

ЭНЕРГОСИСТЕМЫ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СЕТИ

УДК 621.316

**ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ В ТЕОРИИ УСТАНОВИВШЕГОСЯ  
РЕЖИМА ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ**

**В.С. Сафарян, Л.В. Сафарян**

*ЗАО "Научно-исследовательский институт энергетики РА"*

На основе принципа двойственности в теории установившегося режима электро-энергетической системы каждой задаче (прямая задача) сопоставляется двойственная задача и устанавливается взаимно однозначная связь между исходными данными и результатами решения задач.

**Ключевые слова:** двойственность (дуальность), установившийся режим, структура сети, ориентированный граф, изоморфные графы, прямая и двойственная сети.

**Введение.** В разных отраслях науки (линейное программирование, теория автоматического управления, теория графов, теоретические основы электротехники и т.д.) введены понятия двойственности (дуальности), которые устанавливают тесную связь между прямой и двойственной задачами [1 - 3]. Эти понятия не только дополняют друг друга, но и содержат полезную информацию, а также позволяют обходить трудности при решении задач и анализе результатов расчета.

Известно, что двойственность в задачах линейного программирования позволяет производить анализ чувствительности этих задач к изменению параметров. Метод потенциалов решения транспортной задачи является следствием применения принципа двойственности [1].

В теории автоматического управления каждой системе управления сопоставляется двойственная система по управляемости и наблюдаемости [2].

В теории электрических цепей системы уравнений контурных токов и узловых потенциалов считаются дуальными, что следует из свойства дуальности графов [3].

Понятие "реактивная мощность" в течение длительного времени является предметом споров [4-7]. Строгое определение реактивной мощности имеется только для случая, когда токи и напряжения в цепях синусоидальны по форме. Однако даже для таких цепей реактивная мощность определяется чисто формально [4].

Большинство специалистов видят главное противоречие классической теории мощности в отсутствии универсального, физически обоснованного интегрального выражения для определения реактивной мощности. В классической теории мощности имеют место и другие противоречия [7].

**Постановка задачи.** В данной работе на основе принципа двойственности в теории установившегося режима (УР) введено понятие двойственности, которое позволяет выявить новые свойства задач УР, расширить возможности структурного анализа УР [8, 9], а также истолковать понятие реактивной мощности с позиций двойственности, сопоставляя ее с активной мощностью.

**Определение и применение понятия двойственности.** Введем некоторые понятия и определения.

Комплексной величине

$$Z = R + jX = Ze^{j\varphi} \quad (1)$$

сопоставим комплексную величину  $D(Z)$ :

$$D(Z) = j\hat{Z} = j(R - jX) = X + jr = Ze^{j(90-\varphi)} \quad (2)$$

и назовем  $D(Z)$  ( $Z' = D(Z)$ ) двойственной по отношению к  $Z$ .

Очевидно, что

$$D(D(Z)) = D(j\hat{Z}) = j(-jZ) = Z. \quad (3)$$

Из определения преобразования двойственности очевидно, что  $|Z| = |D(Z)|$ ,

$\arg(Z) + \arg(D(Z)) = \frac{\pi}{2}$  (рис. 1).

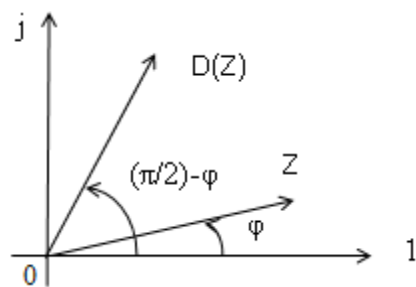


Рис. 1. Геометрическая интерпретация преобразования двойственности

Приведем некоторые свойства преобразования двойственности:

$$\begin{cases} D(Z_1 + Z_2) = j(\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2) = D(Z_1) + D(Z_2), \\ D(Z_1 Z_2) = j(\hat{Z}_1 \hat{Z}_2) = -jD(Z_1)D(Z_2), \\ D(Z_1/Z_2) = j\hat{Z}_1/\hat{Z}_2 = jD(Z_1)/D(Z_2). \end{cases} \quad (4)$$

Электрическая сеть характеризуется:

- структурой (топологией) сети, которая представляется графом;
- пассивными параметрами (активными и реактивными сопротивлениями линий и трансформаторов, коэффициентами трансформации, активными и реактивными проводимостями поперечных элементов);
- активными параметрами, т.е. активными и реактивными узловыми мощностями.

При составлении двойственной сети топология не деформируется, а пассивные и активные параметры определяются согласно (2).

На рис. 2а представлены электрическая сеть (для определенности ее назовем прямой сетью), на рис. 2б – двойственная ей сеть.

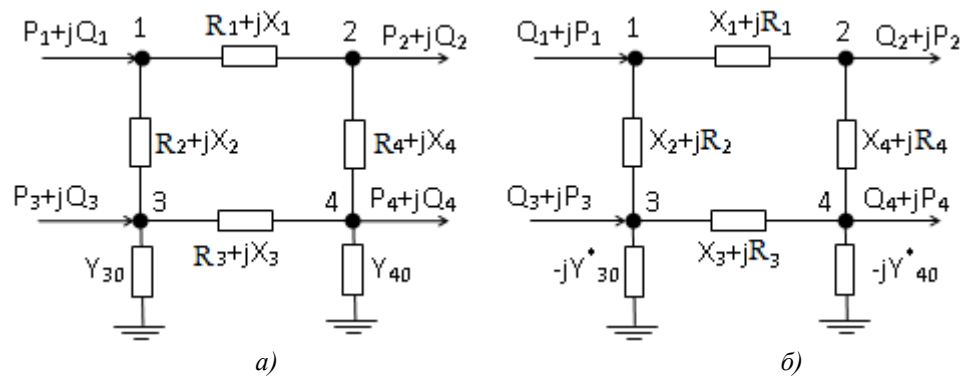


Рис. 2. Прямая (а) и двойственная ей (б) сети

Составим систему уравнений УР для прямой сети:

$$\hat{U}_i \sum_{j=1}^n Y_{ij} \hat{U}_j = \hat{S}_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (5)$$

где  $\hat{U}_i$  ( $\hat{U}_i$ ) - комплексные (комплексно-сопряженные) напряжения узла;  $\hat{S}_i$  - комплексно-сопряженная полная мощность узла;  $Y_{ij}$  - элемент комплексной матрицы узловых проводимостей.

Составим систему уравнений УР для двойственной сети:

$$\hat{U}'_i \sum_{j=1}^n D(Y_{ij}) \hat{U}'_j = D(\hat{S}_i), \quad (6)$$

где  $\hat{U}'_i$  - напряжения в узлах двойственной сети.

Преобразуя (6), получим

$$\hat{U}'_i \sum_{j=1}^n y_{ij} e^{-j\left(\frac{\pi}{2} + \psi_{ij}\right)} \dot{U}'_j = S_i e^{-j\left(\frac{\pi}{2} - \psi_i\right)},$$

или же

$$\hat{U}'_i \sum_{j=1}^n y_{ij} e^{-j\psi_{ij}} \dot{U}'_j = S_i e^{j\psi_i}. \quad (7)$$

Сопоставляя (5) и (7), заключаем, что если напряжения  $\dot{U}_i = U_i e^{j\psi_i}$  удовлетворяют уравнениям (5), то решением уравнений (7) будет

$$\dot{U}'_i = \hat{U}'_i = U_i e^{-j\psi_i}. \quad (8)$$

Установим связь между токами и мощностями прямой и двойственной сетей.

Ток прямой сети выражается законом Ома:

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}_i - \dot{U}_j}{Z} = \frac{\Delta U e^{j\psi_U}}{Z e^{j\varphi}} = I e^{j\psi_I}.$$

Аналогичным образом для двойственной сети получим

$$\dot{i}' = \frac{\hat{U}'_i - \hat{U}'_j}{j\hat{Z}} = \frac{\Delta U e^{-j\psi_U}}{Z e^{j(90-\varphi)}} = I e^{-j(90+\psi_I)},$$

или же

$$\dot{i}' = -j\hat{I} = -D(\dot{i}). \quad (9)$$

Переток комплексной мощности:

$$\tilde{S}' = \dot{U}' \hat{I}' = \hat{U} j\dot{i} = j\hat{S} = D(\tilde{S}). \quad (10)$$

Аналогичным образом определим также потери комплексной мощности:

$$\Delta \tilde{S}' = D(\Delta \tilde{S}). \quad (11)$$

Таким образом, режимные параметры прямой и двойственной сетей связаны соотношениями

$$\begin{cases} \dot{U}' = \hat{U} = -jD(\dot{U}), \\ \dot{i}' = -j\hat{I} = -D(\dot{i}), \\ \tilde{S}' = D(\tilde{S}), \\ \Delta \tilde{S}' = D(\Delta \tilde{S}). \end{cases} \quad (12)$$

При решении задачи структурного анализа УР в [8] введено понятие ориентированного  $P$  графа, при анализе которого выясняется структура взаимобменов активной мощности между потребителями и источником электроэнергии. По аналогии с  $P$  графом введем понятие  $Q$  графа, топология

которого совпадает с  $P$  графом, но ветви ориентированы по направлениям потоков реактивной мощности.

Отметим, что  $P$  граф ( $Q$  граф) прямой сети изоморфен (с учетом ориентаций)  $Q$  графу ( $P$  графу) двойственной сети. В общем случае для одной и той же сети (прямой или двойственной) графы  $P$  и  $Q$  не изоморфны. Последнее означает, что некий потребитель получает свою потребность по активной мощности по одному ориентированному пути, а потребность по реактивной мощности – по другому пути.

**Иллюстрация применения понятия двойственности.** Рассмотрим численный пример для сети (прямая сеть), представленной на рис. 3. Для продольных (поперечных) ветвей даны активные и реактивные сопротивления (проводимости). Указаны также активные и реактивные узловые мощности (узел 6 базисный).

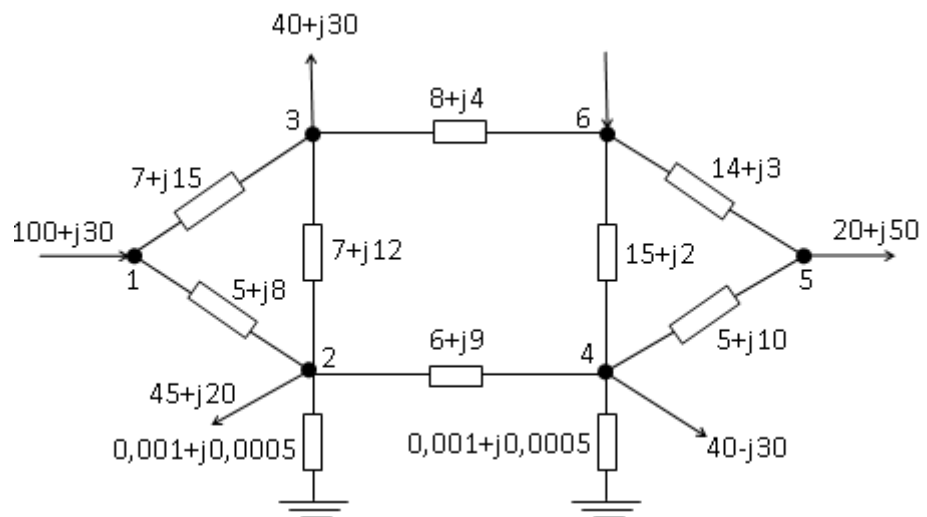


Рис. 3. Прямая сеть и ее параметры

Двойственная сеть и ее параметры приведены на рис. 4.

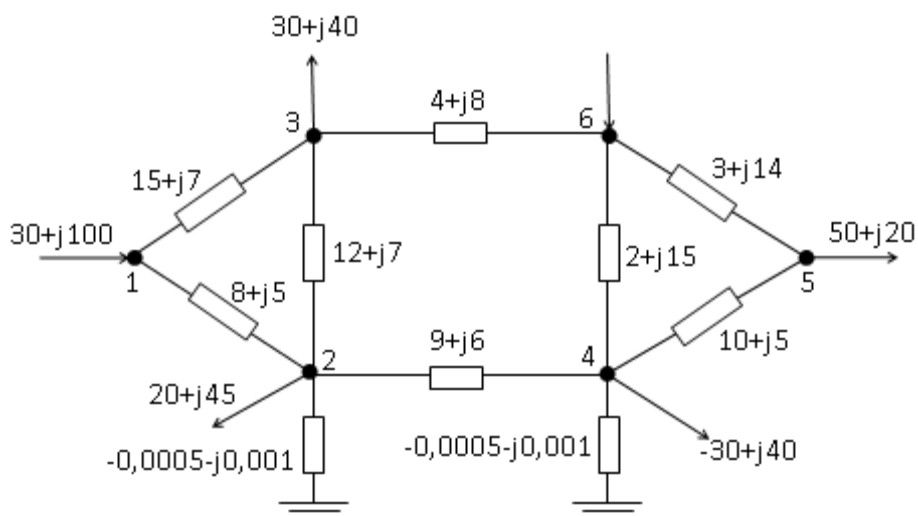


Рис. 4. Двойственная сеть и ее параметры

Приведем результаты расчета УР для прямой и двойственной сетей. В таблице представлены результаты расчета УР по узлам (комплексные узловые напряжения, мощности и токи).

Таблица

Результаты расчетов УР по узлам

N <sup>0</sup> узла	Прямая сеть			Двойственная сеть		
	$\tilde{s}$	$\dot{U}$	$j$	$\tilde{s}$	$\dot{U}$	$j$
1	$100+j30$	$111,9e^{-j2,28}$	$0,9-j0,23$	$30+j100$	$111,9e^{-j2,28}$	$0,23-j0,9$
2	$-45-j20$	$107,8e^{j0,1}$	$-0,42+j0,18$	$-20-j45$	$107,8e^{-j0,1}$	$-0,18+j0,42$
3	$-40-j30$	$108,2e^{j0,44}$	$-0,37+j0,27$	$-30-j40$	$108,2e^{-j0,44}$	$-0,27+j0,37$
4	$-40+j30$	$106,9e^{-j0,58}$	$-0,38-j0,27$	$30-j40$	$106,9e^{j0,58}$	$0,27+j0,38$
5	$-20-j50$	$104,8e^{j0,91}$	$-0,19+j0,47$	$-50-j20$	$104,8e^{-j0,91}$	$-0,47+j0,19$
6	$74,4+j35$	$110$	$0,67-j0,32$	$35+j74$	$110$	$0,32-j0,67$

На рис. 5 и 6 приведены P и Q графы для прямой и двойственной сетей.

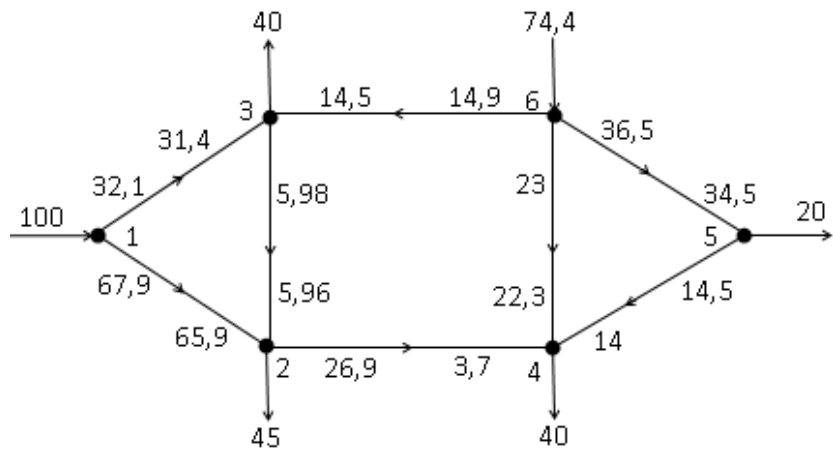


Рис. 5. Прямая сеть и ее  $P$  граф ( $Q$  граф для двойственной сети)

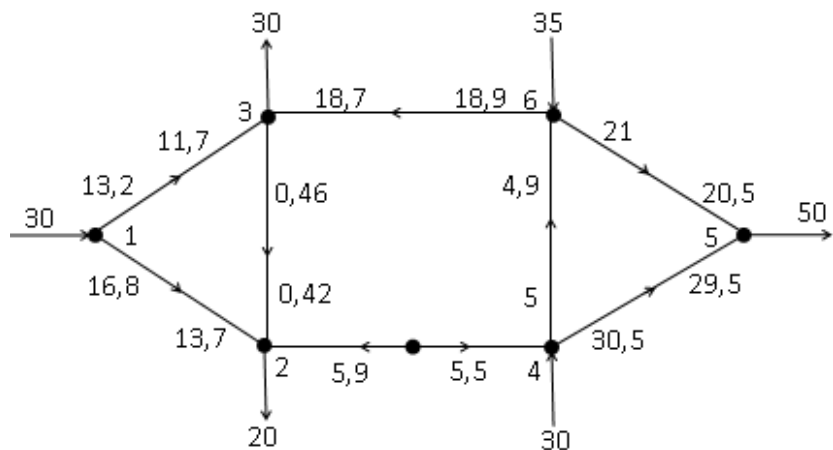


Рис. 6. Двойственная сеть и ее  $P$  граф ( $Q$  граф для прямой сети)

Из сопоставления графов рис. 5 и 6 видно, что ветви 6-4, 5-4 имеют противоположные ориентации, а ветвь 2-4 в  $Q$  графе (рис. 6) стала источником реактивной мощности. Последнее объясняется тем, что линии электропередачи (ветви) рассматриваются как четырехполюсники (рис. 7), и при наличии поперечной емкости в прямой сети ее  $Q$  граф (рис. 7а) или  $P$  граф для двойственной сети (рис. 7б) являются источниками соответственно реактивной или активной мощности.

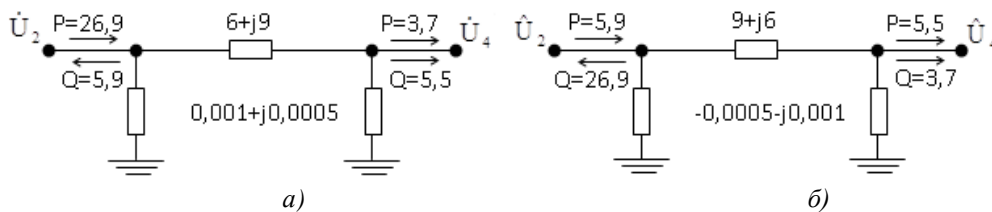


Рис. 7. Представление ветви в виде четырехполюсника соответственно для прямой (а) и двойственной (б) сетей

### Выводы

1. На основе принципа двойственности в теории установившегося режима электроэнергетической системы введено понятие двойственности (дуальности), которое позволяет установить:
  - двойственность между сетями и исходными параметрами;
  - двойственность между результатами расчетов прямой и дуальной задач.
2. Понятие двойственности задачи установившегося режима электроэнергетической системы позволяет истолковать понятие реактивной мощности с позиции дуальности, сопоставляя ее с активной мощностью.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хемди А. Таха. Введение в исследование операций. - М.: Издательский дом "Вильямс", 2005. - 912 с.
2. Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем. - М.: Наука, 1970. - 704 с.
3. Харари Ф. Теория графов. - М.: КомКнига, 2006. - 296 с.
4. Демирчян К.С. Реактивная или обменная мощность // Изв. АН СССР. - 1984. - № 2. - С. 66 - 72.
5. Жарков Ф.П. Об одном способе определения реактивной мощности // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. - 1984. - № 2. - С. 73 - 81.
6. Беркович Е.И. Реактивная мощность как информационное понятие // Электричество. - 1996. - № 2. - С. 51 - 58.
7. Савинский Ю.А., Стратонов А.В. Некоторые противоречия теории мощности // Изв. вузов СССР. Энергетика. - 1984. - № 10. - С. 58 - 60.
8. Сафарян В.С. Структурный анализ потоков и потерь активной мощности в электрических цепях // Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2001. - Т. 54, № 1. - С. 52 - 57.
9. Сафарян В.С. Анализ направлений потоков активной мощности электрических цепей. Энергетика // Изв. вузов и энерг. объединений СНГ. - 2002. - № 4. - С. 39 - 45.

Поступила в редакцию 5.10.2013.  
Принята к опубликованию 13.05.2014.



ԷԼԵԿՏՐԱԷՆԵՐԳԵՏԻԿԱԿԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ԿԱՅՈՒՆԱՑՎԱԾ ՈՒՇԻՄԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ  
ԵՐԿԱԿԻՈՒԹՅԱՆ ՍԿԶԲՈՒՆՔԸ

Վ.Ս. Սաֆարյան, Լ.Վ. Սաֆարյան

Էլեկտրաէներգետիկական համակարգի կայունացված ռեժիմի տեսության մեջ սահմանվում է երկակիության հասկացությունը, ինչը յուրաքանչյուր խնդրի (ուղիղ խնդիր) համար որոշում է դրա երկակին և փոխմիարժեք համապատասխանություն սահմանում նախնական տվյալների և խնդրի լուծման արդյունքների միջև:

**Առանցքային բաներ.** երկակիություն (երկվայնություն), կայունացված ռեժիմ, ցանցի կառուցվածք, ուղղորդված գրաֆ, իզոմորֆ գրաֆներ, ուղիղ և երկակի ցանցեր:

THE DUALITY PRINCIPLE IN THE THEORY OF THE STEADY STATE  
OF AN ELECTRIC POWER SYSTEM

V.S. Safaryan, L.V. Safaryan

Based on the duality principle in the theory of the established regime of an electric power system, each problem (direct problem) is compared with a dual problem, and a mutually unambiguous relation between the original data and the results of the problem solution is established.

**Keywords:** duality, established, regime, network structure, oriented graph, isomorphic graphs, direct and dual networks.