УДК 621.52+511.52

К РЕШЕНИЮ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СТЕЙНА $\mathbf{A(t)\cdot X(t)\cdot B(t)-X(t)=C(t)}$

С.О. Симонян

Национальный политехнический университет Армении

Предложены три метода решения однопараметрических неявных дискретных матричных уравнений типа Стейна: аналитический метод, который пригоден для задач с малыми размерами при простых элементах однопараметрических матриц; последовательный и параллельный численно-аналитические методы, основанные на дифференциальных преобразованиях Г.Е. Пухова и пригодные в общем случае при аналитических элементах этих матриц в центре аппроксимации. Получены условия однозначной разрешимости этих уравнений для всех трех методов. Рассмотрен модельный пример, для решения которого были использованы последовательный и параллельный численно-аналитические методы, при которых было получено точное маклореновское решение задачи.

Ключевые слова: однопараметрическое матричное уравнение типа Стейна, аналитический метод решения, дифференциальные преобразования, последовательный и параллельный численно-аналитические методы решения, условия однозначной разрешимости, модельный пример.

Введение. Числовые матричные уравнения Стейна достаточно часто встречаются в различных областях науки и техники [1,2]. Решению этих уравнений посвящено множество различных публикаций, в частности [3,4]. Однако в области методов решения однопараметрических матричных уравнений типа Стейна замечается очевидное отставание. Настоящая работа преследует цель некоторого заполнения этого пробела.

Математический аппарат. Рассмотрим однопараметрическое матричное уравнение типа Стейна

$$A(t)\cdot X(t)\cdot B(t)-X(t)=C(t), \tag{1}$$

где $A(t)$ - матрица порядка m; $B(t)$ - матрица порядка n; $C(t)$ - матрица с размерами $m\times n$; $X(t)$ - неизвестная матрица также с размерами $m\times n$, подлежащая определению:

$$X(t)=\begin{bmatrix} x_{11}(t)\ \ldots x_{1n}(t) \\ x_{21}(t)\ \ldots x_{2n}(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1}(t)\ \ldots x_{mn}(t) \end{bmatrix}=(x_{ij}(t)),\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}. \tag{2}$$

Аналитический метод решения. Матричное уравнение (1) представим в следующем виде:

$$A(t)_{m\times m}\cdot X(t)_{m\times n}\cdot B(t)_{n\times n}-E_{m\times m}\cdot X(t)\cdot E_{n\times n}=C(t)_{m\times n}, \qquad (3)$$

где $E_{m\times m}$ и $E_{n\times n}$ - единичные матрицы порядка m и n соответственно. Далее, с учетом результатов для числовых матриц, представленных в [1-4], уравнение (3) представим в виде

$$\begin{gathered}\left[A(t)\otimes B^T(t)\right]\cdot\hat{X}(t)-\left[E_{m\times m}\otimes E^T_{n\times n}\right]\cdot\hat{X}(t)=\\ =\left[A(t)\otimes B^T(t)-E_{mn\times mn}\right]\cdot\hat{X}(t)=\underset{mn\times mn}{D(t)}\cdot\underset{mn\times 1}{\hat{X}(t)}=\underset{mn\times 1}{\hat{C}(t)},\end{gathered} \qquad (4)$$

где символ $\otimes$ - знак кронекерова произведения матриц, а гипервекторы

$$\hat{X}(t)=(x_{11}(t),...,x_{1n}(t)\vdots\cdots\vdots x_{m1}(t),\cdots,x_{mn}(t))^T, \qquad (5)$$

$$\hat{C}(t)=(c_{11}(t),...,c_{1n}(t)\vdots\cdots\vdots c_{m1}(t),\cdots,c_{mn}(t))^T. \qquad (6)$$

Следовательно, предполагая, что

$$rang D(t)=mn, \qquad (7)$$

из (4) получим

$$\hat{X}(t)=D^{-1}(t)\cdot\hat{C}(t). \qquad (8)$$

Далее, в соответствии с (8) легко получить решение в виде (2).

Последовательный численно-аналитический метод решения. Теперь допустим, что для матриц $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и $X(t)$ с аналитическими элементами имеют место дифференциальные преобразования [5,6]:

$$A(K)=\frac{H^k}{K!}\cdot\frac{d^kA(t)}{dt^k}\Big|_{t=t_\nu},\quad K=\overline{0,\infty}\;\risingdotseq\; A(t)=\chi_1(t,t_\nu,H,A(K),\;K=\overline{0,\infty}), \qquad (9)$$

$$B(K)=\frac{H^k}{K!}\cdot\frac{d^kB(t)}{dt^k}\Big|_{t=t_\nu},\quad K=\overline{0,\infty}\;\risingdotseq\; B(t)=\chi_2(t,t_\nu,H,B(K),\;K=\overline{0,\infty}), \qquad (10)$$

$$C(K)=\frac{H^k}{K!}\cdot\frac{d^kC(t)}{dt^k}\Big|_{t=t_\nu},\quad K=\overline{0,\infty}\;\risingdotseq\; C(t)=\chi_3(t,t_\nu,H,C(K),\;K=\overline{0,\infty}), \qquad (11)$$

$$X(K)=\frac{H^k}{K!}\cdot\frac{d^kX(t)}{dt^k}\Big|_{t=t_\nu},\quad K=\overline{0,\infty}\;\risingdotseq\; X(t)=\chi_4(t,t_\nu,H,X(K),\;K=\overline{0,\infty}), \qquad (12)$$

где $A(K)$, $B(K)$, $C(K)$ и $X(K)$ - матричные дискреты матриц $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и $X(t)$ соответственно с размерами $m\times m$, $n\times n$, $m\times n$ *и* $m\times n$; $K=\overline{0,\infty}$ – целочисленный аргумент; H – масштабный коэффициент; t_ν – центр аппроксимации; символ $\risingdotseq$ – знак перехода из области оригиналов в область дифференциальных изображений и наоборот; $\chi_1(\cdot)-\chi_4(\cdot)$ – некоторые аппроксимирующие функции, восстанавливающие оригиналы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и $X(t)$ соответственно. Тогда с учетом правил алгебры дифференциальных преобразований (см. [5], стр.72, формула

(4.7)) при переводе (4) из области оригиналов в область дифференциальных изображений получим:

при K=0:

$$\left[A(0)\otimes B^T(0)-E_{m\times m}\otimes E^T{}_{n\times n}\right]\cdot \hat{X}(0)=\left[A(0)\otimes B^T(0)-E_{mn\times mn}\right]\cdot \hat{X}(0)= \\ =D(0,0)\cdot \hat{X}(0)=\hat{C}(0), \tag{13}$$

откуда, предполагая, что

$$rang D(0,0)=mn, \tag{14}$$

из (13) имеем

$$\hat{X}(0)=D^{-1}(0,0)\cdot \hat{C}(0), \tag{15}$$

где гипервекторы дискрет:

$$\hat{X}(0)=(x_{11}(0),...,x_{1n}(0)\vdots\cdots\vdots x_{m1}(0),\cdots,x_{mn}(0))^T,$$

$$\hat{C}(0)=(c_{11}(0),...,c_{1n}(0)\vdots\cdots\vdots c_{m1}(0),\cdots,c_{mn}(0))^T;$$

при K=1:

$$\left[A(1)\otimes B^T(0)+A(0)\otimes B^T(1)\right]\cdot \hat{X}(0)+\left[A(0)\otimes B^T(0)-E_{mn\times mn}\right]\cdot \hat{X}(1)= \\ =D(1,0;0,1)\cdot \hat{X}(0)+D(0,0)\cdot \hat{X}(1)=\hat{C}(1), \tag{16}$$

откуда

$$\hat{X}(1)=\overset{-1}{D}(0,0)\cdot\left[\hat{C}(1)-D(1,0;0,1)\cdot \hat{X}(0)\right], \tag{17}$$

где гипервекторы дискрет:

$$\hat{X}(1)=(x_{11}(1),...,x_{1n}(1)\vdots\cdots\vdots x_{m1}(1),\cdots,x_{mn}(1))^T,$$

$$\hat{C}(1)=(c_{11}(1),...,c_{1n}(1)\vdots\cdots\vdots c_{m1}(1),\cdots,c_{mn}(1))^T;$$

при K=2:

$$\left[A(2)\otimes B^T(0)+A(1)\otimes B^T(1)+A(0)\otimes B^T(2)\right]\cdot \hat{X}(0)+ \\ +\left[A(1)\otimes B^T(0)+A(0)\otimes B^T(1)\right]\cdot \hat{X}(1)+\left[A(0)\otimes B^T(0)-E_{mn\times mn}\right]\cdot \hat{X}(2)= \\ =D(2,0;1,1;0,2)\cdot \hat{X}(0)+D(1,0;0,1)\cdot \hat{X}(1)+D(0,0)\cdot \hat{X}(2)=\hat{C}(2), \tag{18}$$

откуда

$$\hat{X}(2)=D^{-1}(0,0)\cdot\left[\hat{C}(2)-D(2,0;1,1;0,2)\cdot \hat{X}(0)-D(1,0;0,1)\cdot \hat{X}(1)\right], \tag{19}$$

где гипервекторы дискрет:

$$\hat{X}(2)=(x_{11}(2),...,x_{1n}(2)\vdots\cdots\vdots x_{m1}(2),\cdots,x_{mn}(2))^T,$$

$$\hat{C}(2)=(c_{11}(2),...,c_{1n}(2)\vdots\cdots\vdots c_{m1}(2),\cdots,c_{mn}(2))^T;$$

при K=K:

$$\begin{aligned}
&\left[A(K)\otimes B^T(0)+A(K-1)\otimes B^T(1)+\ldots+A(1)\otimes B^T(K-1)+A(0)\otimes B^T(K)\right]\cdot\hat{X}(0)+\\
&+\left[A(K-1)\otimes B^T(0)+A(K-2)\otimes B^T(1)+\ldots+A(1)\otimes B^T(K-2)+A(0)\otimes B^T(K-1)\right]\times\\
&\times\hat{X}(1)+\ldots+\left[A(1)\otimes B^T(0)+A(0)\otimes B^T(1)\right]\cdot\hat{X}(K-1)+\left[A(0)\otimes B^T(0)-E_{mn\times mn}\right]\times\\
&\times\hat{X}(K)=D(K,0;K-1,1;\ldots;1,K-1;0,K)\cdot\hat{X}(0)+D(K-1,0;K-2,1;\ldots;1,K-2;0,K-1)\times\\
&\times\hat{X}(1)+\ldots+D(1,0;0,1)\cdot\hat{X}(K-1)+D(0,0)\cdot\hat{X}(K)=\hat{C}(K),
\end{aligned}\tag{20}$$

откуда

$$\hat{X}(K)=D^{-1}(0,0)\cdot\left[\hat{C}(K)-\sum_{l=1}^{K}D(\ell,0;\ \ell-1,1;\ldots;1,\ \ell-1;\ 0,\ell)\cdot\hat{X}(K-\ell)\right],\tag{21}$$

где

$$\begin{aligned}
D(\ell,0;\ \ell-1,1;\ldots;1,\ \ell-1;\ 0,\ell)&=\sum_{\ell=0}^{K}A(\ell)\otimes B^T(K-\ell)=\\
&=\sum_{\ell=0}^{K}A(K-\ell)\otimes B^T(\ell),\ \forall\ell=\overline{1,K},
\end{aligned}\tag{22}$$

а гипервекторы дискрет:

$$\hat{X}(K)=(x_{11}(K),\ldots,x_{1n}(K)\vdots\cdots\vdots x_{m1}(K),\cdots,x_{mn}(K))^T,$$
$$\hat{C}(K)=(c_{11}(K),\ldots,c_{1n}(K)\vdots\cdots\vdots c_{m1}(K),\cdots,c_{mn}(K))^T.$$

Таким образом, имея гипервекторы дискрет (15), (17), (19) и (21), их легко можно трансформировать в матричные дискреты:

$$X(K)=\begin{bmatrix}x_{11}(K)\ldots x_{1n}(K)\\ x_{21}(K)\ldots x_{2n}(K)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_{m1}(K)\ldots x_{mn}(K)\end{bmatrix},\quad K=\overline{0,\infty}\tag{23}$$

и в соответствии с (12) восстановить неизвестное решение задачи - оригинал $X(t)$.

Параллельный численно-аналитический метод решения. Объединение рекуррентных гипервекторных соотношений (15), (17), (19) и (21) приводит к следующему гиперматрично-гипервекторному представлению:

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c}
D(0,0) & 0 & 0 & \ldots & 0\\ \hline
D(1,0;0,1) & D(0,0) & 0 & \ldots & 0\\ \hline
D(2,0;1,1;0,2) & D(1,0;0,1) & D(0,0) & \ldots & 0\\ \hline
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \hline
D(K,0;K-1,1;\ldots;1,K-1;0,K) & D(K-1,0;\ldots;0,K-1) & \ldots & \ldots & D(0,0)
\end{array}\right]\times$$

$$\times \begin{pmatrix} \hat{X}(0) \\ \hline \hat{X}(1) \\ \hline \hat{X}(2) \\ \hline \vdots \\ \hline \hat{X}(K) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{C}(0) \\ \hline \hat{C}(1) \\ \hline \hat{C}(2) \\ \hline \vdots \\ \hline \hat{C}(K) \end{pmatrix} \tag{24}$$

или

$$D(\bullet) \cdot \hat{X}(\bullet) = \hat{C}(\bullet), \tag{25}$$

откуда с учетом условия (14), а следовательно, и условия

$$rangD(\bullet) = (K+1) \cdot m \cdot n \tag{26}$$

из (25) получим

$$\hat{X}(\bullet) = D^{-1}(\bullet) \cdot \hat{C}(\bullet) \tag{27}$$

или

$$\begin{pmatrix} \hat{X}(0) \\ \hline \hat{X}(1) \\ \hline \hat{X}(2) \\ \hline \vdots \\ \hline \hat{X}(K) \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} D_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline D_1 & D_0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline D_2 & D_1 & D_0 & \dots & 0 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ \hline D_K & D_{k-1} & D_{k-2} & \dots & D_0 \end{array} \right] \cdot \begin{pmatrix} \hat{C}(0) \\ \hline \hat{C}(1) \\ \hline \hat{C}(2) \\ \hline \vdots \\ \hline \hat{C}(K) \end{pmatrix}, \tag{28}$$

где с учетом приведенных в [6] результатов блоки - гиперматрицы

$$\begin{cases} D_0 = D^{-1}(0,0) = D^{-1}(0,0) \cdot E = D^{-1}(0,0) \cdot \overline{D}_0, \\ D_1 = -D^{-1}(0,0) \cdot [D(1,0;0,1) \cdot D^{-1}(0,0)] = D^{-1}(0,0) \cdot \overline{D}_1, \\ D_2 = -D^{-1}(0,0) \cdot [D(2,0;1,1;0,2) \cdot D^{-1}(0,0) - (D(1,0;0,1) \cdot D^{-1}(0,0))^2] = \\ \qquad\qquad = D^{-1}(0,0) \cdot \overline{D}_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ D_K = -D^{-1}(0,0) \cdot \sum\limits_{r=1}^{K} D(r,0;r-1,1;\dots;1,r-1;0,r) \cdot D_{k-r} = D^{-1}(0,0) \cdot \overline{D}_k. \end{cases} \tag{29}$$

И, наконец, имея гипервектор (27) или (28), в соответствии с обратным дифференциальным преобразованием (12) можно восстановить решение $X(t)$.

Модельный пример. Рассмотрим однопараметрическое матричное уравнение типа Стейна:

$$\begin{bmatrix} 1 & jt & (1+j) \\ t & 0 & 1 \\ j & -t & j \end{bmatrix} \cdot X(t) \cdot \begin{bmatrix} jt & -1 \\ -t & 0 \end{bmatrix} - X(t) = \begin{bmatrix} jt^2 - 2jt - t^3 & (-j-t-jt) \\ (-t^3 + jt^3 + 1) & (-j-2t-jt^2) \\ (jt^2 - t^2) & (-jt + jt^2) \end{bmatrix}.$$

Очевидно, при $t_v = 0, H = 1$ имеем следующие матричные дискреты:

$$A(0)=\begin{bmatrix}1 & 0 & (1+j)\\ 0 & 0 & 1\\ j & 0 & j\end{bmatrix},\ A(1)=\begin{bmatrix}0 & j & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}, A(K)=[0],\, K\ge 2;$$

$$B(0)=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix};\ B(1)=\begin{bmatrix}j & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix}; B(K)=[0],\, K\ge 2;$$

$$C(0)=\begin{bmatrix}0 & -j\\ 1 & -j\\ 0 & 0\end{bmatrix}; C(1)=\begin{bmatrix}-2j & (-1-j)\\ 0 & -2\\ 0 & -j\end{bmatrix}; C(2)=\begin{bmatrix}j & 0\\ 0 & -j\\ (j-1) & j\end{bmatrix}; C(3)=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ (-1+j) & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix};$$

$$C(K)=[0],\, K\ge 4;$$

а) Применение последовательного численно-аналитического метода решения.

Имеем:

<u>при K=0:</u>

$$D(0,0)=\underset{3\times 3}{A(0)}\otimes \underset{2\times 2}{B^T(0)}-E_{3\times 3}\otimes E_{2\times 2}=\left[\begin{array}{cc:cc:cc}-1 & 0 & \multicolumn{2}{c:}{\mathbf{0}} & 0 & 0\\ -1 & -1 & & & (-1-j) & 0\\ \hdashline \multicolumn{2}{c:}{\mathbf{0}} & -1 & 0 & 0 & 0\\ & & 0 & -1 & -1 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & \multicolumn{2}{c:}{\mathbf{0}} & -1 & 0\\ -j & 0 & & & -j & -1\end{array}\right],$$

$$D^{-1}(0,0)=\left[\begin{array}{cc:cc:cc}-1 & 0 & \multicolumn{2}{c:}{\mathbf{0}} & 0 & 0\\ 1 & -1 & & & (1+j) & 0\\ \hdashline \multicolumn{2}{c:}{\mathbf{0}} & -1 & 0 & 0 & 0\\ & & 0 & -1 & 1 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & \multicolumn{2}{c:}{\mathbf{0}} & -1 & 0\\ j & 0 & & & j & -1\end{array}\right],$$

$$\hat{X}(0)=D^{-1}(0,0)\cdot\hat{C}(0)=\begin{pmatrix}0\\ j\\ \hline -1\\ j\\ \hline 0\\ 0\end{pmatrix},\quad X(0)=\begin{bmatrix}0 & j\\ -1 & j\\ 0 & 0\end{bmatrix};$$

*<u>при K=1</u>***:**

$$D(1,0;0,1)=A(1)\otimes B^T(0)+A(0)\otimes B^T(1)=\left[\begin{array}{cc|cc|cc} j & -1 & 0 & 0 & (-1+j) & (-1-j) \\ 0 & 0 & -j & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & j & -1 \\ -1 & 0 & & & 0 & 0 \\ \hline -1 & -j & 0 & 0 & -1 & -j \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$\hat{X}(1)=D^{-1}(0,0)\cdot\left[\hat{C}(1)-D(1,0;0,1)\cdot\hat{X}(0)\right]=$$

$$=D^{-1}(0,0)\cdot\left[\left(\begin{array}{c} -2j \\ (-1-j) \\ \hline 0 \\ -2 \\ \hline 0 \\ -j \end{array}\right)-\left(\begin{array}{c} -j \\ j \\ \hline 0 \\ 0 \\ \hline 1 \\ -1 \end{array}\right)\right]=\left(\begin{array}{c} j \\ 0 \\ \hline 0 \\ 1 \\ \hline 1 \\ 0 \end{array}\right), \qquad X(1)=\begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

<u>*при K=2:*</u>

$$D(2,0;1,1;0,2)=\cancelto{0}{A(2)}\otimes B^T(0)+A(1)\otimes B^T(1)+\cancelto{0}{A(0)}\otimes B^T$$

$$(2)=\left[\begin{array}{cc|cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & -1 & -j & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ & & 0 & 0 & & \\ \hline j & -1 & \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ 0 & 0 & & & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & -j & 1 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ & & 0 & 0 & & \end{array}\right],$$

$$\hat{X}(2)=D^{-1}(0,0)\cdot\left[\hat{C}(2)-D(2,0;1,1;0,2)\cdot\hat{X}(0)-D(1,0;0,1)\cdot\hat{X}(1)\right]=$$

$$=D^{-1}(0,0)\cdot\left[\left(\begin{array}{c} j \\ 0 \\ \hline 0 \\ -j \\ \hline (-1+j) \\ j \end{array}\right)-\left(\begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ \hline -j \\ 0 \\ \hline 2j \\ 0 \end{array}\right)-\left(\begin{array}{c} (-2+j) \\ 0 \\ \hline j \\ -j \\ \hline (-1-j) \\ 0 \end{array}\right)\right]=D^{-1}(0,0)\cdot\left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ j \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ -j \end{array}\right),$$

$$X(2)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix};$$

<u>*при K=3*</u>**:**

$$D(3,0;2,1;1,2;0,3)=\cancelto{0}{A(3)}\otimes B^T(0)+\cancelto{0}{A(2)}\otimes B^T(1)+\cancelto{0}{A(1)}\otimes B^T(2)+\cancelto{0}{A(0)}\otimes B^T(3)=[0],$$

$$\hat X(3)=D^{-1}(0,0)\cdot[\hat C(3)-\cancelto{0}{D(3,0;2,1;1,2;0,3)\cdot\hat X(0)}-D(2,0;1,1;0,2)\cdot\hat X(1)-$$

$$-D(1,0;0,1)\cdot\hat X(2)]=D^{-1}(0,0)\cdot\left[\left(\begin{array}{c}-1\\0\\\hline(-1+j)\\0\\\hline 0\\0\end{array}\right)-\left(\begin{array}{c}-j\\0\\\hline -1\\0\\\hline 1\\0\end{array}\right)-\left(\begin{array}{c}(-1+j)\\0\\\hline j\\0\\\hline -1\\0\end{array}\right)\right]=\left(\begin{array}{c}0\\0\\\hline 0\\0\\\hline 0\\0\end{array}\right),$$

$$X(3)=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что такая же картина имеет место и при $K\ge 4$, т.е.

$$X(K)=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix},\ \forall K\ge 4.$$

Следовательно, маклореновское решение задачи выглядит так:

$$X(t)=\begin{bmatrix}0&j\\-1&j\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}j&0\\0&1\\1&0\end{bmatrix}\cdot t+\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&-j\end{bmatrix}\cdot t^2=\begin{bmatrix}jt&j\\-1&(j+t)\\t&-jt^2\end{bmatrix},$$

в точности которой также нетрудно убедиться.

б) Применение параллельного численно-аналитического метода решения.

С учетом (24) при $D(0,0),D(1,0;0,1),D(2,0;1,1;0,2)$ и $D(3,0;2,1;1,2;0,3)$ в соответствии с (29) имеем

$$D_0=\left[\begin{array}{cc|cc|cc}-1&0&\multicolumn{2}{c|}{\mathbf{0}}&0&0\\-1&-1&&&(-1-j)&0\\\hline\multicolumn{2}{c|}{\mathbf{0}}&-1&0&0&0\\&&0&-1&-1&0\\\hline 0&0&\multicolumn{2}{c|}{\mathbf{0}}&-1&0\\-j&0&&&-j&-1\end{array}\right],$$

$$D_1=\left[\begin{array}{cc|cc|cc}-2j&1&0&0&(-1-3j)&(1+j)\\(-3+j)&-j&j&0&(-5+j)&-2j\\\hline -j&0&\multicolumn{2}{c|}{\mathbf{0}}&-2j&1\\(-1+j)&-j&&&(-3+j)&-j\\\hline(2-j)&j&0&0&(3-j)&j\\(-3-2j)&(1-j)&-1&0&(-4-4j)&(2-j)\end{array}\right],$$

$$D_2 = \left[\begin{array}{cc:cc:cc} (5+7j) & (-3+j) & 2 & j & (6+11j) & (-5+j) \\ (6-13j) & (4+4j) & (-1-3j) & 1 & (11-18j) & (5+6j) \\ \hdashline (3+3j) & (-1+j) & 1 & 0 & (4+6j) & (-3+j) \\ (3-7j) & (2+2j) & (-1-2j) & 1 & (5-10j) & (3+3j) \\ \hdashline (-3+9j) & (-3-2j) & (1+2j) & -1 & (-6+13j) & (-4-4j) \\ (16-3j) & (-1+6j) & (2-3j) & (1+j) & (24-2j) & (-2+9j) \end{array}\right],$$

$$D_3 = \left[\begin{array}{cc:cc:cc} (-37-5j) & (6-13j) & (-7+5j) & (-1-3j) & (-54-12j) & (11-18j) \\ (23+59j) & (-24+j) & (13+6j) & (-4+4j) & (27+91j) & (-36-j) \\ \hdashline (-20-j) & (3-7j) & (-4+3j) & (-1-2j) & (-29-4j) & (5-10j) \\ (15+30j) & (-13+2j) & (7+3j) & (-2+2j) & (19+47j) & (-19+j) \\ \hdashline (-20-37j) & (16-3j) & (-9-3j) & (2-3j) & (-25-58j) & (24-2j) \\ (-39+60j) & (-17-21j) & (3+16j) & (-6-j) & (-66+85j) & (-23-34j) \end{array}\right],$$

а в соответствии с (28) с учетом $\hat{C}(0), \hat{C}(1), \hat{C}(2)\ и\ \hat{C}(3)$ при последних гиперматрицах D_0, D_1, D_2 и D_3 получаем точные значения матричных дискрет $X(0)$, $X(1)$, $X(2)$ и $X(3)$, приведенных выше при применении последовательного численно-аналитического метода решения. Естественно, при этих матричных дискретах будет получено и точное решение $X(t)$.

Замечание 1. Известно [3, стр.92, формула (12.10)], что числовое матричное уравнение Стейна с матрицами A и B однозначно разрешимо для ее любой правой части C, если

$$\lambda_i(A) \cdot \lambda_j(B) \neq 1, \ \forall i.j, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}, \tag{30}$$

где $\lambda_i(A)\ и\ \lambda_j(B)$ - собственные числа матриц $A(t)$ и $B(t)$ соответственно.

Эти условия применительно к функциональному уравнению (1) будут выглядеть так:

$$\lambda_i(A(t)) \cdot \lambda_j(B(t)) \neq 1, \ \forall i.j, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}, \tag{31}$$

где $\lambda_i(A(t))$ и $\lambda_j(B(t))$ - собственные функции матриц $A(t)$ и $B(t)$ соответственно.

С другой стороны, имея в виду числовые матрично-векторные уравнения (13), (16), (18) и (20), можно заключить, что условием однозначной разрешимости этих рекуррентных матрично-векторных уравнений является невырожденность матрицы $D(0,0)$, т.е. существование матрицы $D^{-1}(0,0)$. Следовательно, при решении конкретных задач последовательным численно-аналитическим методом вместо использования условий (30), проверка которых обычно связана с большими вычислительными трудностями из-за необходимости определения собственных чисел $\lambda_i(A)\ и\ \lambda_j(B), \ \forall i, j,$ $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n},$ можно воспользоваться одним единственным условием –

условием проверки невырожденности матрицы *D(0,0)*. Это условие, естественно, может быть использовано и для проверки условия однозначной разрешимости задачи при реализации параллельной схемы (28), ибо из условия (14) немедленно следует и выполнение условия (26). Что же касается проверки однозначной разрешимости однопараметрического матричного уравнения (1), то при этом вместо проверки труднореализуемых условий (31), обычно связанных с вычислительными затруднениями из-за немногочисленности соответствующих вычислительных методов по определению собственных функций $\lambda_i(A(t))$ и $\lambda_j(B(t)), \forall i.j, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n},$ функциональных матриц *A(t)* и *B(t)* соответственно (см., в частности, [6]), можно воспользоваться аналогичным единст-венным однопараметрическим условием (7), к сожалению, также трудно поддающимся проверке.

Замечание 2. При невыполнении условия (31) фактически нарушается условие однозначной разрешимости исходной задачи. При этом, естественно, нарушаются и условие (7) при аналитическом методе, условие (14) - при последовательном численно-аналитическом методе, а также условие (26) - при параллельном численно-аналитическом методе. Естественно, имеет место и обратное утверждение, т.е. из нарушения одного из условий (7), (14) или (26) немедленно следует и нарушение условия (31) об однозначной разрешимости исходной задачи.

Заключение. Таким образом, решение однопараметрических уравнений типа Стейна $A(t)\cdot X(t)\cdot B(t)+X(t)=C(t)$ с аналитическими элементами на основе использования прямых дифференциальных преобразований сводится к рекуррентным численным процедурам при разработанном последовательном численно-аналитическом методе и к поточной численной процедуре при разработанном параллельном численно-аналитическом методе. В обоих случаях восстановление оригиналов-решений осуществляется на основе использования обратных дифференциальных преобразований, что не представляет особых вычислительных затруднений. Что касается аналитического метода, то он представляет, скорее всего, теоретический интерес ввиду его достаточно сильной ограниченности в практическом плане.

И, наконец, заметим, что предложенные численно-аналитические методы могут быть эффективно реализованы средствами современных информационных технологий [7,8].

Литература

1. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. - М.: Наука. 2010. – 560 с.
2. **Ланкастер П.** Теория матриц.- М.: Наука, 1978. – 280 с.
3. **Икрамов Х.Д.** Численное решение матричных уравнений.- М.: Наука, 1984. – 190 с.
4. **Мамонов С.С.** Решение матричных уравнений // Вестник Ряз. гос. ун.-та. им. С.А. Есенина. - Рязань, 2009.- Вып. 21, №1. – С. 115 - 136.

5. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования функций и уравнений. - Киев: Наукова думка, 1984.- 420 с.
6. **Симонян С.О., Аветисян А.Г.** Прикладная теория дифференциальных преобразований. - Ереван: Изд-во ГИУА “Чартарагет”, 2010.- 361с.
7. **Метьюз Дж. Г., Финк К.Д.** Численные методы. Использование MATLAB.- М.: СПб., Киев, 2001.- 713 с.
8. **Straustrup B.** The C^{++} Programming Language. 4^{th} edition.- Boston: Addison-Weslay Professional, 2013. -1368 p.

Поступила в редакцию 10.06.2015.
Принята к опубликованию 25.11.2015.

ՍՏԵՅՆԻ ՏԻՊԻ $A(t) \cdot X(t) \cdot B(t) - X(t) = C(t)$ ՄԻԱՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ս.Հ. Սիմոնյան

Առաջարկվել են Ստեյնի տիպի միապարամետրական մատրիցային հավասարումների լուծման երեք եղանակներ՝ անալիտիկ եղանակը, որը հարմար է փոքր չափերով և միապարամետրական մատրիցների հասարակ տարրերով խնդիրների լուծման համար, հաջորդական և զուգահեռ թվա-անալիտիկ եղանակները, որոնք հիմնված են Գ.Ե. Պուխովի դիֆերենցիալ ձևափոխությունների վրա և հարմար են ընդհանուր դեպքում և այդ մատրիցների՝ մոտարկման կենտրոններում առկա անալիտիկ տարրերի դեպքում: Ստացվել են այդ հավասարումների միարժեքորեն լուծելիության պայմանները բոլոր երեք մեթոդների դեպքում: Դիտարկվել է մոդելային օրինակ, որի լուծման նպատակով օգտագործվել են հաջորդական և զուգահեռ թվա-անալիտիկ եղանակները, որոնց դեպքում ստացվել է խնդրի ճշգրիտ մակլորենյան լուծումը:

Առանցքային բառեր. Ստեյնի տիպի միապարամետրական մատրիցային հավասարում, լուծման անալիտիկ եղանակ, դիֆերենցիալ ձևափոխություններ, հաջորդական և զուգահեռ թվա-անալիտիկ լուծման եղանակներ, միարժեքորեն լուծելիության պայմաններ, մոդելային օրինակ:

THE SOLUTION OF ONE-PARAMETRIC STEIN-TYPE MATRIX EQUATIONS $A(t) \cdot X(t) \cdot B(t) - X(t) = C(t)$

S.H. Simonyan

Three methods for solving one-parametric implicit discrete matrix Stein-type equations are proposed: analytical method suitable for the problems with small dimensions at simple elements of one-parametric matrices; successive, and parallel numerical-analytical methods based on the Pukhov’s differential transformations and suitable in the general case at analytical elements of these matrices in the approximation centre. The conditions of unambiguous solvability of these equations for all three methods are obtained. A model example is considered for whose solution, successive and parallel nuerical-analytical methods at which an accurate Mackloren solution of the problem is obtained.

Keywords: one parametric implicit discrete matrix Stein-type equation, analytical method of solution, differential transformations, successive and parallel numerical-analytical methods of solution, conditions of unambiguous solvability, model example.