УДК 514.122 + 004.93

О БЛИЗОСТИ ОКРУЖНОСТЕЙ

Г.Ц. Акопян

Ереванский государственный университет

Для большого количества однотипных объектов возникают задачи кластеризации и распознавания. Информация, описывающая заданные объекты, представляется алгебраическими образами. Решение рассматриваемых задач требует применения соответствующих технологий, где фундаментальную роль играет понятие расстояния между образами. Для алгебраического и геометрического представления образов выделяется конечное число признаков или свойств, характерных для всех этих объектов. Каждый объект представляется в виде многомерного вектора, в котором координаты являются действительными числами, равными значению соответствующих свойств. В частном случае, когда количество свойств равно двум, образ является двухмерным вектором или же точкой на плоскости. Зачастую представление об объекте носит размытый и приближенный характер. Это приводит к тому, что образ этого объекта представляется окружностью: чем меньше радиус этой окружности, тем точнее представлен объект.

Рассматриваются окружности на одной и той же плоскости, имеющие в общем случае разные радиусы. Для двух окружностей определяется понятие близости, которая равняется разности расстояния между центрами этих окружностей и сумме их радиусов. Из четырех свойств расстояния близость в общем случае удовлетворяет только условию симметричности. На модельном примере показано, что близость может не удовлетворять неравенству треугольника. Для трех окружностей, ни одна из которых не находится внутри другой, дается необходимое и достаточное условие для того, чтобы для близости выполнялись все три неравенства треугольника. Полученный результат иллюстрируется в частном случае, когда все три окружности имеют одинаковый радиус.

Ключевые слова: окружность, расстояние, близость, неравенство треугольника, эллипс, гипербола.

Введение. При представлении и исследовании многих задач распознавания образов начальным этапом является представление образов в виде многомерных векторов [1]. С этой целью выделяются свойства $P_1, P_2, ..., P_n$, которыми описываются рассматриваемые образы. Каждому образу соответствует вектор $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, где α_i, $i = 1, 2, ..., n$ – действительное число, равное значению свойства P_i рассматриваемого образа. Если $n = 2$, образу соответствует точка на плоскости. Зачастую вместо определенного образа, которому соответствует точка A, рассматриваются образы, лежащие в ε-окрестности точки A.

Математический аппарат. Элементы аналитической геометрии: окружность, эллипс, гипербола.

1. Объектом нашего исследования являются окружности, определенные на заданной плоскости. Окружность в этой плоскости с центром в точке A и радиусом ε ($\varepsilon \geq 0$) будем обозначать через $A(\varepsilon)$: $A(\varepsilon) = \{B| \ |A\ B| = \varepsilon\}$, где $|A\ B|$ – расстояние между точками A и B, для которого, как известно, выполняются такие свойства, как симметричность, неотрицательность, невырожденность и аксиома треугольника [2].

Для двух окружностей $A^1(\varepsilon_1)$ и $A^2(\varepsilon_2)$ рассмотрим следующее число:

$$\rho\ (A^1(\varepsilon_1), A^2(\varepsilon_2)) = |A^1\ A^2| - \varepsilon_1 - \varepsilon_2,$$

которое назовем *близостью* этих окружностей.

Модельный пример. Пусть A = (-8, 0), B = (8, 0), C = (4, 1) (см. рис. 1). Применяя теорему Пифагора для прямоугольных треугольников ACD и BCD и определение близости для окружностей $A(1)$, $B(2)$, $C(3)$, получаем

$\rho\ (A(1),C\ (3)) = \sqrt{97}–4 \sim 5{,}8$, $\rho\ (B(2),C\ (3)) = \sqrt{65} – 5 \sim 3{,}1$, $\rho\ (A(1),\ B\ (2)) = 13$,

и неравенство $\rho\ (A(1),\ B\ (2)) \leq\ \rho\ (A(1),\ C\ (3)) + \rho\ (B(2),\ C\ (3))$ не выполняется.

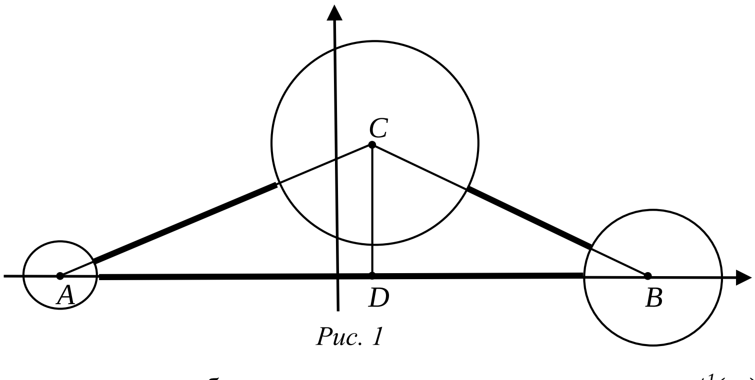

Рис. 1

Легко заметить, что для близости между двумя окружностями $A^1(\varepsilon_1)$ и $A^2(\varepsilon_2)$ не выполняются все свойства расстояния, при этом выполняются следующие свойства:

а) $\rho\ (A^1(\varepsilon_1), A^2(\varepsilon_2)) \geq - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, и это число равно $- \varepsilon_1 -\varepsilon_2$, если $A^1 = A^2$ (в частном случае $\rho\ (A(\varepsilon), A(\varepsilon)) = -2\ \varepsilon$);

б) $\rho\ (A^1(\varepsilon_1), A^2(\varepsilon_2)) = 0$ тогда и только тогда, когда эти окружности касаются с внешней стороны;

в) $\rho\ (A^1(\varepsilon_1), A^2(\varepsilon_2)) > 0$ тогда и только тогда, когда эти окружности не пересекаются и ни одна из них не находится внутри другой;

г) $\rho\ (A^1(\varepsilon_1), A^2(\varepsilon_2)) = \rho\ (A^2(\varepsilon_2), A^1(\varepsilon_1))$ – свойство симметричности.

Из этих свойств следует, что $\rho(A^1(\varepsilon_1), A^2(\varepsilon_2)) \geq 0$ тогда и только тогда, когда ни одна из этих окружностей не находится внутри другой или когда они имеют самое большее одну общую точку.

Модельный пример показывает, что близость в общем случае не удовлетворяет неравенству треугольника.

Рассмотрим три окружности $A(\varepsilon_1)$, $B(\varepsilon_2)$ и $C(\varepsilon_3)$, для которых попарные близости являются неотрицательными числами:

$$\rho\,(A(\varepsilon_1), B(\varepsilon_2)) \geq 0,\ \rho\,(A(\varepsilon_1), C(\varepsilon_3)) \geq 0,\ \rho\,(B(\varepsilon_2), C(\varepsilon_3)) \geq 0.$$

Предположим для простоты, что точки A и B лежат на оси X и расположены симметрично относительно начала координат:

$$A = (-a, 0),\ B = (a, 0) \text{ и } C = (x, y).$$

В этом случае

$$|A\,B| = 2a,\ |A\,C| = \sqrt{(a+x)^2+y^2} \text{ и } |B\,C| = \sqrt{(a-x)^2+y^2}\ .$$

Рассматриваемые близости вычисляются следующими формулами:

$\rho\,(A(\varepsilon_1), B(\varepsilon_2)) = 2a - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, где $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq |A\,B|$;

$\rho\,(A(\varepsilon_1), C(\varepsilon_3)) = \sqrt{(a+x)^2+y^2} - \varepsilon_1 - \varepsilon_3$, где $\varepsilon_1 + \varepsilon_3 \leq |A\,C|$;

$\rho\,(B(\varepsilon_2), C(\varepsilon_3)) = \sqrt{(a-x)^2+y^2} - \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, где $\varepsilon_2 + \varepsilon_3 \leq |B\,C|$.

2. Найдем геометрическое место точек заданной плоскости для множества центров C окружности $C(\varepsilon_3)$, для которых выполняется следующее неравенство треугольника:

$$\rho\,(A(\varepsilon_1), B(\varepsilon_2)) \leq \rho\,(A(\varepsilon_1), C(\varepsilon_3)) + \rho\,(C(\varepsilon_3), B(\varepsilon_2)). \qquad (1)$$

Для этого сначала найдем геометрическое место точек для множества центров C окружности $C(\varepsilon_3)$, для которых неравенство (1) превращается в равенство. Подставляя в это равенство формулы рассматриваемых близостей, получаем

$$2\,(a + \varepsilon_3) - \sqrt{(a+x)^2+y^2} = \sqrt{(a-x)^2+y^2}.$$

Возведя обе части этого равенства в квадрат и упростив их, получим

$$(a + \varepsilon_3)^2 + ax = (a + \varepsilon_3)\sqrt{(a+x)^2+y^2}.$$

Если $a + \varepsilon_3 = 0$, то $a = \varepsilon_3 = 0$, т.е. все три окружности имеют радиус 0, точки A и B совпадают с началом координат, и неравенство (1) выполняется для всех точек C плоскости.

В противном случае, обе части полученного уравнения разделим на $(a + \varepsilon_3)$. Возведя в квадрат обе части полученного равенства и упростив их, получим

$$x^2\,\frac{\varepsilon_3(2a\,+\,\varepsilon_3)}{(a\,+\,\varepsilon_3)^2} + y^2 = \varepsilon_3(2a\,+\,\varepsilon_3).$$

Если $\varepsilon_3 = 0$, то $y = 0$, т.е. точка C лежит на оси X. В противном случае, разделим на $\varepsilon_3(2a\,+\,\varepsilon_3)$. Получим следующее уравнение эллипса [3]:

$$\frac{x^2}{(a + \varepsilon_3)^2} + \frac{y^2}{\varepsilon_3(2a + \varepsilon_3)} = 1. \qquad (2)$$

Заметим, что точки A и B являются фокусами этого эллипса. Заметим также, что это уравнение зависит только от $|A\ B|$ и ε_3 и не зависит от радиусов ε_1 и ε_2.

Неравенство (1) не выполняется, если $\varepsilon_3 \neq 0$ и центр C окружности $C(\varepsilon_3)$ находится внутри этого эллипса.

3. Найдем теперь геометрическое место точек заданной плоскости для множества центров C окружности $C(\varepsilon_3)$, для которых выполняется следующее неравенство треугольника:

$$\rho\ (A(\varepsilon_1), C(\varepsilon_3)) \leq \rho\ (A(\varepsilon_1), B(\varepsilon_2)) + \rho\ (B(\varepsilon_2), C(\varepsilon_3)). \qquad (3)$$

Для этого сначала найдем геометрическое место точек для множества центров C окружности $C(\varepsilon_3)$, для которых неравенство (3) превращается в равенство. Подставляя в это равенство формулы рассматриваемых близостей, получаем

$$\sqrt{(a + x)^2 + y^2} = 2\ (a\ _2) + \sqrt{(a - x)^2 + y^2}\ .$$

Возведя обе части этого равенства в квадрат и упростив их, получим

$$ax - (a\ _2)^2 = (a\ _2)\sqrt{(a - x)^2 + y^2}\ .$$

Если $\varepsilon_2 = a$, то $x = 0$, т.е. точка C лежит на оси Y.

В противном случае, разделим обе части полученного равенства на a-ε_2. Возведя их в квадрат и упростив, получим

$$x^2\ \frac{\varepsilon_2(2a - \varepsilon_2)}{(a - \varepsilon_2)^2} - y^2 = \varepsilon_2(2a - \varepsilon_2).$$

Если $\varepsilon_2 = 0$, то получим $y = 0$, т.е. точка C лежит на оси X. В противном случае, разделив обе части полученного равенства на $\varepsilon_2(2a - \varepsilon_2)$, получим следующее уравнение гиперболы, которую назовем *правой* гиперболой [3]:

$$\frac{x^2}{(a - \varepsilon_2)^2} - \frac{y^2}{\varepsilon_2(2a - \varepsilon_2)} = 1. \qquad (4)$$

Заметим, что фокусами этой гиперболы являются точки A и B. Уравнение (4) зависит только от $|A\ B|$ и ε_2 и не зависит от радиусов ε_1 и ε_3. Заметим также, что окружность $B(\varepsilon_2)$ касается правой ветви правой гиперболы, если $\varepsilon_2 < a$, и левой ветви правой гиперболы, если $\varepsilon_2 > a$. Обе ветви совпадают с осью Y, если $\varepsilon_2 = a$. Если D – точка пересечения эллипса и правой гиперболы, то

$$\rho\ (B(\varepsilon_2), D(\varepsilon_3)) = 0 \text{ и } \rho\ (A(\varepsilon_1), D(\varepsilon_3)) = \rho\ (A(\varepsilon_1), B(\varepsilon_2)).$$

Нетрудно показать, что неравенство (3) не выполняется только для тех окружностей $C(\varepsilon_3)$, для которых:

а) центр C лежит правее правой ветви правой гиперболы, если $\varepsilon_2 < a$;

б) центр C лежит правее левой ветви правой гиперболы, если $\varepsilon_2 > a$;

в) центр C лежит правее оси Y, если $\varepsilon_2 = a$.

4. Аналогичным образом найдем множество центров C окружности $C(\varepsilon_3)$, для которых выполняется следующее неравенство треугольника:

$$\rho\ (B(\varepsilon_2),\ C(\varepsilon_3)) \leq \rho\ (B(\varepsilon_2),\ A(\varepsilon_1)) + \rho\ (A(\varepsilon_1),\ C(\varepsilon_3)). \tag{5}$$

Для этого сначала найдем геометрическое место точек для множества центров C окружности $C(\varepsilon_3)$, для которых неравенство (5) превращается в равенство. Подставляя в это равенство формулы рассматриваемых близостей, получаем

$$\sqrt{(a-\mathrm{x})^2+\mathrm{y}^2} = 2(a-\varepsilon_1)+\sqrt{(a+\mathrm{x})^2+\mathrm{y}^2}\ .$$

Возведя обе части этого равенства в квадрат и упростив их, получим

$$ax - (a\ _1)^2 = (a\ _1)\sqrt{(a-\mathrm{x})^2+\mathrm{y}^2}\ .$$

Если $\varepsilon_1 = a$, то $x = 0$, т.е. точка C лежит на оси Y.

В противном случае, обе части полученного равенства разделим на a-ε_1. Возведя их в квадрат и упростив, получим

$$x^2\ \frac{\varepsilon_1(2a\ -\ \varepsilon_1)}{(a\ -\ \varepsilon_1)^2} - \mathrm{y}^2 = \varepsilon_1(2a\ -\ \varepsilon_1).$$

Если $\varepsilon_1 = 0$, то получим $\mathrm{y} = 0$, т.е. точка C лежит на оси X. В противном случае, разделив обе части полученного равенства на $\varepsilon_1(2a - \varepsilon_1)$, получим следующее уравнение гиперболы, которую назовем *левой* гиперболой:

$$\frac{x^2}{(a\ -\ \varepsilon_1)^2} - \frac{\mathrm{y}^2}{\varepsilon_1(2a\ -\ \varepsilon_1)} = 1. \tag{6}$$

Заметим, что фокусами этой гиперболы являются точки A и B. Уравнение (6) зависит только от $|A\ B|$ и ε_1 и не зависит от радиусов ε_2 и ε_3. Заметим также, что окружность $A(\varepsilon_1)$ касается левой ветви левой гиперболы, если $\varepsilon_1 < a$, и правой ветви левой гиперболы, если $\varepsilon_1 > a$. Обе ветви совпадают с осью Y, если $\varepsilon_1 = a$. Если E – точка пересечения эллипса и левой гиперболы, то

$$\rho\ (A(\varepsilon_1),\ E(\varepsilon_3)) = 0 \text{ и } \rho\ (A(\varepsilon_1),\ B(\varepsilon_2)) = \rho\ (E(\varepsilon_3),\ B(\varepsilon_2)).$$

Следует отметить, что правые и левые гиперболы совпадают, если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, а также если $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2a$.

Нетрудно показать, что неравенство (5) не выполняется только для тех окружностей $C(\varepsilon_3)$, для которых:

а) центр C лежит левее левой ветви левой гиперболы, если $\varepsilon_1 < a$;

б) центр C лежит левее правой ветви левой гиперболы, если $\varepsilon_1 > a$;

в) центр C лежит левее оси Y, если $\varepsilon_1 = a$.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема. Для того, чтобы для близости трех окружностей $A(\varepsilon_1)$, $B(\varepsilon_2)$ и $C(\varepsilon_3)$, где $A = (-a, 0)$, $B = (a, 0)$ и $C = (x, y)$, выполнялись все три неравенства треугольника

(1), (3), (5), необходимо и достаточно, чтобы центр C окружности $C(\varepsilon_3)$ удовлетворял всем следующим свойствам:

а) C не лежит внутри эллипса (2);

б) C не лежит правее правой ветви правой гиперболы (4), если $\varepsilon_2 < a$;

в) C не лежит правее левой ветви правой гиперболы (4), если $\varepsilon_2 > a$;

г) C не лежит правее оси Y, если $\varepsilon_2 = a$;

д) C не лежит левее левой ветви левой гиперболы (6), если $\varepsilon_1 < a$;

е) C не лежит левее правой ветви левой гиперболы (6), если $\varepsilon_1 > a$;

ж) C не лежит левее оси Y, если $\varepsilon_1 = a$.

На рис. 2 изображены окружности $A(\varepsilon_1)$, $B(\varepsilon_2)$, эллипс (2), правая ветвь правой гиперболы (4), левая ветвь левой гиперболы (6) для случая, когда

$$0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3 < a.$$

Геометрическое множество точек C, для которых выполняются все три неравенства треугольника (1), (3), (5), на рисунке изображено затемненной областью.

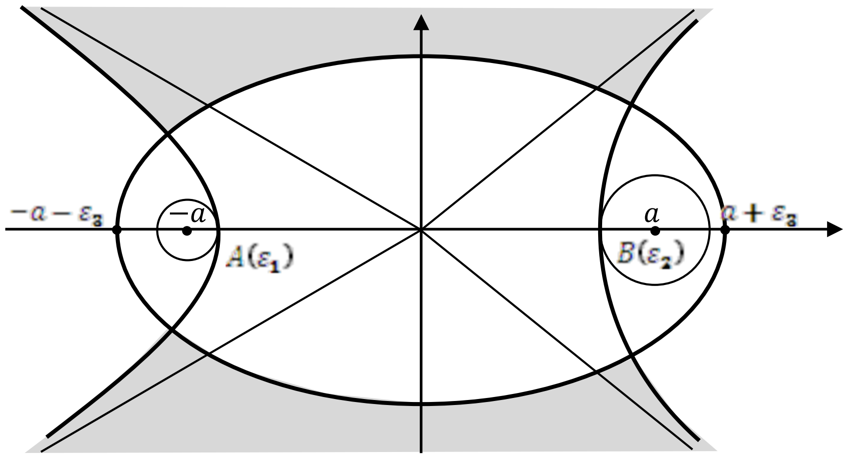

Рис. 2

Следствие 1. Если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = a$, то для того, чтобы для близости рассматриваемых окружностей выполнялись все три неравенства треугольника, необходимо и достаточно, чтобы центр C не лежал внутри эллипса (2) и не находился вне оси Y.

Следствие 2. Если $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2a$, $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, то для того, чтобы для близости рассматриваемых окружностей выполнялись все три неравенства треугольника, необходимо и достаточно, чтобы:

а) центр C не лежал внутри эллипса (2) и не находился на правой ветви гиперболы (4), совпадающей с гиперболой (6), если $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$;

б) центр C не лежал внутри эллипса (2) и не находился на левой ветви гиперболы (4), если $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$.

В частном случае, если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon$ и $0 < \varepsilon < a$, то левые и правые гиперболы совпадают друг с другом (см. рис. 3).

Полученный эллипс пересекает ось Y в двух точках $(0, \pm\sqrt{\varepsilon(2a+\varepsilon)})$. Фокусы этого эллипса совпадают с фокусами гиперболы и являются точками A и B. Асимптотами гиперболы являются

$$y = \pm \frac{\sqrt{\varepsilon(2a-\varepsilon)}}{a-\varepsilon}\,x.$$

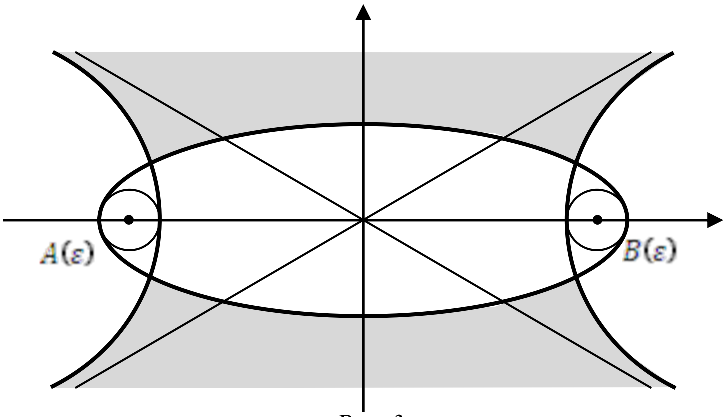

Рис. 3

Заметим, что если $\varepsilon \to 0$, то незатемненная область стремится к оси X, поскольку точки пересечения эллипса с осью Y стремятся к началу координат, и асимптоты гиперболы стремятся к оси X, а если $\varepsilon = 0$, то затемненная область совпадает со всей плоскостью.

Если мы на заданной плоскости изобразим все эллипсы и гиперболы для всех $0 < \varepsilon < a$, то получим довольно известную картину "кофокальных конических сечений". Эта картина образуется также при распространении волн, если в воду, поверхность которой совпадает с рассматриваемой плоскостью, в точках A и B одновременно будут брошены два одинаковых камня [4].

Заключение. Таким образом, для заданных окружностей $A(\varepsilon_1)$ и $B(\varepsilon_2)$ дается полное описание геометрического множества мест центров C окружности $C(\varepsilon_3)$, для близости которых выполняются все три неравенства треугольника. Этот результат может иметь прямое применение в задачах кластеризации и распознавания образов, представленных окружностями. Построение алгоритмов, решающих такие задачи, относится к области информационных технологий, где требуется представить и обработать большое количество заданной первоначальной информации. Отметим также, что полученные результаты могут быть применены и в задачах вычислительной геометрии [5].

Литература

1. **Фомин Я.А.** Распознавание образов: теория и применения.- М.: ФАЗИС, 2012. – 429 с.
2. **Шрейдер Ю.А.** Что такое расстояние? .- М.: Физматгиз, 1963. – 76 с.
3. **Ильин В.А., Позняк Э.Г.** Аналитическая геометрия.- М.: Физматлит, 2006. – 224 с.
4. **Kendig K.** Conics. The mathematical Association of America.- Washington, 2005. – 404 p.
5. **Berg M., Cheong O., Kreveld M., Overmars M.** Computational Geometry. Algorithms and Applications.- Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. – 388 p.

Поступила в редакцию 18.04.2016.
Принята к опубликованию 20.05.2016.

ՇՐՋԱՆԱԳԾԵՐԻ ՄՈՏԻԿՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Հ.Ց. Հակոբյան

Մեծ քանակությամբ միատիպ օբյեկտների համար առաջանում են դասակարգման և ճանաչման խնդիրներ: Տրված օբյեկտները նկարագրող ինֆորմացիան ներկայացվում է հանրահաշվական պատկերների միջոցով: Դիտարկվող խնդիրների լուծումը պահանջում է համապատասխան տեխնոլոգիաների կիրառում, երբ հիմնարար է պատկերների միջև հեռավորության գաղափարը: Պատկերների հանրահաշվական և երկրաչափական ներկայացման համար առանձնացվում են վերջավոր թվով բոլոր օբյեկտներին բնորոշ հայտանիշներ կամ հատկություններ: Յուրաքանչյուր օբյեկտ ներկայացվում է բազմաչափ վեկտորի տեսքով, որի կոորդինատները հանդիսանում են իրական թվեր, որոնք հավասար են համապատասխան հատկությունների արժեքներին: Մասնավոր դեպքում, եթե հատկությունների քանակը հավասար է երկուսի, պատկերը հանդիսանում է երկչափանի վեկտոր կամ հարթության կետ: Հաճախ օբյեկտի մասին պատկերացումն ունի չտարորոշված, մոտավոր բնույթ, ինչը հանգեցնում է նրան, որ այդ օբյեկտի պատկերը ներկայացվում է շրջանագծով. որքան փոքր է այդ շրջանագծի շառավիղը, այդքան ճշգրիտ է ներկայացված օբյեկտը:

Դիտարկվում են միևնույն հարթության վրա գտնվող շրջանագծեր, որոնք ընդհանուր դեպքում ունեն տարբեր շառավիղներ: Երկու շրջանագծերի համար սահմանվում է մոտիկության գաղափարը, որը հավասար է այդ շրջանագծերի կենտրոնների միջև եղած հեռավորության և նրանց շառավիղների գումարի տարբերությանը: Հեռավորության չորս հատկություններից մոտիկությունը, ընդհանուր դեպքում, բավարարում է միայն սիմետրիկության պայմանը: Մոդելային օրինակով ցույց է տրվում, որ մոտիկությունը կարող է չբավարարել եռանկյան անհավասարության պայմանը: Երեք շրջանագծերի համար, որոնցից ոչ մեկը չի գտնվում մյուսի ներսում, տրվում է անհրաժեշտ և բավարար պայման, որպեսզի մոտիկության համար տեղի ունենան բոլոր երեք եռանկյունների անհավասարությունները: Ստացված արդյունքը պատկերված է մասնավոր դեպքի համար, երբ բոլոր շրջանագծերն ունեն հավասար շառավիղներ:

Առանցքային բառեր. շրջանագիծ, հեռավորություն, մոտիկություն, եռանկյան անհավասարություն, էլիպս, հիպերբոլ:

ON THE CLOSENESS OF CIRCLES

H.Ts. Hakobyan

Clustering and pattern recognition tasks appear for a large number of similar objects. The information, describing the given objects is presented algebraically. The solution of these problems requires application of appropriate technologies, where the concept of distance between the images plays a fundamental role. A finite number of features or characteristics is allocated for the algebraic and geometric presentations of images typical of all these objects. Each object is represented as a multidimensional vector, the coordinates of which are real numbers equal to the value of the corresponding properties. In the particular case, if the number of properties is equal to two properties, the image is a two-dimensional vector or a point on the plane. Very often, the idea of an object is blurred and approximate, which leads to the fact that the image of the object is presented by a circle: the smaller the radius of the circle, the more accurate the presented object is.

The circles on the same plane, generally having different radii are considered. The concept of closeness is defined for the two circles equal to the difference between the distance between the centers of the circles, and the sum of their radii. Out of the four properties of the distance, closeness generally meets only the symmetry condition. In the model example, it is shown that closeness can be unsatisfactory for the triangle inequality. For the three circles, none of which is placed inside the other, a necessary and sufficient condition is given in order to allow to carry out all three triangle inequalities for closeness. The result is illustrated in the special case where all the three circles have the same radius.

Keywords: circle, distance, closeness, triangle inequality, ellipse, hyperbole.