УДК 621.52 +511.52

МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОБОБЩЕННЫХ ОБРАТНЫХ МАТРИЦ МУРА–ПЕНРОУЗА

С.О. Симонян[1], Г.В. Адамян[1], А.С. Симонян[2], Л.В. Празян [1]

[1] *Государственный инженерный университет Армении (Политехник)*
[2] *Иджеванский филиал ЕГУ, Иджеван, Армения*

Предложены аналитические и численно–аналитические методы определения комплексных однопараметрических обобщенных обратных матриц Мура–Пенроуза. Рассмотрен модельный пример.

Ключевые слова: комплексная однопараметрическая матрица, обобщенная обратная матрица, аналитическое решение, дифференциальные преобразования, численно–аналитическое решение.

Введение. Для определения однопараметрических обобщенных обратных матриц $X(t)=A^{+}(t) \in R^{nxm}$ Мура–Пенроуза [1,2] при однопараметрических матрицах $A(t) \in R^{mxn}$ (параметр t может быть временем, оператором Лапласа ($S\sim\frac{d}{dt}$) или другим параметром) на основе дифференциальных преобразований Пухова [3] в работе [4] был предложен дифференциальный аналог (Д–аналог) простейшего метода с двумя разновидностями (явные последовательные рекуррентные вычислительные схемы), а в работе [5] – матрично–векторные представления этих схем (параллельные вычислительные схемы). В настоящей работе рассматриваются комплексные однопараметрические матрицы $A(t) \in C^{mxn}$ и соответствующие аналитические, а также численно–аналитические вычислительные схемы определения однопараметрических обобщенных обратных матриц Мура-Пенроуза, удовлетворяющих условиям

$$A(t)\cdot X(t)\cdot A(t)=A(t)\,, \tag{1}$$

$$X(t)\cdot A(t)\cdot X(t)=X(t), \tag{2}$$

$$[A(t)\cdot X(t)]^{*} = A(t)\cdot X(t) \tag{3}$$

$$[X(t)\cdot A(t)]^{*} = X(t)\cdot A(t), \tag{4}$$

где символ $*$ − знак комплексного сопряжения.

Итак, комплексную однопараметрическую матрицу $A(t)_{mxn}$ представим в виде

$$A(t)_{mxn} = B(t)_{mxn} + j\cdot C(t)_{mxn}\,, \tag{5}$$

а соответствующую ей обобщенную обратную матрицу - в виде

$$X(t)_{nxm} = A^{+}(t)_{nxm} = G(t)_{nxm} + j \cdot H(t)_{nxm}\,, \qquad (6)$$

где $B(t)$ и $G(t)$ – матрицы действительных частей; $C(t)$ и $H(t)$ – матрицы мнимых частей матриц $A(t)$ и $X(t)$ соответственно; $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Пусть существуют дифференциальные преобразования однопараметрических матриц $B(t)$, $C(t)$ и $G(t)$, $H(t)$, т.е.

$$B(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{\partial^K B(t)}{\partial t^K}\Big|_{t=t_v},\ K = \overline{0,\infty} \;\dot{-}\; B(t) = \mathcal{H}_1\left(t, t_v, H, B(K), K = \overline{0,\infty}\right), \qquad (7)$$

$$C(K) = \frac{H^k}{K!} \cdot \frac{\partial^K C(t)}{\partial t^K}\Big|_{t=t_v},\ K = \overline{0,\infty} \;\dot{-}\; C(t) = \mathcal{H}_2\left(t, t_v, H, C(K), K = \overline{0,\infty}\right), \qquad (8)$$

$$G(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{\partial^K G(t)}{\partial t^K}\Big|_{t=t_v},\ K = \overline{0,\infty} \;\dot{-}\; G(t) = \mathcal{H}_3\left(t, t_v, H, G(K), K = \overline{0,\infty}\right), \qquad (9)$$

$$H(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{\partial^K H(t)}{\partial t^K}\Big|_{t=t_v},\ K = \overline{0,\infty} \;\dot{-}\; H(t) = \mathcal{H}_4\left(t, t_v, H, H(K), K = \overline{0,\infty}\right), \qquad (10)$$

где левые части – прямые преобразования; правые части – обратные преобразования; $K = \overline{0,\infty}$ - целочисленный аргумент; $B(K)$, $C(K)$ и $G(K)$,$H(K)$, $K = \overline{0,\infty}$ - матричные дискреты матричных оригиналов $B(t)$, $C(t)$ и $G(t)$, $H(t)$ соответственно с размерами mxn; t_v – центр аппроксимации; $\mathcal{H}_1(\cdot), \mathcal{H}_2(\cdot)$ и $\mathcal{H}_3(\cdot), \mathcal{H}_4(\cdot)$ – матричные функции, восстанавливающие оригиналы-матрицы $B(t)$, $C(t)$ и $G(t)$, $H(t)$ соответственно; символ $\dot{-}$ - знак перехода из области оригиналов в область D – изображений и наоборот [3].

Математический аппарат. Воспользуемся подходом, предложенным в [4]. Представим аналитические и численно–аналитические решения рассматриваемой задачи.

<u>Аналитическое решение (1– й вариант)</u>. Потребуем, чтобы имело место простейшее условие

$$A(t) \cdot X(t) = E_{mxm} \qquad (11)$$

или с учетом (5) и (6):

$$[\,B(t) + j \cdot C(t)] \cdot [\,G(t) + j \cdot H(t)] = [B(t) \cdot G(t) - C(t) \cdot H(t)] + j \cdot [C(t) \cdot G(t) + B(t) \cdot H(t)] = E_{mxm} + j \cdot [0]_{mxm}\,. \qquad (12)$$

Из (12), очевидно, получим следующую систему матричных уравнений с подлежащими определению неизвестными матрицами $G(t)$ и $H(t)$:

$$\begin{cases} B(t) \cdot G(t) - C(t) \cdot H(t) = E_{mxm}\,, \\ C(t) \cdot G(t) + B(t) \cdot H(t) = [0]_{mxm} \end{cases} \qquad (13)$$

или в матрично–блочно–столбцевом представлении:

$$\left[\begin{array}{c:c} B(t) & -C(t) \\ \hdashline C(t) & B(t) \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} G(t) \\ \hdashline H(t) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} E \\ \hdashline 0 \end{array}\right]. \qquad (14)$$

Из (14), естественно, имеем аналитическое решение

$$\left[\begin{array}{c} G(t) \\ \hdashline H(t) \end{array}\right]_{2nxm} = \left[\begin{array}{c:c} B(t) & -C(t) \\ \hdashline C(t) & B(t) \end{array}\right]^{+}_{2nx2m} \cdot \left[\begin{array}{c} E \\ \hdashline 0 \end{array}\right]_{2mxm}. \qquad (15)$$

<u>Аналитическое решение (2 –й вариант)</u> . Потребуем, чтобы имело место простейшее условие

$$X(t) \cdot A(t) = E_{nxn} \tag{16}$$

или, с учетом (5) и (6):

$$[\, G(t) + j \cdot H(t)] \cdot [\, B(t) + j \cdot C(t)] = [G(t) \cdot B(t) - H(t) \cdot C(t)] + j \cdot [\, G(t) \cdot C(t) + + H(t) \cdot B(t)] = E_{nxn} + j \cdot [0]_{nxn} \,. \tag{17}$$

Аналогично из (17) получим следующую систему матричных уравнений с подлежащими определению неизвестными матрицами $G(t)$ и $H(t)$:

$$\begin{cases} G(t) \cdot B(t) - H(t) \cdot C(t) = E_{nxn}\,, \\ G(t) \cdot C(t) + H(t) \cdot B(t) = [0]_{nxn} \end{cases} \tag{18}$$

или в матрично–блочно–строчном представлении:

$$[G(t) \,\vdots\, H(t)] \cdot \left[\begin{array}{c:c} B(t) & C(t) \\ \hdashline -C(t) & B(t) \end{array}\right] = [E \,\vdots\, 0]\,. \tag{19}$$

Отсюда имеем аналитическое решение

$$[G(t) \,\vdots\, H(t)]_{nx2m} = [E \,\vdots\, 0]_{nx2n} \cdot \left[\begin{array}{c:c} B(t) & C(t) \\ \hdashline -C(t) & B(t) \end{array}\right]^{+}_{2nx2m}. \tag{20}$$

Замечание 1. Нахождение матриц $G(t)$ и $H(t)$ в соответствии с аналитическими решениями (15) и (20) и, следовательно, неизвестной обобщенной обратной матрицы $X(t)$ практически возможно при весьма малых размерах матрицы $A(t)$ и ее простых элементах из–за вычислительных трудностей нахождения функциональных псевдообратных матриц, входящих в соотношения (15) и (20). Ввиду этого обстоятельства, оказывается, в общем случае намного целесообразнее использование численно–аналитических вычислительных схем определения $X(t)$ на основе дифференциальных преобразований [3], на которых и остановимся далее.

<u>Численно–аналитическое решение (1 –й вариант).</u> Систему матричных уравнений (13) из области оригиналов переведем в область дифференциальных изображений. Получим:

<u>при $K = 0$:</u>

$$\begin{cases} B(0) \cdot G(0) - C(0) \cdot H(0) = E_{mxm} \cdot \delta(0), \\ C(0) \cdot G(0) + B(0) \cdot H(0) = [0]_{mxm}, \end{cases} \tag{21}$$

где $\delta(0) = 1$, если $K = 0$; $\delta(K) = 0$, если $K \geq 1$ – тейлоровская единица [3]. Отсюда имеем

$$\left[\begin{array}{c:c} B(0) & -C(0) \\ \hdashline C(0) & B(0) \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} G(0) \\ \hdashline H(0) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} E \\ \hdashline 0 \end{array}\right],$$

откуда

$$\left[\begin{array}{c} G(0) \\ \hdashline H(0) \end{array}\right]_{2nxm} = \left[\begin{array}{c:c} B(0) & -C(0) \\ \hdashline C(0) & B(0) \end{array}\right]^{+}_{2nx2m} \cdot \left[\begin{array}{c} E \\ \hdashline 0 \end{array}\right]_{2mxm}; \tag{22}$$

<u>при $K = 1$:</u>

$$\begin{cases} B(0) \cdot G(1) + B(1) \cdot G(0) - C(0) \cdot H(1) - C(1) \cdot H(0) = 0, \\ C(0) \cdot G(1) + C(1) \cdot G(0) + B(0) \cdot H(1) + B(1) \cdot H(0) = 0, \end{cases}$$

откуда

$$\left[\begin{array}{c}G(1)\\ \hdashline H(1)\end{array}\right]_{2nxm} = \left[\begin{array}{c:c}B(0) & -C(0)\\ \hdashline C(0) & B(0)\end{array}\right]^{+}_{2nx2m} \cdot \left[\begin{array}{c}-B(1)\cdot G(0)+C(1)\cdot H(0)\\ \hdashline -C(1)\cdot G(0)-B(1)\cdot H(0)\end{array}\right]_{2mxm} =$$

$$= \left[\begin{array}{c:c}B(0) & -C(0)\\ \hdashline C(0) & B(0)\end{array}\right]^{+}_{2nx2m} \cdot \left[\begin{array}{c:c}-B(1) & C(1)\\ \hdashline -C(1) & -B(1)\end{array}\right]_{2mx2n} \cdot \left[\begin{array}{c}G(0)\\ \hdashline H(0)\end{array}\right]_{2nxm}; \qquad (23)$$

<u>при *K = 2*:</u>

$$\begin{cases} B(0)\cdot G(2)+B(1)\cdot G(1)+B(2)\cdot G(0)- \\ -C(0)\cdot H(2)-C(1)\cdot H(1)-C(2)\cdot H(0)=0, \\ C(0)\cdot G(2)+C(1)\cdot G(1)+C(2)\cdot G(0)+ \\ +B(0)\cdot H(2)+B(1)\cdot H(1)+B(2)\cdot H(0)=0, \end{cases}$$

откуда

$$\left[\begin{array}{c}G(2)\\ \hdashline H(2)\end{array}\right]_{2nxm} = \left[\begin{array}{c:c}B(0) & -C(0)\\ \hdashline C(0) & B(0)\end{array}\right]^{+}_{2nx2m} \times$$

$$\times \left[\begin{array}{c}-B(1)\cdot G(1)-B(2)\cdot G(0)+C(1)\cdot H(1)+C(2)\cdot H(0)\\ \hdashline -C(1)\cdot G(1)-C(2)\cdot G(0)-B(1)\cdot H(1)-B(2)\cdot H(0)\end{array}\right]_{2mxm} =$$

$$= \left[\begin{array}{c:c}B(0) & -C(0)\\ \hdashline C(0) & B(0)\end{array}\right]^{+}_{2nx2m} \times \left[\left[\begin{array}{c:c}-B(2) & C(2)\\ \hdashline -C(2) & -B(2)\end{array}\right]_{2mx2n} \cdot \left[\begin{array}{c}G(0)\\ \hdashline H(0)\end{array}\right]_{2nxm} + \right.$$

$$\left. + \left[\begin{array}{c:c}-B(1) & C(1)\\ \hdashline -C(1) & -B(1)\end{array}\right]_{2mx2n} \cdot \left[\begin{array}{c}G(1)\\ \hdashline H(1)\end{array}\right]_{2nxm}\right]; \qquad (24)$$

…

<u>при *K = K*:</u>

$$\begin{cases} B(0)\cdot G(K)-C(0)\cdot H(K) = -\sum_{l=1}^{K} B(l)\cdot G(K-l) + \sum_{l=1}^{K} C(l)\cdot H(K-l)\ , \\ C(0)\cdot G(K)+B(0)\cdot H(K) = -\sum_{l=1}^{K} C(l)\cdot G(K-l) - \sum_{l=1}^{K} B(l)\cdot H(K-l)\ , \end{cases}$$

откуда

$$\left[\begin{array}{c}G(K)\\ \hdashline H(K)\end{array}\right]_{2nxm} = \left[\begin{array}{c:c}B(0) & -C(0)\\ \hdashline C(0) & B(0)\end{array}\right]^{+}_{2nx2m} \times$$

$$\times \left[\begin{array}{c}-\sum_{l=1}^{K} B(l)\cdot G(K-l)+\sum_{l=1}^{K} C(l)\cdot H(K-l)\\ \hdashline -\sum_{l=1}^{K} C(l)\cdot G(K-l)+\sum_{l=1}^{K} B(l)\cdot H(K-l)\end{array}\right]_{2mxm} = \left[\begin{array}{c:c}B(0) & -C(0)\\ \hdashline C(0) & B(0)\end{array}\right]^{+}_{2nx2m} \times$$

$$\times \left[\left[\begin{array}{c:c}-B(K) & C(K)\\ \hdashline -C(K) & -B(K)\end{array}\right]_{2mx2n} \cdot \left[\begin{array}{c}G(0)\\ \hdashline H(0)\end{array}\right]_{2nxm} + \left[\begin{array}{c:c}-B(K-1) & C(K-1)\\ \hdashline -C(K-1) & -B(K-1)\end{array}\right]_{2mx2n} \times\right.$$

$$\left. \times \left[\begin{array}{c}G(1)\\ \hdashline H(1)\end{array}\right]_{2nxm} + \cdots + \left[\begin{array}{cc}-B(1) & C(1)\\ \hdashline -C(1) & -B(1)\end{array}\right]_{2mx2n} \left[\begin{array}{c}G(K-1)\\ \hdashline H(K-1)\end{array}\right]_{2nxm}\right]_{2mxm} =$$

$$= \left[\begin{array}{c:c} B(0) & -C(0) \\ \hdashline C(0) & B(0) \end{array}\right]^{+}_{2nx2m} \times$$

$$\times \left[\sum_{l=1}^{K} \left[\begin{array}{c:c} -B(l) & C(l) \\ \hdashline -C(l) & -B(l) \end{array}\right]_{2mx2n} \cdot \left[\begin{array}{c} G(K-l) \\ \hdashline H(K-l) \end{array}\right]_{2nxm}\right], K \geq 1\,. \qquad (25)$$

<u>Численно–аналитическое решение (2 –й вариант)</u>. Теперь систему матричных уравнений (18) из области оригиналов переведем в область дифференциальных изображений. Получим:

<u>при *K = 0*</u>:

$$\begin{cases} G(0) \cdot B(0) - H(0) \cdot C(0) = E_{nxn} \cdot \delta(0), \\ G(0) \cdot C(0) + H(0) \cdot B(0) = [0]_{nxn}\,. \end{cases}$$

Отсюда имеем

$$[G(0) \,\vdots\, H(0)] \cdot \left[\begin{array}{c:c} B(0) & C(0) \\ \hdashline -C(0) & B(0) \end{array}\right] = [E \,\vdots\, 0],$$

откуда

$$[G(0) \,\vdots\, H(0)]_{nx2m} = [E \,\vdots\, 0] \cdot \left[\begin{array}{c:c} B(0) & C(0) \\ \hdashline -C(0) & B(0) \end{array}\right]^{+}_{2nx2m}; \qquad (26)$$

<u>при *K = 1*</u>:

$$\begin{cases} G(0) \cdot B(1) + G(1) \cdot B(0) - H(0) \cdot C(1) - H(1) \cdot C(0) = 0, \\ H(0) \cdot B(1) + H(1) \cdot B(0) + G(0) \cdot C(1) + G(1) \cdot C(0) = 0, \end{cases}$$

откуда

$$[G(1) \,\vdots\, H(1)]_{nx2m} = [-G(0) \cdot B(1) + H(0) \cdot C(1) \,\vdots$$

$$\vdots\, -H(0) \cdot B(1) - G(0) \cdot C(1)]_{nx2n} \cdot \left[\begin{array}{c:c} B(0) & C(0) \\ \hdashline -C(0) & B(0) \end{array}\right]^{+}_{2nx2m} =$$

$$= [G(0) \,\vdots\, H(0)]_{nx2m} \cdot \left[\begin{array}{c:c} -B(1) & -C(1) \\ \hdashline C(1) & -B(1) \end{array}\right]_{2mx2n} \cdot \left[\begin{array}{c:c} B(0) & C(0) \\ \hdashline -C(0) & B(0) \end{array}\right]^{+}_{2nx2m}; \qquad (27)$$

<u>при *K = 2*</u>:

$$\begin{cases} G(0) \cdot B(2) + G(1) \cdot B(1) + G(2) \cdot B(0) - \\ -H(0) \cdot C(2) - H(1) \cdot C(1) - H(2) \cdot C(0) = 0, \\ H(0) \cdot B(2) + H(1) \cdot B(1) + H(2) \cdot B(0) + \\ +G(0) \cdot C(2) + G(1) \cdot C(1) + G(2) \cdot C(0) = 0, \end{cases}$$

откуда

$$[G(2) \,\vdots\, H(2)]_{nx2m} =$$

$$[-G(0) \cdot B(2) - G(1) \cdot B(1) + H(0) \cdot C(2) + H(1)C(1) \,\vdots$$

$$\vdots\, - G(0) \cdot C(2) - G(1) \cdot C(1) - H(0) \cdot B(2) - H(1) \cdot B(1)]_{nx2n} \times$$

$$\times \left[\begin{array}{c:c} B(0) & C(0) \\ \hdashline -C(0) & B(0) \end{array}\right]^{+}_{2nx2m} = \left[[G(0) \,\vdots\, H(0)]_{nx2m} \cdot \left[\begin{array}{c:c} -B(2) & -C(2) \\ \hdashline C(2) & -B(2) \end{array}\right]_{2mx2n} + \right.$$

$$\left. + [G(1) \,\vdots\, H(1)]_{nx2m} \cdot \left[\begin{array}{c:c} -B(1) & -C(1) \\ \hdashline C(1) & -B(1) \end{array}\right]_{2mx2n}\right] \cdot \left[\begin{array}{c:c} B(0) & C(0) \\ \hdashline -C(0) & B(0) \end{array}\right]^{+}_{2nx2m}; \quad (28)$$

…

<u>при $K = K$:</u>

$$\begin{cases} G(K)\cdot B(0) - H(K)\cdot C(0) = -\sum\limits_{l=0}^{K-1} G(l)\cdot B(K-l) + \sum\limits_{l=0}^{K-1} H(l)\cdot C(K-l)\ , \\ G(K)\cdot C(0) + H(K)\cdot B(0) = -\sum\limits_{l=0}^{K-1} G(l)\cdot C(K-l) - \sum\limits_{l=0}^{K-1} H(l)\cdot B(K-l)\ , \end{cases}$$

откуда

$$[G(K) \,\vdots\, H(K)]_{nx2m} =$$

$$= \left[-\sum_{l=0}^{K-1} G(l)\cdot B(K-l) + \sum_{l=0}^{K-1} H(l)\cdot C(K-l) \quad \vdots \quad -\sum_{l=0}^{K-1} G(l)\cdot C(K-l) - \sum_{l=0}^{K-1} H(l)\cdot B(K-l) \right]_{nx2n} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} B(0) & C(0) \\ -C(0) & B(0) \end{bmatrix}^{+}_{2nx2m} = \left[[G(1) \,\vdots\, H(1)]_{nx2m} \cdot \begin{bmatrix} -B(K-1) & -C(K-1) \\ C(K-1) & -B(K-1) \end{bmatrix}_{2mx2n} + \right.$$

$$+ [G(2) \,\vdots\, H(2)]_{nx2m} \begin{bmatrix} -B(K-2) & -C(K-2) \\ C(K-2) & -B(K-2) \end{bmatrix}_{2mx2n} + \cdots +$$

$$\left. + [G(K) \,\vdots\, H(K)]_{nx2m} \cdot \begin{bmatrix} -B(0) & -C(0) \\ C(0) & -B(0) \end{bmatrix}_{2mx2n} \right] \cdot \begin{bmatrix} B(0) & C(0) \\ -C(0) & B(0) \end{bmatrix}^{+}_{2nx2m} =$$

$$= \left[\sum_{l=0}^{K-1} [G(K-l) \,\vdots\, H(K-l)]_{nx2m} \cdot \begin{bmatrix} -B(l) & -C(l) \\ C(l) & -B(l) \end{bmatrix}_{2mx2n} \right] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} B(0) & C(0) \\ -C(0) & B(0) \end{bmatrix}^{+}_{2nx2m}, K \geq 1\ . \qquad (29)$$

Замечание 2. Нахождение матричных дискрет *G(0), H(0); G(1), H(1); G(2), H(2); ...; G(K), H(K)* в соответствии с матрично-блочно-столбцевыми представлениями (22)-(25) или с матрично-блочно-строчными представлениями (26)-(29) и, следовательно, неизвестной обобщенной обратной матрицы *X(t)* практически не затруднено ни размерами этой матрицы и ни сложностью её элементов. Единственной более или менее сложной вычислительной процедурой является определение псевдообратной блочной матрицы, содержащей начальные матричные дискреты *B(0), C(0)* (см. (22) или (26)). Все остальные вычисления по определению матричных дискрет *G(0),H(0); G(1),H(1); G(2),H(2); ... ; G(K),H(K)* осуществляются численно, последовательно и рекуррентно, без каких-либо вычислительных затруднений. Что касается определения неизвестной матрицы *X(t)*, то её элементы, естественно, могут быть восстановлены в соответствии с (9) и (10) - любыми обратными матричными дифференциальными преобразованиями.

Модельный пример. Предположим, что задана комплексная одно-параметрическая матрица

$$A(t) = \begin{bmatrix} (t-1+j\cdot(t^2+1)) & t^2 & (-5\cdot t+j\cdot(3\cdot t-2)) \\ j\cdot t & (t+1+j\cdot 5) & -j\cdot 2\cdot t \end{bmatrix},$$

и нужно определить её обобщённую обратную матрицу *X(t)*. Матрицу *A(t)* представим в виде суммы двух матриц, т.е. *A(t) = B(t) + j·C(t)*. Тогда при $t_v = 0$ и $H = 1$ получим следующие матричные дискреты:

$$B(0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix};$$

$$B(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B(K) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ C(K) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ K \geq 3.$$

Далее, в соответствии с (22) при вычислениях с точностью до $\varepsilon = 10^{-3}$ имеем

$$\begin{bmatrix} G(0) \\ \hline H(0) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]^+ \cdot \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} -0.167 & 0 & 0.167 & 0 \\ 0 & 0.038 & 0 & 0.192 \\ 0 & 0 & -0.333 & 0 \\ -0.167 & 0 & -0.167 & 0 \\ 0 & 0.192 & 0 & 0.038 \\ -0.333 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} -1.167 & 0 \\ 0 & 0.038 \\ 0 & 0 \\ \hline -0.167 & 0 \\ 0 & -0.192 \\ 0.333 & 0 \end{array}\right],$$

а матричные дискреты матриц $G(t)$ и $H(t)$, вычисленные с применением схемы (23)-(25), при $K = \overline{1,2}$ таковы:

$$G(1) = \begin{bmatrix} 0.111 & 0 \\ 0 & 0.035 \\ -0.611 & 0 \end{bmatrix},\ G(2) = \begin{bmatrix} 1.101 & 0.038 \\ -0.338 & -0.004 \\ -1.481 & -0.064 \end{bmatrix};$$

$$H(1)=\begin{bmatrix}-0.500 & 0\\ 0.167 & 0.014\\ 0.389 & 0\end{bmatrix},\ H(2)=\begin{bmatrix}-0.380 & -0.026\\ 0.188 & 0.006\\ -0.722 & -0.012\end{bmatrix}.$$

Следовательно, матричными дискретами $X(K),\ K=\overline{0,2}$ обобщенной обратной матрицы $X(t)$ будут

$$X(0)=\begin{bmatrix}(-0.167-j0.167) & 0\\ 0 & (-0.038-j0.192)\\ j0.333 & 0\end{bmatrix},$$

$$X(1)=\begin{bmatrix}(0.111-j0.5) & 0\\ j0.167 & (0.035+j0.014)\\ (-0.611+j0.389) & 0\end{bmatrix},$$

$$X(2)=\begin{bmatrix}(1.101-j0.38) & (0.038-j0.026)\\ (-0.338+j0.188) & (-0.004+j0.006)\\ (-1.481-j0.722) & (-0.064-j0.012)\end{bmatrix}.$$

Тогда при использовании обратных дифференциальных преобразований Маклорена при $K=\overline{0,2}$ получим следующую обобщенную обратную матрицу:

$$X(t)=\begin{bmatrix}(1{,}101\cdot t^2+0{,}111\cdot t-0{,}167)+j\cdot(-0{,}38\cdot t^2-0{,}5\cdot t-0{,}167) & (0{,}038\cdot t^2)+j\cdot(-0{,}26\cdot t^2)\\ (-0{,}338\cdot t^2)+j\cdot(0{,}188\cdot t^2+0{,}167\cdot t) & -(0{,}004\cdot t^2+0{,}035\cdot t+0{,}038)+j\cdot(0{,}006\cdot t^2+0{,}014\cdot t-0{,}192)\\ (-1{,}481\cdot t^2-0{,}611\cdot t)+j\cdot(-0{,}722\cdot t^2+0{,}389\cdot t+0{,}333) & (-0{,}064\cdot t^2)+j\cdot(-0{,}012\cdot t^2)\end{bmatrix}.$$

Эта матрица лишь с погрешностью до $\Delta_{max} = 10^{-2}$ (максимальная абсолютная погрешность) удовлетворяет условию (3) (в остальных условиях (1), (2) и (4) $\Delta_{max} < 10^{-2}$). При использовании бóльшего количества матричных дискрет ($K = \overline{0{,}10}$) эта погрешность достигает $\Delta_{max} = 10^{-4}$ (в условии (3)), а при $K = \overline{0{,}99}$ имеем $\Delta_{max} = 10^{-12}$ (также в условии (3)).

Замечание 3. Программа была составлена на языке C++ с использованием библиотек Eigen [6] и Qt [7]**.**

Заключение. Предложены аналитические и достаточно простые численно-аналитические методы определения комплексных обобщённых обратных матриц. Численно-аналитические методы легко реализуемы средствами современных информационных технологий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бадалян Л.А.** Разработка методов определения псевдообратных нестационарных матриц и автоматизация вычислительных процедур: Автореф. дис. ... к.т.н. – Ереван, 2007. – 21 с.
2. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. – М.: Физматлит, 2010. – 560 с.
3. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования функций и уравнений. – Киев: Наукова думка, 1984. – 420 с.
4. **Симонян А.С.** Разработка численно-аналитических методов определения параметрических обобщённых обратных матриц Мура-Пенроуза и автоматизация вычислительных процедур: Автореф. дис. ... к.т.н. – Ереван, 2013. – 24 с.
5. **Симонян С.О.** Матрично-векторные представления некоторых вычислительных методов определения параметрических обобщённых обратных матриц // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. – 2013. – Т. 66, № 4. – С. 370-378.
6. Eigen 3.2.1 http://eigen.tuxfamily.org/index.php?title=Main_Page
7. **Маке Шлее** Qt4.8 Профессиональное программирование на С++. - СПб.: “БХВ-Петербург”, 2012. - 912 с.

Поступила в редакцию 10.01.2014.
Принята к опубликованию 12.05.2014.

ՄՈՒՐ-ՊԵՆՐՈՈՒԶԻ ԿՈՄՊԼԵՔՍ ՄԻԱՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ՀԱԿԱԴԱՐՁՆԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐ

Ս.Հ. Սիմոնյան, Գ.Վ. Ադամյան, Ա.Ս. Սիմոնյան, Լ.Վ. Պռազյան

Առաջարկվել են Մուր-Պենրոուզի կոմպլեքս միապարամետրական ընդհանրացված հակադարձ մատրիցների որոշման անալիտիկ և թվա-անալիտիկ մեթոդներ: Դիտարկվել է մոդելային օրինակ:

Առանցքային բառեր. կոմպլեքս միապարամետրական մատրից, ընդհանրացված հակադարձ մատրից, անալիտիկ լուծում, դիֆերենցիալ ձևափոխություններ, թվա-անալիտիկ լուծում:

METHODS FOR DETERMINING COMPLEX ONE-PARAMETRIC GENERALIZED-INVERSE MATRICES OF MOOR-PENROSE

S.H. Simonyan, G.V. Adamyan, A.S. Simonyan, L.V. Prazyan

Analytical and numerical-analytical methods for determining Moor-Penrose’s complex one-parametric generalized-inverse matrices are proposed. A model example is considered.

Keywords: complex one-parametric matrix, generalized-inverse matrix, analytical solution, differential transformations, numerical-analytical solution.