УДК 621.317.39.531.767

К ИССЛЕДОВАНИЮ ЗАВИСИМОСТИ РЕЖИМНЫХ ПАРАМЕТРОВ ОТ ПАССИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ МЕТОДОМ СТРУКТУРНЫХ ЧИСЕЛ

Г.В. Арутюнян

Национальный политехнический университет Армении

Работа посвящена получению аналитической зависимости комплексного тока k- й ветви от комплексного сопротивления i- й ветви в линейных электрических цепях и исследованию ее свойств. Функция $\dot{I}_k(\mathrm{Z}_i)$ получается методом алгебры структурных чисел. Используется свойство структурного числа (дополнительного структурного числа) графа электрической цепи, которое является множеством всех возможных подграфов деревьев (дополнений). Согласно определению, детерминант матрицы узловых проводимостей (контурных сопротивлений) электрической цепи есть сумма произведений проводимостей (сопротивлений) ветвей всех возможных деревьев (дополнений) графа цепи. Согласно методу алгебры структурных чисел, детерминантная функция структурного числа (дополнительного структурного числа) есть детерминант матрицы узловых проводимостей (контурных сопротивлений). Алгебраические дополнения указанных матриц получаются с помощью детерминантной функции алгебраических производных структурного числа (дополнительного структурного числа) графа. Вывод требуемой зависимости сводится к получению указанных детерминантов и их алгебраических дополнений в символьном виде. Метод алгебры структурных чисел дает возможность алгоритмизации данной задачи, в результате чего зависимость $\dot{I}_k(\mathrm{Z}_i)$ получается в виде дробно–линейной функции комплексной переменной. Проводится анализ полученной функции, и ее свойства приписываются электрической цепи.

Ключевые слова: структурные числа, дробно-линейная функция комплексной переменной, режимные параметры, пассивные элементы.

Введение. При расчете электрических цепей трудности, связанные с ограничениями по быстродействию и оперативной памяти ЭВМ, преодолеваются, и на первый план выдвигаются задачи исследовательского характера по выявлению новых свойств цепей. Решение подобных задач возможно лишь при установлении аналитических связей между режимными и пассивными параметрами цепи. В классических трудах по теоретическим основам электротехники существуют выражения для расчета режимных параметров цепи, вызванные изменением пассивного элемента какой-либо ветви цепи.

Согласно теореме вариаций [1] (теореме об изменении токов в электрической цепи при изменении сопротивления в одной ветви [2,3]), изменения токов $\Delta\dot{I}_m, \Delta\dot{I}_n$ в ветвях схемы можно рассчитать в зависимости от изменения сопротивления n- й ветви на ΔZ:

$$\Delta\dot{I}_m = -Y_{mn}\,\Delta Z(\dot{I}_n + \Delta\dot{I}_n),\ \Delta\dot{I}_n = -Y_{nn}\,\Delta Z(\dot{I}_n + \Delta\dot{I}_n), \tag{1}$$

где Y_{mn}, Y_{nn} - взаимная и входная проводимости; $\dot{I}_m, (\dot{I}_n)$ - первоначальный ток в m (n)- й ветви. Из (1) получается выражение для скорректированного тока $\dot{I}_n'$:

$$\dot{I}_n' = \dot{I}_n + \Delta\dot{I}_n = \dot{I}_n - \frac{Y_{nn}\Delta Z\dot{I}_n}{1+Y_{nn}\Delta Z} = \dot{I}_n\frac{1}{1+Y_{nn}\Delta Z}, \tag{2}$$

которое является рекуррентным соотношением.

В работе [4] путем довольно трудоемкого преобразования свертывания получена зависимость режимного параметра от пассивного элемента цепи в виде дробно-линейной функции комплексной переменной [5].

Постановка задачи и обоснование методики. Целью данной работы является получение аналитической зависимости комплексного тока k - й ветви от комплексного сопротивления i- й ветви в линейных электрических цепях и исследование ее свойств.

Используя структурное число (дополнительное структурное число) [6] графа электрической цепи, получается описанная выше зависимость.

Состояние электрической системы из p ячеек опишем методом контурных токов [1-3]:

$$Z\dot{I} = \dot{E}, \tag{3}$$

где Z - квадратная матрица контурных сопротивлений; $\dot{I}$ - вектор-столбец контурных токов; $\dot{E}$ - вектор-столбец контурных электродвижущих сил (ЭДС).

Уравнение (3) в развернутом виде при выборе ячейки p в качестве базисной имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1(p-1)} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2(p-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{(p-1)1} & Z_{(p-1)2} & \dots & Z_{(p-1)(p-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dots \\ \dot{I}_{(p-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \\ \dots \\ \dot{E}_{(p-1)} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Выражение для определения контурного тока в k- ом контуре [1-3] имеет вид

$$\dot{I}_k = \frac{1}{\Delta z}\dot{E}_1\Delta_{1k} + \frac{1}{\Delta z}\dot{E}_2\Delta_{2k} + \dots + \frac{1}{\Delta z}\dot{E}_k\Delta_{kk} + \dots + \frac{1}{\Delta z}\dot{E}_{(p-1)}\Delta_{(p-1)k}. \tag{5}$$

Согласно методу структурных чисел [6], определитель матрицы контурных сопротивлений Δz является детерминантной функцией дополнительного структурного числа A^d графа цепи, которое получается в символьном виде путем вычисления суммы произведений сопротивлений ветвей дополнений [6]:

$$\Delta z = det_z A^d. \tag{6}$$

Дополнительное структурное число графа является таблицей, столбцы которой есть дополнения графа, и вычисляется путем перемножения структурных чисел $(p-1)$ ячеек графа [6]:

$$A^d = Q_1 \cdot Q_2 \cdot \dots \cdot Q_i \cdot \dots \cdot Q_{p-1}, \tag{7}$$

где Q_i - структурное число i- й ячейки (объединение ребер i- й ячейки).

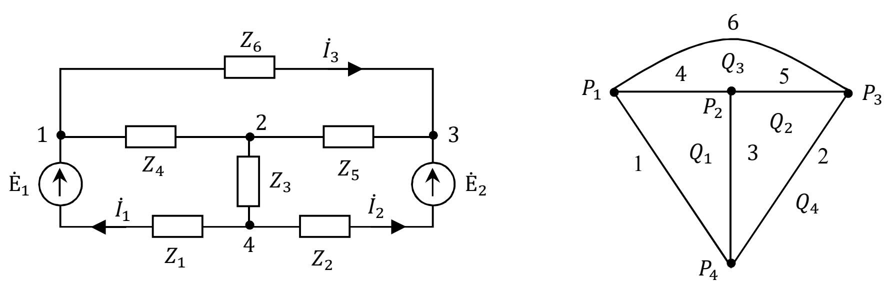
Алгебраические дополнения матрицы контурных сопротивлений Δ_{km} вычисляются как сумма произведений сопротивлений ветвей 2 - дополнений графа цепи. Согласно методу структурных чисел, алгебраическим дополнениям соответствует детерминантная функция совпадения по элементам k и m [6]:

$$\Delta_{km}= det_z\left(\frac{\partial A^d}{\partial B_k}\cap\frac{\partial A^d}{\partial B_m}\right), \tag{8}$$

где B_k и B_m- структурные числа сечений от ячеек k и m до базисной; $\frac{\partial A^d}{\partial B_k}$ $\left(\frac{\partial A^d}{\partial B_m}\right)$ – алгебраическая производная дополнительного структурного числа A^d по сечению $B_k(B_m)$, являющаяся суммой алгебраических производных $\frac{\partial A^d}{\partial \alpha_k}\left(\frac{\partial A^d}{\partial \alpha_m}\right)$; α_k- элемент структурного числа $B_k(B_m)$. Из (8) следует, что при $k=m$ имеем

$$\Delta_{kk}= det_z\frac{\partial A^d}{\partial B_k}. \tag{9}$$

Проиллюстрируем описанный метод на примере. Рассмотрим цепь (рис.1а), граф которой изображен на рис. 1б.



а) б)

Рис.1. Схема (а) и граф (б) электрической цепи

Методом структурных чисел получим аналитическое выражение для контурного тока $\dot{I}_1$:

$$\dot{I}_1=\frac{1}{\Delta z}\dot{E}_1\Delta_{11}+\frac{1}{\Delta z}\dot{E}_2\Delta_{21}. \tag{10}$$

С учетом (6)-(8) выражение (10) примет вид

$$\dot{I}_1=\dot{E}_1\frac{1}{det_zA^d}det_z\frac{\partial A^d}{\partial B_1}+\dot{E}_2\frac{1}{det_zA^d}det_z\left(\frac{\partial A^d}{\partial B_2}\cap\frac{\partial A^d}{\partial B_1}\right). \tag{11}$$

С учетом (7) вычислим дополнительное структурное число графа:

$$A^d=[134]\cdot[235]\cdot[456]=\begin{bmatrix}1211122131221314\\2335234342343455\\4444555556666666\end{bmatrix}.$$

Согласно (6) вычислим детерминантную функцию числа A^d:

$$det_zA^d=Z_1Z_2Z_4+Z_2Z_3Z_4+\cdots+Z_1Z_5Z_6+Z_4Z_5Z_6.$$

Вычислим алгебраические производные по сечению $B_1=[1]$ $(B_2=[2])$ числа A^d [6]:

$$\frac{\partial A^d}{\partial 1} = \begin{bmatrix} 23523235 \\ 44455666 \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial A^d}{\partial 2} = \begin{bmatrix} 13134134 \\ 44555666 \end{bmatrix}.$$

С учетом (9) вычислим детерминантную функцию числа $\frac{\partial A^d}{\partial 1}$:

$$det_z \frac{\partial A^d}{\partial B_1} = Z_2Z_4 + Z_3Z_4 + \cdots + Z_3Z_6 + Z_5Z_6.$$

Из (8) вычислим детерминантную функцию совпадения чисел $\frac{\partial A^d}{\partial 1}$ и $\frac{\partial A^d}{\partial 2}$:

$$det_z \left(\frac{\partial A^d}{\partial B_k} \cap \frac{\partial A^d}{\partial B_m}\right) = Z_3Z_4 + Z_3Z_5 + Z_4Z_5 + Z_3Z_6.$$

Подставив полученные выражения в (11), получим

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1(Z_2Z_4+Z_3Z_4+Z_5Z_4+Z_2Z_5+Z_3Z_5+Z_2Z_6+Z_3Z_6+Z_5Z_6)+\dot{E}_2(Z_3Z_4+Z_3Z_5+Z_4Z_5+Z_3Z_6)}{Z_1Z_2Z_4+Z_2Z_3Z_4+Z_1Z_3Z_4+Z_1Z_5Z_4+\cdots+Z_1Z_3Z_6+Z_3Z_4Z_6+Z_1Z_5Z_6+Z_4Z_5Z_6}. \quad (12)$$

При исследовании зависимости $\dot{I}_1(Z_1)$ выражение (12) примет вид

$$\dot{I}_1(Z_1) = \frac{\dot{E}_1 a + \dot{E}_2 b}{cZ_1 + d} = \frac{\alpha}{Z_1 + \beta}, \quad (13)$$

где a, b, c, d - комплексные постоянные, $\alpha = \left(\dot{E}_1 a + \dot{E}_2 b\right)/c$, $\beta = d/c$.

При исследовании зависимости $\dot{I}_1(Z_2)$ выражение (12) примет вид

$$\dot{I}_1(Z_2) = \frac{a\mathrm{Z}_2 + \dot{E}_1 b' + \dot{E}_2 b"}{cZ_2 + d} = \alpha \frac{\mathrm{Z}_2 + \beta}{Z_2 + \gamma}, \quad (14)$$

где $\alpha = a/c$, $\beta = (\dot{E}_1 b' + \dot{E}_2 b")/a$, $\gamma = d/c$.

Таким образом, получены аналитические выражения зависимости $\dot{I}_k(Z_i)$ в виде дробно–линейной функции комплексной переменной

$$\dot{I}_k = \frac{a_i\mathrm{Z}_i + b_i}{c\mathrm{Z}_i + d}, \quad (15)$$

где $Z_i = r + jx$ – комплексная переменная. Причем при $k = i$ выражение (15) перепишется в следующем виде:

$$\dot{I}_i = \frac{a}{c\mathrm{Z}_i + d}. \quad (16)$$

Аналогичным образом можно получить зависимость $\dot{\varphi}_k(Y_i)$, предварительно вычислив структурное число графа [6]:

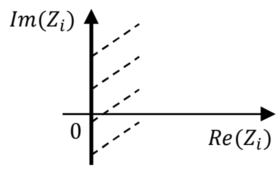
$$A = P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_i \cdot \ldots \cdot P_{q-1},$$

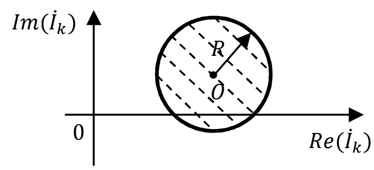
где P_i - структурное число i -го узла (объединение ребер i-го узла).

Результаты исследования. Так как отображение (15) непрерывно в области $Re(Z_i) \geq 0$, то согласно принципу максимума модуля [7], максимальное значение тока $\dot{I}_k$ получается на границе области.

Найдем отображение полуплоскости $Re(Z_i) \geq 0$ функцией $\dot{I}_k = \frac{a_i\mathrm{Z}_i + b_i}{c\mathrm{Z}_i + d}$. Из кругового свойства дробно–линейной функции следует, что ось $Im(Z_i) = 0$ отобразится в окружность, а полуплоскость $Re(Z_i) > 0$ отобразится во внутреннюю область окружности, если (15) не имеет особой точки, т.е. $Z_i \neq -\frac{d}{c}$ [7].

Иллюстрация данного преобразования представлена на рис. 2а, б.





а) б)

Рис.2. Аргумент дробно–линейной функции (а) и геометрическое место вектора $\dot{I}_k$ (б)

Используя отображения на комплексной плоскости, возможно исследовать свойства зависимости (15) на предмет обнаружения множества значений Z_i, при которых ток k- й ветви ($\dot{I}_k$) не изменится по модулю или по фазе, т.е.

- $|\dot{I}_k| = I_k = const$
- $arg(\dot{I}_k) = const.$

Из свойства симметричности дробно–линейной функции следует, что если сопротивления Z_m и Z_n симметричны относительно некоторой прямой в полуплоскости $Re(Z_i) > 0$, тогда соответствующие им токи будут симметричны относительно образа этой прямой на комплексной плоскости $\dot{I}_k$ [7].

В частном случае рассмотрим зависимость $I_k(r_i)$ для цепи постоянного тока. Выражение (15) примет вид

$$I_k = \frac{a_i r_i + b_i}{c r_i + d}, \quad (17)$$

где a_i, b_i, c, d - действительные постоянные.

Знаменатель полученного выражения есть величина положительная согласно (11) и (12), следовательно, $c > 0, d > 0$. Числитель есть алгебраическая сумма произведений соответствующих ЭДС на алгебраические дополнения, следовательно, величины a_i, b_i могут быть как положительными, так и отрицательными.

При $r_i = 0$ - $I_k = \frac{b_i}{d}$; при $r_i \to \infty$ - $I_k \to \frac{a_i}{c}$. Из (17) следует, что ток I_k может изменить направление, если $r_i = -\frac{b_i}{a_i} > 0$.

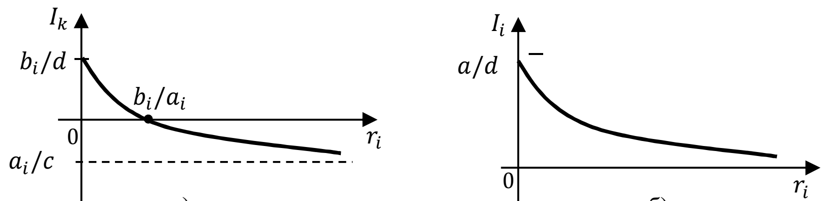
Качественная зависимость $I_k(r_i)$ приведена на рис. 3а.

При $k = i$ выражение (16) примет вид

$$I_i = \frac{a}{c r_i + d} = \frac{a/c}{r_i + d/c}. \quad (18)$$

Сопоставляя (18) с методом эквивалентного генератора, можно утверждать, что a/c - напряжение холостого хода между зажимами -й ветви, d/c- эквивалентное сопротивление пассивной цепи относительно разомкнутых зажимов i- й ветви, r_i - сопротивление i- й ветви.

При $r_i = 0$ - $I_i = \frac{a}{d}$; при $r_i \to \infty$ - $I_i \to 0$. Качественная зависимость $I_i(r_i)$ приведена на рис. 3б. Из выражения (18) следует, что невозможно изменить направление тока I_i, изменяя сопротивление r_i.



а) б)

Рис.3. Качественные зависимости: а - $I_k(r_i)$; б - $I_i(r_i)$

Выводы

1. Получены аналитические зависимости $\dot{I}_k = \frac{a_i Z_i + b_i}{c Z_i + d}$ и $\dot{I}_i = \frac{a}{c Z_i + d}$ в виде дробно-линейной функции комплексной переменной.
2. Проведено исследование свойств полученной зависимости для электрической цепи на основании кругового свойства и свойства симметричности, а также принципа максимума модуля дробно-линейной функции комплексной переменной.
3. Путем исследования полученной зависимости для цепи постоянного тока выявлено свойство о возможности изменения направления тока ветви при изменении сопротивления в другой ветви.

Литература

1. **Поливанов К.М.** Теоретические основы электротехники. Ч.1.- М., Л.: Энергия, 1965. - 360 с.
2. Теоретические основы электротехники. – Т.1 / Под ред. **П.А. Ионкина**.- М.: Высшая школа, 1976. – 544 с.
3. **Атабеков Г.И.** Теоретические основы электротехники.– СПб.: Лань, 2009.- 592 с.
4. **Сафарян В.С.** Применение дробно-линейных функций комплексной переменной к исследованию линейных электрических цепей // Изв. АН АрмССР. Сер. ТН.- 1987.- Т. XL, N2.- С. 11-14.
5. **Максимович Н.Г.** Линейные электрические цепи и их преобразования. - М., Л.: Госэнергоиздат, 1961.- 265 с.
6. **Беллерт С., Возняцки Г.** Анализ и синтез электрических цепей методом структурных чисел.- М.: МИР, 1972.- 332 с.
7. **Маркушевич А.И.** Краткий курс теории аналитических функций.- М.: Наука, 1966.- 388 с.

Поступила в редакцию 27.11.2017.
Принята в опубликованию13.12.2017.

ԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ՇՂԹԱՅԻ ՌԵԺԻՄԱՅԻՆ ՊԱՐԱՄԵՏՐԵՐԻ ՊԱՍՍԻՎ ՏԱՐՐԵՐԻՑ ԿԱԽՎԱԾՈՒԹՅԱՆ ՀԵՏԱԶՈՏՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ԿԱՌՈՒՑՎԱԾՔԱՅԻՆ ԹՎԵՐԻ ԿԻՐԱՌՄԱՄԲ

Գ.Վ. Հարությունյան

Աշխատանքը նվիրված է գծային էլեկտրական շղթաներում k- րդ ճյուղի հոսանքի i- րդ ճյուղի դիմադրությունից անալիտիկական արտահայտություն ստանալուն և դրա հատկությունների հետազոտմանը: $\dot{I}_k(Z_i)$ ֆունկցիան ստացվում է կառուցվածքային թվերի հանրահաշվի մեթոդով: Էլեկտրական շղթայի գրաֆի կառուցվածքային թիվը (լրացուցիչ կառուցվածքային թիվը) հանդիսանում է գրաֆի բոլոր հնարավոր ծառ (լրացում) - ենթագրաֆների բազմությունը: Ըստ սահմանման՝ հանգուցային հաղորդականությունների (կոնտուրային դիմադրությունների) մատրիցի դետերմինանտը հավասար է բոլոր հնարավոր ծառերի (լրացումների) ճյուղերի հաղորդականությունների (դիմադրությունների) արտադրյալների գումարին: Համաձայն կառուցվածքային թվերի հանրահաշվի մեթոդի՝ կառուցվածքային թվի (լրացուցիչ կառուցվածքային թվի) դետերմինանտային ֆունկցիան հանգուցային հաղորդականությունների (կոնտուրային դիմադրությունների) մատրիցի դետերմինանտն է: Նշված մատրիցների հանրահաշվական լրացումները ստացվում են որպես կառուցվածքային թվի (լրացուցիչ կառուցվածքային թվի) հանրահաշվական ածանցյալների դետերմինանտային ֆունկցիա: Պահանջվող կախվածության ստացումը հանգում է նշված դետերմինանտների և հանրահաշվական լրացումների սիմվոլիկ տեսքով ստացմանը: Կառուցվածքային թվերի հանրահաշվի մեթոդը թույլ է տալիս ալգորիթմացնել խնդիրը, նաև արդյունքում՝ հատկությունը, որի համաձայն կիրառվում է կառուցվածքային թվերի մեթոդը, և $\dot{I}_k(Z_i)$ կախվածությունը ստացվում է կոմպլեքս փոփոխականի կոտորակագծային ֆունկցիայի տեսքով: Այնուհետև կատարվում է ստացված ֆունկցիայի վերլուծություն, և դրա հատկությունները վերագրվում են էլեկտրական շղթային:

Առանցքային բառեր. ռեժիմային պարամետրեր, կոմպլեքս փոփոխականի կոտորակագծային ֆունկցիա, կառուցվածքային թվեր, պասսիվ տարրեր:

RESEARCH OF THE DEPENDENCE OF REGIME PARAMETERS ON THE PASSIVE ELEMENTS OF THE ELECTRIC CIRCUIT BY THE METHOD OF STRUCTURAL NUMBERS

G.V. Harutyunyan

The work is devoted to obtaining the analytical dependence of the complex current of the *k*-th branch on the complex resistance of the *i*-th branch in linear electric circuits and the study of its properties. The function $\dot{I}_k(Z_i)$ is obtained by the method of algebra of structural numbers. The property of the structural number (additional structural number) of the electric circuit graph is used, which is the set of all possible subgraphs of trees (additions). According to the definition, the determinant of the matrix of node conductivities (loop resistances) of the electrical circuit is the sum of the products of the conductances (resistances) of the branches of all possible trees (additions) of the graph of the circuit. According to the method of algebra of structural numbers, the determinant function of the structural number (additional structural number) is the determinant of the matrix of node conductivities (loop resistances). Algebraic complements of the indicated matrices are obtained using the determinant function of the algebraic derivatives of the structural number (additional structural number) of the graph. The derivation of the required dependence is reduced to obtaining the indicated determinants and their algebraic additions in the symbolic form. The method of algebra of structural numbers makes it possible to algorithmize the given problem and as a result, the $\dot{I}_k(Z_i)$ dependence is obtained as a fractional-linear function of the complex variable. Further analysis of the resulting function is curried out, and its properties are ascribed to the electrical circuit.

Keywords: structural numbers, fractional-linear function of the complex variable, regime parameters, passive elements.