УДК 621.314

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ПОНИЖАЮЩЕГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ ПОСТОЯННОГО НАПРЯЖЕНИЯ В РЕЖИМЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ТОКОВ

К.В. Бегоян, О.Н. Гаспарян

Национальный политехнический университет Армении

Рассмотрены вопросы вывода передаточной функции импульсного понижающего преобразователя постоянного напряжения (ППН) в режиме непрерывных токов путем усреднения уравнений динамики преобразователя в пространстве состояний и последующей линеаризации в окрестности рабочей точки. Показано, что введение активного сопротивления последовательно с конденсатором низкочастотного фильтра приводит к появлению левостороннего нуля передаточной функции понижающего ППН. Данное обстоятельство влечет за собой увеличение запаса устойчивости по фазе ППН и улучшает его динамические характеристики. Приведен численный пример расчета передаточной функции ППН и даны результаты моделирования в среде пакета *Simulink*.

Ключевые слова: преобразователь постоянного напряжения, режим непрерывных токов, пространство состояний, усреднение уравнений, передаточная функция.

Введение. Преобразователи постоянного напряжения широко применяются в различных технических системах, включая источники питания для компьютеров и другого офисного оборудования, энергетические системы космических аппаратов, регуляторы двигателей постоянного тока и т.д. [1-4]. Преобразование постоянного напряжения может осуществляться различными путями и способами, каждый из которых имеет свою определенную схемную реализацию. Наиболее популярными в этом отношении являются импульсные схемы, в которых высокая эффективность достигается за счет периодической высокочастотной коммутации электронных ключей с использованием широтноимпульсной модуляции (ШИМ) сигнала [1]. Существует много вариантов импульсных ППН, где базовым считается понижающий ППН (buck converter), идеализированная схема и диаграммы изменения токов дросселя которого представлены на рис. 1, где через R обозначено активное сопротивление нагрузки. При достаточно высокой частоте прерывания $f_s = 1/T_s$ среднее за период T_s значение V_0 выходного напряжения $v_0(t)$ равно $V_0 = DV_s$, где V_s напряжение источника питания, а $D = T_{On} / T_s$ называется коэффициентом заполнения импульсов (T_{0n} - длительность импульса, при которой электронный ключ на рис. 1 замкнут). Отметим, что коэффициент заполнения D может изменяться в пределах $0 \le D \le 1$.

Различают два основных режима работы понижающего ППН, называемые, соответственно, режимами непрерывных и прерывистых токов, которые приводят к существенно различным динамическим характеристикам и свойствам преобразователя (см. рис. 16,в). В режиме непрерывных токов ток дросселя $i_L(t)$ никогда не достигает нулевого значения, а в режиме прерывистых

токов имеются интервалы времени, где ток $i_{L}(t)$ равен нулю [1].



Рис. 1. Идеализированная схема понижающего ППН (а) и диаграммы изменения токов и напряжений (б),(в)

В настоящей статье дан вывод передаточной функции понижающего ППН в режиме непрерывных токов. Знание этой передаточной функции при малых отклонениях сигналов от их средних (рабочих) значений необходимо для анализа динамики и устойчивости ППН с обратной связью, а также для исследования систем управления (например, систем управления двигателями постоянного тока), в которых эти преобразователи входят как управляющие элементы.

1. Уравнения динамики ППН в пространстве состояний. Импульсные ППН с ШИМ являются нелинейными нестационарными системами с периодическими параметрами. Поэтому точное аналитическое исследование их динамики является исключительно сложной задачей [1,2]. На практике обычно

прибегают к специальным приближенным методам, среди которых можно выделить два метода, основанных на различных подходах к анализу ППН. Первый из них, предложенный С. Куком и Р. Мидлбруком [3], основан на таком преобразовании уравнений ППН в пространстве состояний, при которых эти уравнения правильно описывают усредненную во времени динамику преобразователя. Второй метод, предложенный Ваче Ворперяном [4] и известный под названием элементное усреднение (circuit averaging), использует усредненное описание отдельных элементов ППН, при помощи которых строится усредненная модель самого преобразователя. Оба эти метода имеют свои достоинства и недостатки. Ниже мы будем использовать метод усреднения в пространстве состояний, который больше подходит для решения задачи получения передаточной функции, т.е. приближенной линейной стационарной модели, понижающего ППН при малых отклонениях от номинальных режимов. При этом будет рассматриваться более реалистичная модель ППН на рис. 2, где учтены активное сопротивление г, дросселя и эквивалентное последовательное (или введенное дополнительно) сопротивление r_c в цепи конденсатора.



Рис. 3. Эквивалентные схемы ППН при замкнутом (a) и разомкнутом (б) электронном ключе и идеальном диоде

Отметим, что можно дать *точное* математическое описание в пространстве состояний понижающего ППН на рис. 2, вводя в рассмотрение так называемую функцию переключения (коммутирующую функцию) q(t) [1], определяемую как

$$q(t) = \begin{cases} 1 & \text{для интервала} \quad 0 \le t < DT_s, \\ 0 & \text{для интервала} \quad DT_s \le t < T_s. \end{cases}$$
(1)

Действительно, ППН на рис. 2 можно представить в виде двух эквивалентных схем на рис. 3, соответствующих интервалам времени DT_s и $(1-D)T_s$ при замкнутом и разомкнутом электронном ключе соответственно. В этом смысле ППН на рис. 2 представляет собой систему с *переменной структурой*, где переключение от одной подструктуры к другой определяется функцией переключения q(t) (1). Выберем в качестве переменных состояния ППН ток дросселя $i_L(t)$ и напряжение на конденсаторе $u_c(t)$. Тогда, вводя в рассмотрение двумерный вектор-столбец x(t) с координатами $x_1(t) = i_L(t)$ и $x_2(t) = u_c(t)$, для схемы на рис. За (т.е. для интервала DT_s) можно записать

$$\frac{dx_{1}(t)}{dt} + \left[\frac{Rr_{L} + Rr_{C} + r_{L}r_{C}}{L(R + r_{C})}\right]x_{1}(t) + \frac{R}{L(R + r_{C})}x_{2}(t) = \frac{1}{L}v_{s}(t),$$

$$\frac{dx_{2}(t)}{dt} = \frac{R}{C(R + r_{C})}x_{1}(t) - \frac{1}{C(R + r_{C})}x_{2}(t),$$

$$v_{0}(t) = \frac{Rr_{C}}{R + r_{C}}x_{1}(t) + \frac{R}{R + r_{C}}x_{2}(t),$$
(2)

или в векторно-матричной форме:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_1 x(t) + b_1 v_s(t),$$

$$v_0(t) = c_1 x(t),$$
(3)

где

$$A_{1} = \begin{bmatrix} -\frac{Rr_{L} + Rr_{c} + r_{L}r_{c}}{L(R + r_{c})} & -\frac{R}{L(R + r_{c})} \\ \frac{R}{C(R + r_{c})} & -\frac{1}{C(R + r_{c})} \end{bmatrix}, \quad b_{1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c_{1} = \begin{bmatrix} \frac{Rr_{c}}{R + r_{c}} & \frac{R}{R + r_{c}} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

а входная функция $v_s(t)$ отражает тот факт, что напряжение питания V_s может меняться во времени.

Соответствующие векторные уравнения для интервала длительности $(1 - D)T_s$, при котором электронный ключ разомкнут, имеют аналогичный вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_2 x(t) + b_2 v_s(t),$$

$$v_0(t) = c_2 x(t).$$
(5)

Поскольку схема с разомкнутым электронным ключом на рис. Зб отличается от схемы на рис. За только значением $v_s(t) = 0$, то нетрудно показать, что матрица A_2 и векторы b_2 и c_2 в (5) даются выражениями

$$A_2 = A_1, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0\\0 \end{bmatrix}, \quad c_2 = c_1.$$
(6)

С учетом вида функции переключения q(t) (1) и выражений (3)-(5) можно записать дифференциальные уравнения ППН на рис. 2 в виде

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left[q(t)A_1 + \left(1 - q(t)\right)A_2\right]x(t) + \left[q(t)b_1 + \left(1 - q(t)\right)b_2\right]v_s(t),$$
(7)
$$v_0(t) = \left[q(t)c_1 + \left(1 - q(t)\right)c_2\right]x(t),$$

которые с учетом (6) сводятся к простому виду

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_1 x(t) + b_1 q(t) v_s(t),$$

$$v_0(t) = c_1 x(t).$$
(8)

Таким образом, нами получены *точные* дифференциальные уравнения ППН в пространстве состояний (8), зависящие от функции переключения q(t) (1), значение которой скачкообразно переходит от единицы к нулю и обратно в моменты замыкания и размыкания электронного ключа. Иными словами, векторное уравнение (8) представляет собой нестационарное нелинейное дифференциальное уравнение с разрывными параметрами, точное аналитическое решение которого в общем случае не представляется возможным.

2. Усредненная модель понижающего ППН в пространстве состояний. В соответствии с методом усреднения уравнений динамики в пространстве состояний на первом этапе осуществляется усреднение по времени функции переключения q(t) (1) [1]. Для этого вводится функция времени

$$d(t) = \frac{1}{T_s} \int_{t-T_s}^t q(\tau) d\tau , \qquad (9)$$

которая представляет собой усредненное за период T_s выражение для q(t) при непрерывном изменении времени t. Эта функция называется непрерывным (или локальным) коэффициентом заполнения и отражает тот факт, что обычный коэффициент заполнения D может изменяться по времени в переходных режимах [1,2]. Далее с учетом (9) осуществляется усреднение по времени точных уравнений динамики (8), что дает

$$\frac{d\overline{x}(t)}{dt} = A_{1}\overline{x}(t) + b_{1}\overline{v}_{s}(t)d(t),$$

$$\overline{v}_{0}(t) = c_{1}\overline{x}(t),$$
(10)

где усредненные переменные $\overline{x}(t)$, $\overline{v}_{s}(t)$ и $\overline{v}_{0}(t)$ определяются выражениями,

аналогичными (9), и предполагается, что вектор x(t) и функция $v_s(t)$ не очень отличаются от своих усредненных (локальных) значений [1]. Уравнения (10) называются усредненной моделью ППН в пространстве состояний. В этих уравнениях вместо разрывной функции времени q(t) (1) входит непрерывный локальный коэффициент заполнения d(t) (9). Поэтому усредненную модель (10) можно считать непрерывной аппроксимацией точных уравнений динамики (8) импульсного понижающего ППН.

3. Линеаризация усредненной модели ППН. Для вывода передаточных функций понижающего ППН следует осуществить линеаризацию нелинейной усредненной модели в окрестности некоторой постоянной рабочей точки [1,2]. Классическая процедура линеаризации обычно заключается в разложении, считая отклонения от рабочей точки малыми, нелинейной функции в ряд Тейлора и пренебрежении всеми членами, кроме линейного. Однако вид уравнений (10) позволяет упростить эту процедуру. Представим все усредненные функции времени в (10) в виде

$$\overline{x}(t) = X + \widetilde{x}(t), \ \overline{v}_0(t) = V_0 + \widetilde{v}_0(t), \ \overline{v}_s(t) = V_s + \widetilde{v}_s(t), \ d(t) = D + d(t),$$
(11)

где все отклонения $\tilde{x}(t)$, $\tilde{v}_0(t)$, $\tilde{v}_s(t)$, $\tilde{d}(t)$ считаются малыми. Тогда, подставив (11) в (10) и разделив переменные, приходим к уравнениям

$$0 = A_1 X + b_1 D V_s \quad \text{или } X = -A_1^{-1} b_1 D V_s,$$

$$V_0 = c_1 X = -c_1 A_1^{-1} b_1 D V$$
(12)

для постоянных установившихся состояний и

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = A_1 \tilde{x}(t) + b_1 V_s \tilde{d}(t) + b_1 D \tilde{v}_s(t) + \left[b_1 \tilde{d}(t) \tilde{v}_s(t) \right],$$

$$\tilde{v}_0(t) = c_1 \tilde{x}(t)$$
(13)

для малых отклонений переменных усредненной модели от рабочей точки.

Подставив в (12) выражения (4) для матрицы A_1 и векторов b_1 и c_1 , после несложных алгебраических преобразований для установившихся состояний ППН получим

$$X = \frac{(R + r_{c})}{Rr_{L} + Rr_{c} + r_{L}r_{c} + R^{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ R \end{bmatrix} DV_{s},$$

$$V_{0} = \frac{R(R + r_{c})}{Rr_{L} + Rr_{c} + r_{L}r_{c} + R^{2}} DV_{s}.$$
(14)

Легко видеть, что единственным нелинейным членом в уравнениях (13) является член, заключенный в квадратные скобки и содержащий произведение

малых величин $\tilde{d}(t)$ и $\tilde{v}_s(t)$. Пренебрегая этим членом, окончательно получим линеаризованные уравнения усредненной модели ППН в виде

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = A_1 \tilde{x}(t) + b_1 V_s \tilde{d}(t) + b_1 D \tilde{v}_s(t),$$

$$\tilde{v}_0(t) = c_1 \tilde{x}(t).$$
(15)

Отметим, что линеаризованные уравнения (15) связывают выход $\tilde{v}_0(t)$ с

двумя входными переменными $\tilde{d}(t)$ и $\tilde{v}_s(t)$, причем, согласно принципу суперпозиции [5], влияние этих переменных на выход понижающего ППН может рассматриваться независимо друг от друга.

4. Передаточные функции ППН. Следуя стандартной методике получения передаточных функций линейных систем из уравнений в пространстве состояний [5], нужно осуществить преобразование Лапласа уравнений (15) при нулевых начальных условиях и исключить из полученных алгебраических уравнений вектор состояний x(s), где s- переменная Лапласа. Это дает следующее комплексное уравнение относительно скалярной выходной переменной $\tilde{v}_0(s)$:

$$\tilde{v}_{0}(s) = c_{1}(sI - A_{1})^{-1}b_{1}\left[V_{s}\tilde{d}(s) + D\tilde{v}_{s}(s)\right],$$
(16)

что приводит к двум скалярным передаточным функциям ППН относительно независимых входных переменных $\tilde{d}(s)$ и $\tilde{v}_s(s)$:

$$\frac{v_0(s)}{d(s)} = W_d(s) = c_1(sI - A_1)^{-1}b_1V_s,$$
(17)

$$\frac{\tilde{v}_0(s)}{\tilde{v}_s(s)} = W_v(s) = c_1(sI - A_1)^{-1}b_1D.$$
(18)

Как видно из выражений (17), (18), обе передаточные функции $W_d(s)$ и $W_v(s)$ отличаются лишь постоянными коэффициентами $[V_s \ для \ W_d(s)$ и $D \ для W_v(s)$]. Подставив (4) в (17) и (18), получим

$$W_{d}(s) = \frac{k_{0}(s - z_{C})}{\det(sI - A_{1})} V_{s}, \quad k_{0} = \frac{Rr_{C}}{L(R + r_{C})}, \quad z_{C} = -\frac{1}{r_{C}C}, \quad (19)$$

$$W_{\nu}(s) = \frac{k_0 \left(s - z_C\right)}{\det(sI - A_1)} D,$$
(20)

где

$$\det(sI - A_{1}) = s^{2} + \left[\frac{\left(Rr_{L} + Rr_{C} + r_{L}r_{C}\right)C + L}{LC(R + r_{C})}\right]s + \frac{Rr_{L} + Rr_{C} + r_{L}r_{C} + R^{2}}{LC(R + r_{C})^{2}}.$$
 (21)

Таким образом, линеаризованный понижающий ППН описывается передаточными функциями второго порядка, имеющими в общем случае нуль в точке $z_c = -1/r_c C$, определяемой емкостью *C* и сопротивлением r_c в цепи конденсатора низкочастотного фильтра. Для идеального ППН, т.е. при $r_L = r_c = 0$, вид уравнений для установившихся состояний (14) и передаточных функций $W_d(s)$ (19), $W_v(s)$ (20) существенно упрощается:

$$X = \begin{vmatrix} \frac{1}{R} \\ 1 \end{vmatrix} DV_s, \quad V_0 = DV_s, \tag{22}$$

$$W_{\nu}(s) = \frac{\omega_0^2}{\left(s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2\right)} D, \qquad W_d(s) = \frac{\omega_0^2}{\left(s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2\right)} V_s , \qquad (23)$$

где коэффициент затухания ξ и натуральная частота ω_0 равны

$$\xi = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}} , \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} . \tag{24}$$

Следует особо подчеркнуть, что в случае идеального ППН отсутствуют нули передаточных функций.

Примеры. Рассмотрим идеальный ППН с параметрами $V_s = 8 B$, D = 0.625, $L = 5 \ m\kappa\Gamma h$, $C = 2000 \ m\kappa\Phi$, $R = 200 \ mOm$, $f_s = 200 \ \kappa\Gamma u$. Передаточная функция $W_d(s)$ (23) при этих параметрах равна

$$W_d(s) = \frac{8 \cdot 10^8}{s^2 + 2500s + 10^8}$$
(25)

и имеет два комплексно-сопряженных полюса $p_{1,2} = -1250 \pm j99216$. На рис. 4а показаны диаграммы Боде передаточной функции $W_d(s)$ (25). Как видно из рисунка, фазовая характеристика $\arg W_d(j\omega)$ идеального ППН при $\omega \to \infty$ стремится к -180° .



Рис. 4. Диаграммы Боде понижающего ППН: а - идеальный преобразователь, б преобразователь с активным сопротивлением в цепи конденсатора

Допустим теперь, что при тех же значениях параметров ППН, что и выше, имеется добавочное активное сопротивление $r_c = 50 m\Omega$ в цепи конденсатора. Передаточная функция $W_d(s)$ (19) при этом равна

$$W_d(s) = \frac{64000(s+10000)}{s^2 + 10000s + 8 \cdot 10^7}$$
(26)

и имеет два комплексно-сопряженных полюса $p_{1,2} = -5000 \pm j7416.2$, а также один нуль z = -10000. Диаграммы Боде передаточной функции $W_d(s)$ (26) показаны на рис. 46. Фазовая характеристика передаточной функции $W_d(s)$ (26) при $\omega \rightarrow \infty$ стремится к -90° , т.е. в данном случае фазовый сдвиг на высоких частотах значительно меньше. Отметим, наконец, что при s = 0 обе передаточные функции $W_d(s)$ (25) и (26) имеют одинаковый коэффициент передачи $K_d = 8$.

На рис. 5 даны результаты динамического моделирования (тока дросселя и выходного напряжения) идеального ППН в среде пакета *Simulink*. На рис. 5а приведен общий вид процессов при нулевых начальных условиях, а на рис. 5б показаны установившиеся процессы в укрупненном масштабе.



Рис. 5. Результаты моделирования процессов в идеальном понижающем ППН; а - общий вид, б - увеличенный масштаб

Модель была разработана на основе схемы ППН на рис. 1а в предположении об идеальности электронного ключа и диода и показана на рис. 6. Аналогичные результаты для случая понижающего ППН с идеальными электронным ключом и диодом, но с добавочным сопротивлением $r_c = 50 m\Omega$ показаны на рис. 7. Сравнение переходных процессов на рис. 5а и 7а показывает, что введение добавочного сопротивления r_c , при котором возникает нуль в передаточной функции $W_d(s)$ (26), значительно улучшает переходные процессы в ППН. С другой стороны, амплитуда пульсаций выходного напряжения $v_0(t)$ ППН с сопротивлением r_c (рис. 7б), хотя и составляет около 4% от среднего значения выходного напряжения, но более чем в 120 раз превышает амплитуду пульсаций идеального преобразователя (рис. 56). Что касается кривых изменения тока дросселя, то они практически одинаковы в обоих случаях.



Рис. 6. Модель понижающего ППН с идеальными электронным ключом и диодом



Рис. 7. Результаты моделирования процессов в ППН с активным сопротивлением в цепи конденсатора: а - общий вид, б - увеличенный масштаб

Выводы. Дан вывод передаточных функций понижающего ППН в режиме непрерывных токов, основанный на усреднении и последующей линеаризации уравнений динамики ППН в пространстве состояний. Показано, что введение активного сопротивления последовательно с конденсатором низкочастотного фильтра приводит к появлению левостороннего нуля передаточных функций ППН по отношению к малым изменениям напряжения питания и локального коэффициента заполнения. В свою очередь, наличие нуля передаточных функций приводит к увеличению запаса устойчивости по фазе понижающего ППН и улучшает его динамические характеристики.

Литература

- 1. **Choi B**. Pulse-width Modulated DC-to-DC Power: Conversion Circuits, Dynamics, and Control Designs.- A John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2008.- 649 p.
- 2. Mohan N., Tore M., Willam P. Power Electronics: Converters, Applications, and Design.- John Wily and Sons, Ltd, New York, 2002.-802 p.
- Middlebrook R., Cuk S. A General Unified Approach to Modeling Switching Converter Power Stages // IEEE Power Electronics Specialists Conference Record.-1976.-P. 18-34.
- Vorperian V. Simplified Analysis of PWM Converters Using Model of PWM Switch: Part I and II // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems.-1990.- Vol. 26, No. 3. - P. 490-505.
- Dorf R., Bishop R. Modern Control Systems.-Addison-Wesley Publishing Co., Reading, MA, 2007.-1046 p.

Поступила в редакцию 03.02.2015. Принята к опубликованию 15.05.2015.

ՀԱՍՏԱՏՈՒՆ ԼԱՐՄԱՆ ՑԱԾՐԱՑՆՈՂ ԿԵՐՊԱՓՈԽՉԻ ՓՈԽԱՆՑՄԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՀՈՍԱՆՔՆԵՐԻ ՌԵԺԻՄՈՒՄ

Կ.Վ. Բեգոյան, Օ.Ն. Գասպարյան

Դիտարկված են հաստատուն լարման ցածրացնող իմպուլսային կերպափոխչի (ՀԼԿ) փոխանցման ֆունկցիայի ստացման հարցերը անընդհատ հոսանքի ռեժիմում՝ վիճակների տարածությունում կերպափոխչի դինամիկայի հավասարումների միջինացման և աշխատանքային կետի շուրջը հետագա գծայնացման եղանակով։ Յույց է տրված, որ ցածրահաճախական ֆիլտրի կոնդենսատորին հաջորդաբար ակտիվ դիմադրության միացումը հանգեցնում է փոխանցման ֆունկցիայի ձախակողմյան զրոյի առաջացմանը։ Այդ հանգամանքը հանգեցնում է ՀԼԿ-ի ըստ փուլի կայունության պաշարի մեծացմանը և դինամիկ բնութագրերի բարելավմանը։ Ներկայացված է ՀԿԼ-ի փոխանցման ֆունկցիայի հաշվարկի թվային օրինակ, և տրված են *Simulink* փաթեթի միջավայրում մոդելավորման արդյունքները։

Առանցքային բառեր. հաստատուն լարման կերպափոխիչ, անընդհատ հոսանքի ռեժիմ, վիճակների տարածություն, հավասարումների միջինացում, փոխանցման ֆունկցիա։

DETERMINING THE TRANSFER FUNCTION OF A BUCK CONVERTER IN A CONTINUOUS CONDUCTION MODE

K.V. Begoyan, O.N. Gasparyan

The issues on deriving the transfer function of a buck converter in a continuous conduction mode by averaging the dynamics equations of the converter in the state-space and subsequent linearization in the vicinity of the operating point are considered. It is shown that the introduction of the ohmic resistance in series with the capacitor of the low-pass filter results in a left-half-plane zero of the transfer function of the buck converter. That circumstance leads to an increase in the phase margin of the converter, and the improvement of its dynamic characteristics. A numerical example of calculation of the transfer function of the buck converter and the results of modeling in the *Simulink* package environment are given.

Keywords: buck converter, continuous conduction mode, state space, averaging of equations, transfer function.