

ЭНЕРГОСИСТЕМЫ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СЕТИ

УДК 621.316

**ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ В ТЕОРИИ УСТАНОВИВШЕГОСЯ
РЕЖИМА ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ**

В.С. Сафарян, Л.В. Сафарян

ЗАО "Научно-исследовательский институт энергетики РА"

На основе принципа двойственности в теории установившегося режима электро-энергетической системы каждой задаче (прямая задача) сопоставляется двойственная задача и устанавливается взаимно однозначная связь между исходными данными и результатами решения задач.

Ключевые слова: двойственность (дуальность), установившийся режим, структура сети, ориентированный граф, изоморфные графы, прямая и двойственная сети.

Введение. В разных отраслях науки (линейное программирование, теория автоматического управления, теория графов, теоретические основы электротехники и т.д.) введены понятия двойственности (дуальности), которые устанавливают тесную связь между прямой и двойственной задачами [1 - 3]. Эти понятия не только дополняют друг друга, но и содержат полезную информацию, а также позволяют обходить трудности при решении задач и анализе результатов расчета.

Известно, что двойственность в задачах линейного программирования позволяет производить анализ чувствительности этих задач к изменению параметров. Метод потенциалов решения транспортной задачи является следствием применения принципа двойственности [1].

В теории автоматического управления каждой системе управления сопоставляется двойственная система по управляемости и наблюдаемости [2].

В теории электрических цепей системы уравнений контурных токов и узловых потенциалов считаются дуальными, что следует из свойства дуальности графов [3].

Понятие "реактивная мощность" в течение длительного времени является предметом споров [4-7]. Строгое определение реактивной мощности имеется только для случая, когда токи и напряжения в цепях синусоидальны по форме. Однако даже для таких цепей реактивная мощность определяется чисто формально [4].

Большинство специалистов видят главное противоречие классической теории мощности в отсутствии универсального, физически обоснованного интегрального выражения для определения реактивной мощности. В классической теории мощности имеют место и другие противоречия [7].

Постановка задачи. В данной работе на основе принципа двойственности в теории установившегося режима (УР) введено понятие двойственности, которое позволяет выявить новые свойства задач УР, расширить возможности структурного анализа УР [8, 9], а также истолковать понятие реактивной мощности с позиций двойственности, сопоставляя ее с активной мощностью.

Определение и применение понятия двойственности. Введем некоторые понятия и определения.

Комплексной величине

$$Z = R + jX = Ze^{j\varphi} \quad (1)$$

сопоставим комплексную величину $D(Z)$:

$$D(Z) = j\hat{Z} = j(R - jX) = X + jr = Ze^{j(90-\varphi)} \quad (2)$$

и назовем $D(Z)$ ($Z' = D(Z)$) двойственной по отношению к Z .

Очевидно, что

$$D(D(Z)) = D(j\hat{Z}) = j(-jZ) = Z. \quad (3)$$

Из определения преобразования двойственности очевидно, что $|Z| = |D(Z)|$,

$\arg(Z) + \arg(D(Z)) = \frac{\pi}{2}$ (рис. 1).

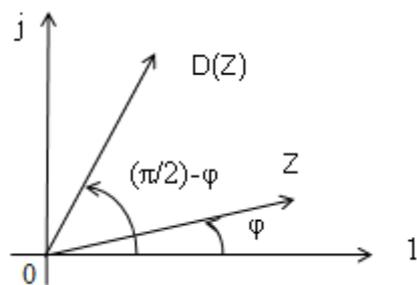


Рис. 1. Геометрическая интерпретация преобразования двойственности

Приведем некоторые свойства преобразования двойственности:

$$\begin{cases} D(Z_1 + Z_2) = j(\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2) = D(Z_1) + D(Z_2), \\ D(Z_1 Z_2) = j(\hat{Z}_1 \hat{Z}_2) = -jD(Z_1)D(Z_2), \\ D(Z_1/Z_2) = j\hat{Z}_1/\hat{Z}_2 = jD(Z_1)/D(Z_2). \end{cases} \quad (4)$$

Электрическая сеть характеризуется:

- структурой (топологией) сети, которая представляется графом;
- пассивными параметрами (активными и реактивными сопротивлениями линий и трансформаторов, коэффициентами трансформации, активными и реактивными проводимостями поперечных элементов);
- активными параметрами, т.е. активными и реактивными узловыми мощностями.

При составлении двойственной сети топология не деформируется, а пассивные и активные параметры определяются согласно (2).

На рис. 2а представлены электрическая сеть (для определенности ее назовем прямой сетью), на рис. 2б – двойственная ей сеть.

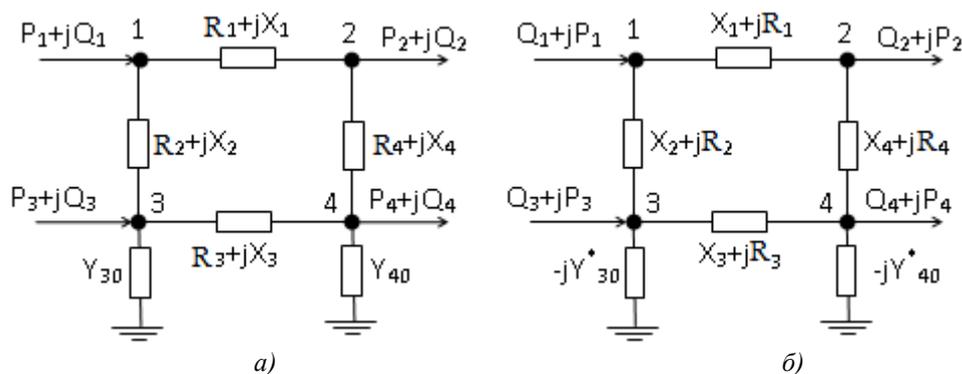


Рис. 2. Прямая (а) и двойственная ей (б) сети

Составим систему уравнений УР для прямой сети:

$$\hat{U}_i \sum_{j=1}^n Y_{ij} \hat{U}_j = \hat{S}_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (5)$$

где \hat{U}_i (\hat{U}_i) - комплексные (комплексно-сопряженные) напряжения узла; \hat{S}_i - комплексно-сопряженная полная мощность узла; Y_{ij} - элемент комплексной матрицы узловых проводимостей.

Составим систему уравнений УР для двойственной сети:

$$\hat{U}'_i \sum_{j=1}^n D(Y_{ij}) \hat{U}'_j = D(\hat{S}_i), \quad (6)$$

где \hat{U}'_i - напряжения в узлах двойственной сети.

Преобразуя (6), получим

$$\hat{U}'_i \sum_{j=1}^n y_{ij} e^{-j\left(\frac{\pi}{2} + \psi_{ij}\right)} \dot{U}'_j = S_i e^{-j\left(\frac{\pi}{2} - \psi_i\right)},$$

или же

$$\hat{U}'_i \sum_{j=1}^n y_{ij} e^{-j\psi_{ij}} \dot{U}'_j = S_i e^{j\psi_i}. \quad (7)$$

Сопоставляя (5) и (7), заключаем, что если напряжения $\dot{U}_i = U_i e^{j\psi_i}$ удовлетворяют уравнениям (5), то решением уравнений (7) будет

$$\dot{U}'_i = \hat{U}'_i = U_i e^{-j\psi_i}. \quad (8)$$

Установим связь между токами и мощностями прямой и двойственной сетей.

Ток прямой сети выражается законом Ома:

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}_i - \dot{U}_j}{Z} = \frac{\Delta U e^{j\psi_U}}{Z e^{j\varphi}} = I e^{j\psi_I}.$$

Аналогичным образом для двойственной сети получим

$$\dot{i}' = \frac{\hat{U}'_i - \hat{U}'_j}{j\hat{Z}} = \frac{\Delta U e^{-j\psi_U}}{Z e^{j(90-\varphi)}} = I e^{-j(90+\psi_I)},$$

или же

$$\dot{i}' = -j\hat{I} = -D(\dot{i}). \quad (9)$$

Переток комплексной мощности:

$$\tilde{S}' = \dot{U}' \hat{I}' = \hat{U} j\dot{i} = j\hat{S} = D(\tilde{S}). \quad (10)$$

Аналогичным образом определим также потери комплексной мощности:

$$\Delta \tilde{S}' = D(\Delta \tilde{S}). \quad (11)$$

Таким образом, режимные параметры прямой и двойственной сетей связаны соотношениями

$$\begin{cases} \dot{U}' = \hat{U} = -jD(\dot{U}), \\ \dot{i}' = -j\hat{I} = -D(\dot{i}), \\ \tilde{S}' = D(\tilde{S}), \\ \Delta \tilde{S}' = D(\Delta \tilde{S}). \end{cases} \quad (12)$$

При решении задачи структурного анализа УР в [8] введено понятие ориентированного P графа, при анализе которого выясняется структура взаимобменов активной мощности между потребителями и источником электроэнергии. По аналогии с P графом введем понятие Q графа, топология

которого совпадает с P графом, но ветви ориентированы по направлениям потоков реактивной мощности.

Отметим, что P граф (Q граф) прямой сети изоморфен (с учетом ориентаций) Q графу (P графу) двойственной сети. В общем случае для одной и той же сети (прямой или двойственной) графы P и Q не изоморфны. Последнее означает, что некий потребитель получает свою потребность по активной мощности по одному ориентированному пути, а потребность по реактивной мощности – по другому пути.

Иллюстрация применения понятия двойственности. Рассмотрим численный пример для сети (прямая сеть), представленной на рис. 3. Для продольных (поперечных) ветвей даны активные и реактивные сопротивления (проводимости). Указаны также активные и реактивные узловые мощности (узел 6 базисный).

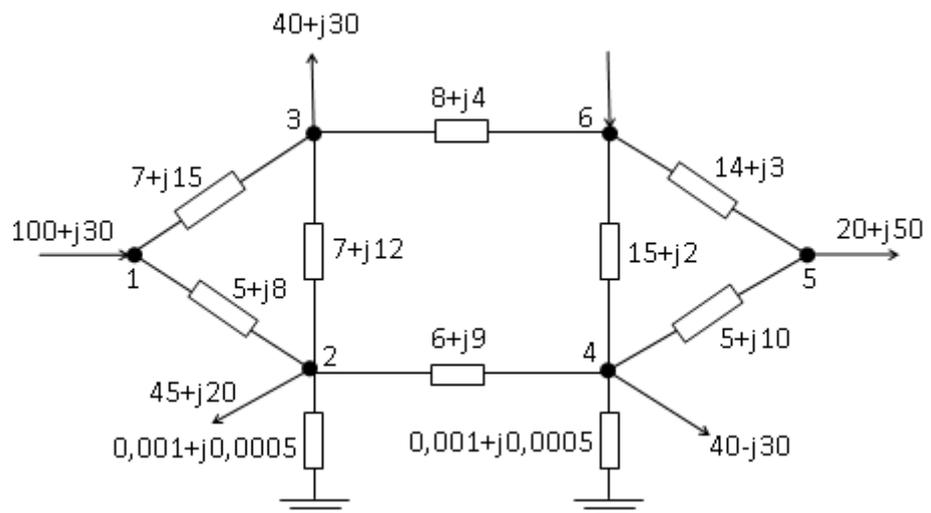


Рис. 3. Прямая сеть и ее параметры

Двойственная сеть и ее параметры приведены на рис. 4.

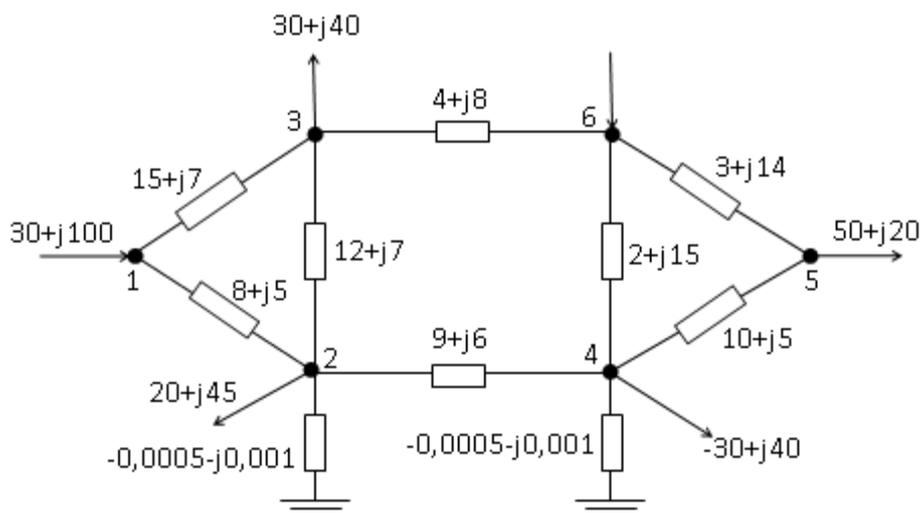


Рис. 4. Двойственная сеть и ее параметры

Приведем результаты расчета УР для прямой и двойственной сетей. В таблице представлены результаты расчета УР по узлам (комплексные узловые напряжения, мощности и токи).

Таблица

Результаты расчетов УР по узлам

N ⁰ узла	Прямая сеть			Двойственная сеть		
	\tilde{s}	\dot{U}	j	\tilde{s}	\dot{U}	j
1	$100+j30$	$111,9e^{-j2,28}$	$0,9-j0,23$	$30+j100$	$111,9e^{-j2,28}$	$0,23-j0,9$
2	$-45-j20$	$107,8e^{j0,1}$	$-0,42+j0,18$	$-20-j45$	$107,8e^{-j0,1}$	$-0,18+j0,42$
3	$-40-j30$	$108,2e^{j0,44}$	$-0,37+j0,27$	$-30-j40$	$108,2e^{-j0,44}$	$-0,27+j0,37$
4	$-40+j30$	$106,9e^{-j0,58}$	$-0,38-j0,27$	$30-j40$	$106,9e^{j0,58}$	$0,27+j0,38$
5	$-20-j50$	$104,8e^{j0,91}$	$-0,19+j0,47$	$-50-j20$	$104,8e^{-j0,91}$	$-0,47+j0,19$
6	$74,4+j35$	110	$0,67-j0,32$	$35+j74$	110	$0,32-j0,67$

На рис. 5 и 6 приведены P и Q графы для прямой и двойственной сетей.

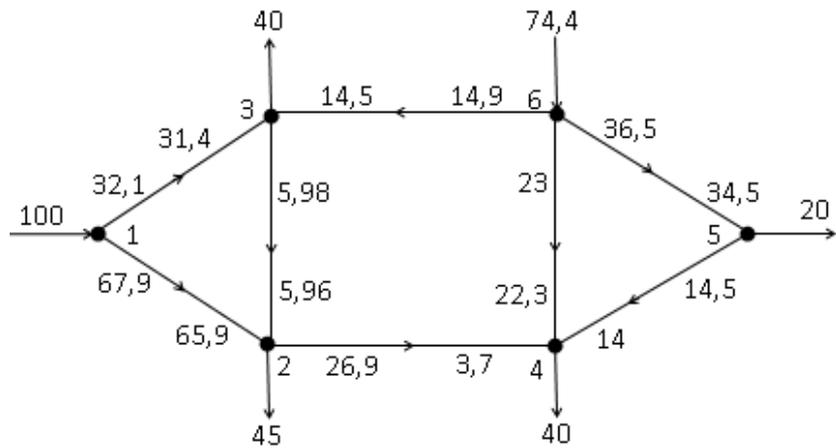


Рис. 5. Прямая сеть и ее P граф (Q граф для двойственной сети)

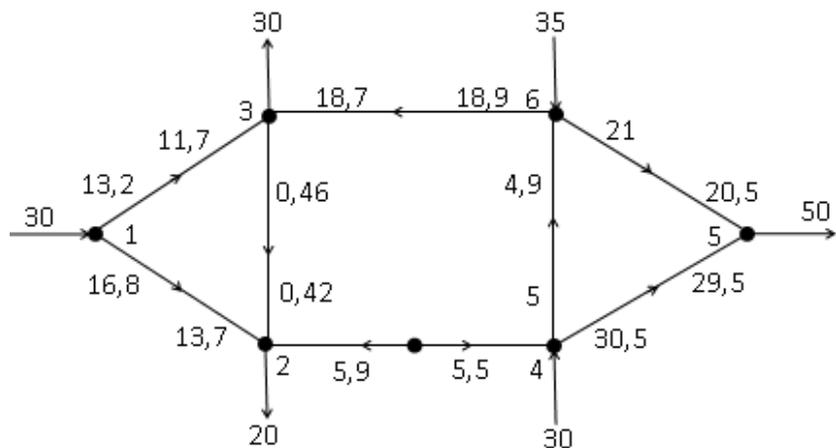


Рис. 6. Двойственная сеть и ее P граф (Q граф для прямой сети)

Из сопоставления графов рис. 5 и 6 видно, что ветви 6-4, 5-4 имеют противоположные ориентации, а ветвь 2-4 в Q графе (рис. 6) стала источником реактивной мощности. Последнее объясняется тем, что линии электропередачи (ветви) рассматриваются как четырехполюсники (рис. 7), и при наличии поперечной емкости в прямой сети ее Q граф (рис. 7а) или P граф для двойственной сети (рис. 7б) являются источниками соответственно реактивной или активной мощности.

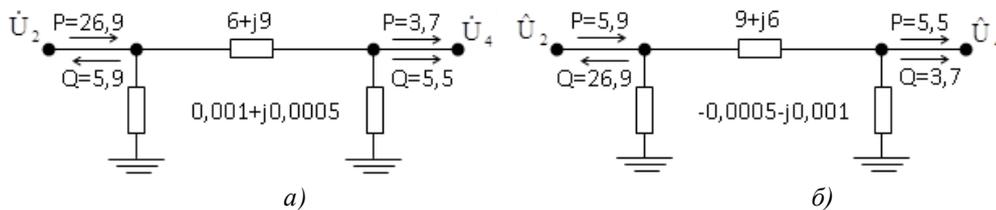


Рис. 7. Представление ветви в виде четырехполюсника соответственно для прямой (а) и двойственной (б) сетей

Выводы

1. На основе принципа двойственности в теории установившегося режима электроэнергетической системы введено понятие двойственности (дуальности), которое позволяет установить:
 - двойственность между сетями и исходными параметрами;
 - двойственность между результатами расчетов прямой и дуальной задач.
2. Понятие двойственности задачи установившегося режима электроэнергетической системы позволяет истолковать понятие реактивной мощности с позиции дуальности, сопоставляя ее с активной мощностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хемди А. Таха. Введение в исследование операций. - М.: Издательский дом "Вильямс", 2005. - 912 с.
2. Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем. - М.: Наука, 1970. - 704 с.
3. Харари Ф. Теория графов. - М.: КомКнига, 2006. - 296 с.
4. Демирчян К.С. Реактивная или обменная мощность // Изв. АН СССР. - 1984. - № 2. - С. 66 - 72.
5. Жарков Ф.П. Об одном способе определения реактивной мощности // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. - 1984. - № 2. - С. 73 - 81.
6. Беркович Е.И. Реактивная мощность как информационное понятие // Электричество. - 1996. - № 2. - С. 51 - 58.
7. Савинский Ю.А., Стратонов А.В. Некоторые противоречия теории мощности // Изв. вузов СССР. Энергетика. - 1984. - № 10. - С. 58 - 60.
8. Сафарян В.С. Структурный анализ потоков и потерь активной мощности в электрических цепях // Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2001. - Т. 54, № 1. - С. 52 - 57.
9. Сафарян В.С. Анализ направлений потоков активной мощности электрических цепей. Энергетика // Изв. вузов и энерг. объединений СНГ. - 2002. - № 4. - С. 39 - 45.

Поступила в редакцию 5.10.2013.
Принята к опубликованию 13.05.2014.

**ԷԼԵԿՏՐԱԷՆԵՐԳԵՏԻԿԱԿԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ԿԱՅՈՒՆԱՑՎԱԾ ՈՒՇԺՄԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ
ԵՐԿԱԿԻՈՒԹՅԱՆ ՍԿԶԲՈՒՆՔԸ**

Վ.Ս. Սաֆարյան, Լ.Վ. Սաֆարյան

Էլեկտրաէներգետիկական համակարգի կայունացված ռեժիմի տեսության մեջ սահմանվում է երկակիության հասկացությունը, ինչը յուրաքանչյուր խնդրի (ուղիղ խնդիր) համար որոշում է դրա երկակին և փոխմիարժեք համապատասխանություն սահմանում նախնական տվյալների և խնդրի լուծման արդյունքների միջև:

Առանցքային բաներ. երկակիություն (երկվայնություն), կայունացված ռեժիմ, ցանցի կառուցվածք, ուղղորդված գրաֆ, իզոմորֆ գրաֆներ, ուղիղ և երկակի ցանցեր:

**THE DUALITY PRINCIPLE IN THE THEORY OF THE STEADY STATE
OF AN ELECTRIC POWER SYSTEM**

V.S. Safaryan, L.V. Safaryan

Based on the duality principle in the theory of the established regime of an electric power system, each problem (direct problem) is compared with a dual problem, and a mutually unambiguous relation between the original data and the results of the problem solution is established.

Keywords: duality, established, regime, network structure, oriented graph, isomorphic graphs, direct and dual networks.