overset{+}{A}{}^{\vee}(K),\ \overset{+}{D}{}^{\vee}(K),\ \overset{+}{F}{}^{\vee}(K)$ и $\overset{+}{B}{}^{\vee}(K),\ \forall K = \overline{0,\infty}$.

Заключение. Таким образом, дифференциальные преобразования позволяют решение исходной непрерывной задачи свести к некоторым рекуррентным численным процедурам при последовательном численно-аналитическом методе и к некоторым поточным численным процедурам при параллельном численно-аналитическом методе. Эти процедуры могут быть эффективно реализованы средствами современных информационных технологий [11]. Восстановление же непрерывного решения *X(t)* можно осуществлять сравнительно легко – с использованием некоторого обратного дифференциального преобразования (30).

Литература

1. **Симонян С.О.** К решению однопараметрических транспонированных аналогов матричных уравнений типа Сильвестра $A(t)\cdot X(t) + X^{T}(t)\cdot B(t) = C(t)$// Известия НАН РА и ГИУА. Серия ТН.– 2016.- Т. LXIX, N1.– С. 49-60.

2. **Wang M.H., Cheng X.H., Wei M.S.** Iterativ Algorithms for Solving the Matrix Equation $A \cdot X \cdot B + C \cdot X^T \cdot D = E$ // Appl.Math. Comput. – 2007.- 187.- P. 622-629.
3. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. - М.: Наука. 2010. – 560 с.
4. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования функций и уравнений. - Киев: Наукова думка, 1984.- 420 с.
5. **Бадалян Л.А.** Разработка методов определения псевдообратных нестационарных матриц и автоматизация вычислительных процедур: Автореф. дис. … к.т.н. – Ереван, 2007. – 21 с.
6. **Симонян А.С.** Разработка численно-аналитических методов определения параметрических обобщенных обратных матриц Мура-Пенроуза и автоматизация вычислительных процедур: Автореф. дис. …к.т.н. – Ереван, 2013. – 24 с.
7. **Симонян С.О.** Параллельные вычислительные методы определения параметрических обобщенных обратных матриц // Известия Томского политехнического университета.- Томск, 2013.- Т. 323, №5.- С. 10-15.
8. **Симонян С.О.** Декомпозиционные методы определения комплексных однопараметрических обобщенных обратных матриц // Известия НАН РА и ГИУА. Серия ТН.- 2014.- Т. LXVII, №3.- С. 336-344.
9. **Симонян С.О.** Методы определения комплексных однопараметрических обобщенных обратных матриц // Известия Томского политехнического университета.- Томск, 2015.- Т. 326, №3.- С. 157-163.
10. **Асланян Г.А.** Разработка последовательных и параллельных методов определения параметрических обобщенных обратных матриц и автоматизация вычислительных процедур: Автореф. дис. … к.т.н.- Ереван, 2015. – 22 с.
11. **Straustrup B.** The C^{++} Programming Language.- 4^{th} Edition.- Boston: Addison – Wesleg professional, 2013. – 1368 p.

Поступила в редакцию 25.02.2016.
Принята к опубликованию 20.05.2016.

ՍԻԼՎԵՍՏՐԻ ՏԻՊԻ $\mathbf{A(t) \cdot X(t) \cdot D(t) + F(t) \cdot X^T(t) \cdot B(t) = C(t)}$ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ՄԻԱՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՏՐԱՆՍՊՈՆԱՑՎԱԾ ՆՄԱՆԱԿՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐ

Ս.Հ. Սիմոնյան

Առաջարկված են քառակուսի մատրից-գործակիցներով Սիլվեստրի տիպի ընդհանրացված միապարամետրական մատրիցային հավասարումների տրանսպոնացված նմանակների լուծման մեթոդներ. անալիտիկ մեթոդը; Գ.Ե. Պուխովի դիֆերենցիալ ձևափոխությունների վրա հիմնված հաջորդական և զուգահեռ թվա-անալիտիկ մեթոդները: Բոլոր մեթոդների դեպքերում էլ ստացվել են խնդրի միարժեք լուծելիության համապատասխան պայմանները: Անալիտիկ մեթոդը սահմանափակված է գործնական կիրառություններում, սակայն այն հիմք է հանդիսանում հաջորդական և զուգահեռ թվա-անալիտիկ մեթոդների մշակման համար: Վերջիններս օժտված են այնպիսի կառուցվածք-ներով, որոնք հնարավորություն են տալիս այդ մեթոդները բավականաչափ հեշտությամբ իրականացնել ժամանակակից տեղեկատվական տեխնոլոգիաների միջոցներով: Առաջարկված մեթոդները որոշակիորեն լրացնում են դիտարկվող բնագավառում գոյություն ունեցող բացը: Բացի այդ, դրանք հեշտությամբ տրանսֆորմացվում են ուղղանկյուն մատրից-գործակիցներով նման խնդիրների լուծման համար՝ համապատասխան նմանակներին: Այդ դեպքում սովորական ֆունկցիոնալ կամ թվային հակադարձ մատրիցների փոխարեն օգտագործվում են ընդհանրացված միապարամետրական ֆունկցիոնալ կամ թվային հակադարձ մատրիցներ, որոնք, ընդհանուր առմամբ, որոշում են դիտարկվող խնդիրների մոտավոր լուծումները: Առաջարկված մեթոդները, որպես մասնավոր դեպքեր, ընդգրկում են Սիլվեստրի, Ստեյնի, Լյապունովի և այլ տիպերի միապարամետրական մատրիցային հավասարումների լուծման մեթոդները: Դիտարկված քառակուսի մատրից-գործակիցներով մոդելային օրինակի լուծման համար օգտագործվել է հաջորդական թվա-անալիտիկ մեթոդը: Ստացվել է առաջարկված մեթոդների հաշվողական արդյունավետությունը ցուցադրող ճշգրիտ թեյլորյան լուծումը:

Առանցքային բառեր. Սիլվեստրի տիպի ընդհանրացված միապարամետրական մատրիցային հավասարումների տրանսպոնացված նմանակ, ռեդուկցիա, անալիտիկ լուծում, դիֆերենցիալ ձևափոխություններ, հաջորդական և զուգահեռ թվա-անալիտիկ մեթոդներ, անընդհատ խնդրի անընդհատ լուծում, մոդելային օրինակ:

METHODS FOR SOLVING SYLVESTER TYPE $A(t) \cdot X(t) \cdot D(t)+F(t) \cdot X^T(t)$ $B(t)=C(t)$ GENERALIZED ONE-PARAMETRIC TRANSPOSED ANALOGUES OF MATRIX EQUATIONS

S.H. Simonyan

Three methods for solving Sylvester type generalized one-parametric transposed analogues of matrix equations with squared matrix-coefficients are proposed: analytical, consecutive and parallel numerical-analytical methods based on G.E. Pukhov’s differential transformations. For all the proposed methods, the corresponding conditions of one-valued solvability have been obtained. Though the analytical method is limited to practical applications, it serves as a basis for development of consecutive and parallel numeric-analytical methods. The latter have such a composition which enables to implement those methods quite easily by using modern IT means. The proposed methods definitely fill the existing gap in the researched field. Besides, they are easily transformed to the corresponding analogues for solving such problems with rectangular matrix-coefficients. In that case, instead of ordinary functional or numerical inverse matrices, generalized functional or numerical inverse matrices are used which in general define the approximate solutions of the problems under consideration. The proposed methods, as special cases, embrace Sylvester, Stein, Lyapunov and other types of solution methods for generalized one-parametric matrix equations. A method with squared matrix-coefficients modeling sample is discussed for the solution of which, the consecutive numerical-analytical method has been used. In that case, Tailor’s precise solution has been obtained, thus displaying the computational productivity of the proposed methods.

Keywords: Sylvester type generalized one-parametric transposed analogue of a matrix equation, reduction, analytical solution, differential transformations, consecutive and parallel numeric procedures, continuous solution of the continuous problem, modeling sample.