УДК 621.317.39.531.767

К ОБОБЩЕНИЮ ПОНЯТИЯ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

В.С. Сафарян[1], Г.В. Арутюнян[2]

[1] *ЗАО "Научно-исследовательский институт энергетики" РА*
[2] *Национальный политехнический университет Армении*

Работа посвящена исследованию обобщенных параметров и уточнению понятий двухполюсника, трехполюсника и четырехполюсника. В классических трудах по теоретическим основам электротехники определение четырехполюсника сводится к следующему: четырехполюсником называют часть электрической цепи, рассматриваемую по отношению к двум парам ее выводов. В иностранной литературе дается более точное, с точки зрения функциональности, название четырехполюсника: *two-port network*, что в переводе означает *цепь с двумя портами*. Аналогично дается название двухполюсника: *one-port network* - *цепь с одним портом*.

В некоторых работах отмечается, что все четырехполюсники, у которых не заданы парные зажимы для присоединения источника электрической энергии и приемника, характеризуются в общем случае шестью коэффициентами. Согласно последнему правилу, получается, что четырехполюсник без спаренных выводов - это другая электрическая цепь, которая, однако, также называется четырехполюсником.

В настоящей работе уточнены понятия электрической цепи с выделенными n полюсами (клеммами) и p – портовой цепи, получаемой после спаривания клемм (полюсов). Дается описание электрического состояния двух-, трех- и четырехполюсных схем. Далее спариваются выделенные полюсы и получаются одно- и двухпортовые схемы. Приводятся ограничения, связанные со спариванием полюсов. В результате получается, что двухполюсник и однопортовая цепь, а также трехполюсник, четырехполюсник и двухпортовая цепь идентичны, т.е. имеют одну и ту же математическую модель установившегося режима.

Для определенности будем придерживаться следующих обозначений: электрическую цепь с выделенными n полюсами (клеммами) будем называть n – полюсником (n – клеммником). После спаривания полюсов (клемм) полученную схему назовем по числу образованных портов – однопортовая, двухпортовая цепь и т.д.

Ключевые слова: многоклеммник, многополюсник, однопортовая цепь, двухпортовая цепь, обобщенные параметры, матрица узловых проводимостей.

Введение. В классических трудах по теоретическим основам электротехники определение четырехполюсника сводится к следующему: четырехполюсником называют часть электрической цепи, рассматриваемую по отношению к двум парам ее выводов или двум входным и двум выходным зажимам [1-6]. Таким образом, под четырехполюсником подразумеваются четыре полюса, однако характеризуются не сами полюсы, а пара полюсов – входная и выходная. В большинстве источников иностранной литературы в оригинале дается более точное, с точки зрения функциональности, название четырехполюсника: two-port network [7, 8] (цепь с двумя портами). Аналогично дается название двухполюсника - one-port network [7, 8] (цепь с одним портом). В работе [9] схема с четырьмя выделенными полюсами (клеммами) называется четырехполюсником (vierpol), а после спаривания полюсов полученная схема называется двухпортовой (zweitor).

В работах [1, 10] отмечается, что все четырехполюсники, у которых не заданы парные зажимы для присоединения источника электрической энергии и приемника, характеризуются в общем случае шестью коэффициентами. Согласно последнему правилу, получается, что четырехполюсник без спаренных выводов - это другая электрическая цепь, которая, однако, также называется четырехполюсником.

В [11] дается определение трехполюсника как элемента цепи с двумя парами зажимов (полюсов или клемм) с одним общим полюсом. Для описания трехполюсника достаточно двух напряжений между любыми двумя полюсами и двух токов.

Очевидно, что есть некоторая неточность в определениях и названиях подобных цепей.

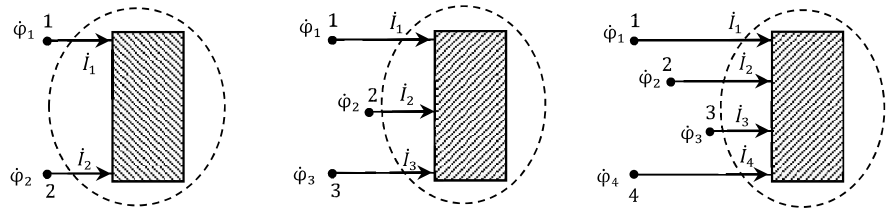
Во избежание путаницы будем придерживаться следующих обозначений: электрическую цепь с выделенными n полюсами (клеммами) будем называть n – полюсником (n – клеммником), а после спаривания полюсов (клемм) полученную схему назовем по числу образованных портов – однопортовая, двухпортовая цепь и т.д.

Постановка задачи и обоснование методики. Целью данной работы является описание и определение обобщенных параметров n – клеммников и p – портовых схем ($n = \overline{2;4}$). Каждая клемма многоклеммника описывается узловым током и потенциалом. Согласно первому закону Кирхгофа, для сечения, охватывающего клеммы n – клеммника, имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{I}_i = 0, \qquad (1)$$

а потенциалы узлов определяются с точностью до произвольного постоянного слагаемого.

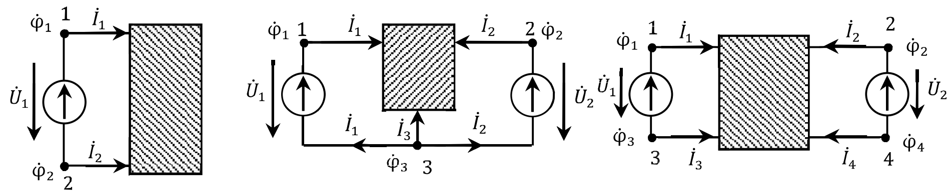
На рис. 1 а,б,в приведены схемы двух-, трех- и четырехклеммовой цепей.



а) б) в)

Рис. 1. Схематическое изображение двух- (а), трех- (б) и четырехклеммовой (в) цепей

Для получения однопортовой цепи (цепь с одним портом) спариваются клеммы 1 и 2 (рис. 2а). На однопортовую цепь накладывается ограничение $\dot{I}_1 = -\dot{I}_2$, которое вытекает из (1), т.е. двухклеммник и однопортовая цепь идентичны.



а) б) в)

Рис. 2. Схематическое изображение одно- (а) и двухпортовых (б) и (в) цепей

Рассмотрим превращение трехполюсника в двухпортовую цепь, где клемма 3 является общей (рис. 2б).

Как и в предыдущем случае (однопортовой цепи), здесь также накладываемые ограничения обеспечиваются автоматически, поскольку

$$\dot{I}_3 = -(\dot{I}_1 + \dot{I}_2),$$

т.е. трехполюсник и двухпортовая цепь идентичны.

Для превращения четырехполюсника в двухпортовую цепь спаривают узлы 1 и 3, 2 и 4 (рис. 2в). При этом необходимо учитывать ограничения

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = -\dot{I}_3, \\ -\dot{I}_2 = \dot{I}_4. \end{cases} \quad (2)$$

Нетрудно заметить, что одно из ограничений (2) является зависимым и получается из (1).

Из вышеизложенного следует, что трехклеммовую цепь можно рассмотреть как двухпортовую цепь, т.е. они с математической точки зрения идентичны.

Четырехклеммовая цепь превращается в двухпортовую цепь при наличии ограничения (2).

Математическщая модель n – полюсной цепи выражается системой линейных уравнений [1, 2, 4, 11]

$$Y_n \dot{\varphi}_n = \dot{I}_n, \tag{3}$$

где Y_n- квадратная матрица узловых проводимостей порядка n; $\dot{\varphi}_n, \dot{I}_n$ – вектор-столбцы узловых потенциалов и токов порядка n соответственно.

Поскольку $|Y| = 0$ и $\sum_{i=1}^{n} \dot{I}_i = 0$, то согласно теореме Кронекера-Капелли [13], система уравнений (3) имеет бесконечное множество решений. Принимая потенциал одного из узлов заданным ($\dot{\varphi}_n = 0$), систему уравнений (3) перепишем в виде

$$Y \dot{\varphi} = \dot{I}, \tag{4}$$

где $Y, \dot{\varphi}, \dot{I}$ – соответствующие матрица и вектор-столбцы порядка $n - 1$.

Рассмотрим двухпортовую цепь с точки зрения ее включения в сложную электрическую цепь (рис. 3). Здесь невозможно заранее утверждать, что передача энергии совершается только через два намеченных порта $1 - 1'$ и $2 - 2'$ [12]. Следовательно, известная система, описывающая электрическое состояние двухпортовой цепи [1, 2, 4, 11]

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2, \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2, \end{cases}$$

в данном случае теряет свое значение и не отражает физического состояния двухпортовой цепи.

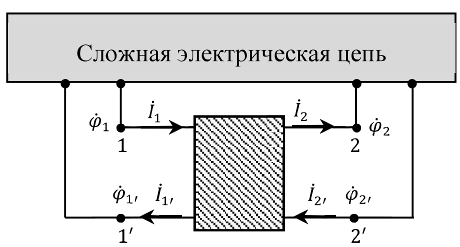


Рис. 3. Включение двухпортовой цепи в сложную электрическую цепь

Рассмотрим четырехклеммовую цепь (рис. 1в). Предполагается, что в пассивной цепи все узлы исключены.

При выборе потенциала узла 4 в качестве базисного методом узловых потенциалов для четырехклеммовой цепи получим

$$\begin{cases} Y_{11}\dot{\varphi}_1 - Y_{12}\dot{\varphi}_2 - Y_{13}\dot{\varphi}_3 = \dot{I}_1, \\ -Y_{21}\dot{\varphi}_1 + Y_{22}\dot{\varphi}_2 - Y_{23}\dot{\varphi}_3 = \dot{I}_2, \\ -Y_{31}\dot{\varphi}_1 - Y_{32}\dot{\varphi}_2 + Y_{33}\dot{\varphi}_3 = \dot{I}_3, \end{cases} \tag{5}$$

где Y_{ij}- собственные и взаимные проводимости клемм.

Система уравнений (5) описывается шестью коэффициентами - $Y_{11}, Y_{22}, Y_{33}, Y_{12}, Y_{13}, Y_{23}$, поскольку матрица узловых проводимостей симметрична.

Согласно (1), для четырехклеммовой цепи (рис. 1в) имеет место равенство

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 + \dot{I}_4 = 0. \qquad (6)$$

При спаривании полюсов $1 - 3$ и $2 - 4$ (рис. 2в) следуют следующие ограничения для токов:

$$\dot{I}_1 = -\dot{I}_3, \qquad (7)$$

следовательно,

$$\dot{I}_2 = -\dot{I}_4,$$

и четырехклеммовая цепь станет двухпортовой цепью.

Поскольку ток $\dot{I}_4$ является балансирующим (зависимым), то с учетом условия (7) система (5) преобразуется к виду

$$\begin{cases} Y_{11}\dot{\varphi}_1 - Y_{12}\dot{\varphi}_2 - Y_{13}\dot{\varphi}_3 = \dot{I}_1, \\ -Y_{21}\dot{\varphi}_1 + Y_{22}\dot{\varphi}_2 - Y_{23}\dot{\varphi}_3 = \dot{I}_2, \\ -Y_{31}\dot{\varphi}_1 - Y_{32}\dot{\varphi}_2 + Y_{33}\dot{\varphi}_3 = -\dot{I}_1. \end{cases} \qquad (8)$$

Определим $\dot{\varphi}_3$ путем сложения первого и третьего уравнений системы (8) и алгебраических преобразований:

$$\dot{\varphi}_1(Y_{11} - Y_{31}) - \dot{\varphi}_2(Y_{12} + Y_{32}) + \dot{\varphi}_3(Y_{33} - Y_{13}) = 0,$$

$$\dot{\varphi}_3(Y_{33} - Y_{13}) + \dot{\varphi}_3(Y_{11} - Y_{31}) = \dot{\varphi}_2(Y_{12} + Y_{32}) - \dot{\varphi}_1(Y_{11} - Y_{31}) + \dot{\varphi}_3(Y_{11} - Y_{31}).$$

В результате имеем

$$\dot{\varphi}_3 = \frac{(Y_{12} + Y_{32})\dot{\varphi}_2 - (Y_{11} - Y_{31})(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3)}{\Delta}, \qquad (9)$$

где $\Delta = Y_{11} + Y_{33} - 2Y_{13} \neq 0$.

Условие (9) означает, что потенциал $\dot{\varphi}_3$ является зависимой величиной. Представим первые два уравнения системы (8) в следующем виде:

$$\begin{cases} Y_{11}(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3) - Y_{12}\dot{\varphi}_2 - (Y_{13} - Y_{11})\dot{\varphi}_3 = \dot{I}_1, \\ -Y_{21}(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3) + Y_{22}\dot{\varphi}_2 - (Y_{23} + Y_{21})\dot{\varphi}_3 = \dot{I}_2. \end{cases} \qquad (10)$$

Подставив в (10) значение $\dot{\varphi}_3$ из (9), получим

$$\begin{cases} \left[Y_{11} + \frac{(Y_{11} - Y_{13})^2}{\Delta}\right](\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3) - \left[Y_{12} + \frac{(Y_{13} - Y_{11})(Y_{12} + Y_{32})}{\Delta}\right]\dot{\varphi}_2 = \dot{I}_1, \\ -\left[Y_{21} + \frac{(Y_{31} - Y_{11})(Y_{21} + Y_{23})}{\Delta}\right](\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3) + \left[Y_{22} - \frac{(Y_{12} + Y_{32})^2}{\Delta}\right]\dot{\varphi}_2 = \dot{I}_2 \end{cases} \qquad (10а)$$

или

$$\begin{cases} Y'_{11}\dot{\varphi}'_1 - Y'_{12}\dot{\varphi}_2 = \dot{I}_1, \\ -Y'_{21}\dot{\varphi}'_1 + Y'_{22}\dot{\varphi}_2 = \dot{I}_2, \end{cases} \qquad (11)$$

где $Y'_{11} = Y_{11} + \frac{(Y_{11} - Y_{13})^2}{\Delta}$, $Y'_{12} = Y'_{21} = Y_{12} + \frac{(Y_{13} - Y_{11})(Y_{12} + Y_{32})}{\Delta}$, $Y'_{22} = Y_{22} - \frac{(Y_{12} + Y_{32})^2}{\Delta}$, $\dot{\varphi}'_1 = \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3$.

Система (11) описывает электрическое состояние двухпортовой цепи и идентична системе, описывающей электрическое состояние трехклеммника или трехполюсника. Развернутая схема трехклеммовой цепи (трехполюсника) представлена на рис. 4.

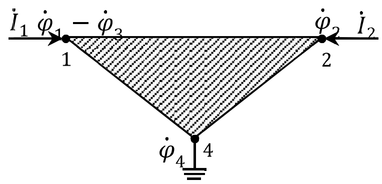


Рис. 4. Схема трехполюсной цепи

Исходя из вышеизложенного, четырехклеммовую цепь можно преобразовать в двухпортовую цепь исключением одного из узлов.

Используем систему уравнений (5) для исключения третьего узла цепи. Исключим $\dot{\varphi}_3$ из третьего уравнения:

$$\dot{\varphi}_3 = \frac{\dot{I}_3 + Y_{31}\dot{\varphi}_1 + Y_{32}\dot{\varphi}_2}{Y_{33}}. \quad (12)$$

Подставив выражение (12) в первое и второе уравнения системы (5), получим

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1\left(Y_{11} - \dfrac{Y_{31}Y_{13}}{Y_{33}}\right) - \dot{\varphi}_2\left(Y_{12} + \dfrac{Y_{13}Y_{32}}{Y_{33}}\right) = \dot{I}_1 + \dfrac{Y_{13}}{Y_{33}}\dot{I}_3, \\ -\dot{\varphi}_1\left(Y_{21} + \dfrac{Y_{23}Y_{31}}{Y_{33}}\right) + \dot{\varphi}_2\left(Y_{22} - \dfrac{Y_{23}Y_{32}}{Y_{33}}\right) = \dot{I}_2 + \dfrac{Y_{23}}{Y_{33}}\dot{I}_3. \end{cases}$$

Перепишем полученную систему в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 Y'_{11} - \dot{\varphi}_2 Y'_{12} = \dot{I}'_1, \\ -\dot{\varphi}_1 Y'_{21} + \dot{\varphi}_2 Y'_{22} = \dot{I}'_2, \end{cases}$$

где $Y'_{11} = Y_{11} - \frac{Y_{31}Y_{13}}{Y_{33}}$, $Y'_{12} = Y'_{21} = Y_{12} + \frac{Y_{13}Y_{32}}{Y_{33}}$, $Y'_{22} = Y_{22} - \frac{Y_{23}Y_{32}}{Y_{33}}$,

$\dot{I}'_1 = \dot{I}_1 + \frac{Y_{13}}{Y_{33}}\dot{I}_3$, $\dot{I}'_2 = \dot{I}_2 + \frac{Y_{23}}{Y_{33}}\dot{I}_3$.

Очевидно, что полученной системе соответствует электрическая цепь (трехклеммовая цепь), поскольку после исключения третьего узла (клеммы) сохранилось условие обратимости, а именно: $Y'_{12} = Y'_{21}$.

Таким образом, исключение i- го узла из n-клеммовой цепи возможно лишь при исключении потенциала $\dot{\varphi}_i$ из i- го уравнения системы, составленного для n-клеммовой цепи методом узловых потенциалов. При исключении потенциала $\dot{\varphi}_i$ из j- го уравнения системы полученная математическая модель не является физически реализуемой.

Выводы

1. Уточнены понятия n - полюсника (клеммника), т.е. электрической цепи с выделенными полюсами (клеммами), и n – портовой цепи, получаемой после спаривания клемм (полюсов).
2. Двухполюсник и однопортовая цепь, а также трехполюсник и двухпортовая цепь идентичны, т.е. имеют одну и ту же математическую модель установившегося режима.
3. Четырехполюсник (четырехклеммовая цепь) превращается в двухпортовую цепь при наличии ограничения (2).

Литература

1. **Круг К.А.** Основы электротехники.- М.; Л.: Госэнергоиздат, 1952. - 432с.
2. **Атабеков Г.И.** Основы теории цепей.-СПб.: Лань, 2009. - 425 с.
3. **Татур Т.А.** Основы теории электрических цепей. - М.: Высшая школа, 1980. - 271с.
4. **Зевеке Г.В., Ионкин П.А., Нетушил А.В., Страхов С.В.** Основы теории цепей.- М.: Энергоатомиздат, 1989. - 530с.
5. **Андре Анго.** Математика для электро- и радиоинженеров.- М.: Наука, 1964. - 772с.
6. **Купфмюллер К.** Основы теоретической электротехники.-М.; Л.: Госэнергоиздат, 1960. - 464 с.
7. **Balabanyan N., Bickart T.A., Seshu S.** Electrical network theory.-Wiley, 1969. – 969p.
8. **David E. Johnson, John L. Hilburn, Johnny R. Johnson** Basic Electric Circuit Analysis.- Prentice Hall, 1986. - 630p.
9. **Wilhelm K.** Mehrtortheorie.- Berlin, 1976. - 179s.
10. **Дезоер Ч.А., Ку Э.С.** Основы теории цепей.-М.: Связь, 1976. - 288 с.
11. Теоретические основы электротехники. Ч.1 **/ П.А. Ионкин, А.И. Даревский, Е.С. Кухаркин, В.Г. Миронов, Н.А. Мельников.** - М.: Высшая школа, 1976.-544с.
12. **Пухов Г.Е.** Об уравнениях четырехполюсника, включенного в сложную электрическую цепь // Электричество.- 1949.- N5.-С. 55-57.
13. **Беклемишев Д.В.** Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.-СПб.: Лань, 2018. - 448 с.

Поступила в редакцию 12.09.2018.
Принята к опубликованию 14.12.2018.

ՔԱՌԱԲԵՎԵՌ ՀԱՍԿԱՑՈՒԹՅԱՆ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Վ.Ս. Սաֆարյան, Գ.Վ. Հարությունյան

Աշխատանքը նվիրված է քառաբևեռի ընդհանրացված պարամետրերի հետազոտմանը և երկբևեռ, եռաբևեռ, քառաբևեռ հասկացությունների ճշգրտմանը: Էլեկտրատեխնիկայի տեսական հիմունքների վերաբերյալ դասական աշխատություններում քառաբևեռի սահմանումը տրվում է հետևյալ կերպ. քառաբևեռ է կոչվում էլեկտրական շղթայի այն տեղամասը, որը դիտարկվում է նրա երկու զույգ սեղմակների նկատմամբ: Արտասահմանյան աղբյուրներում տրվում է քառաբևեռի՝ ֆունկցիոնալության տեսակետից ավելի ճշգրիտ անվանում՝ two-port network, ինչը թարգմանաբար նշանակում է երկու մուտքով շղթա: Նմանատիպ է տրվում երկբևեռի անվանումը՝ one-port network, ինչը թարգմանաբար նշանակում է մեկ մուտքով շղթա:

Որոշ աշխատանքներում նշվում է, որ բոլոր այն քառաբևեռները, որոնց սեղմակները զույգված չեն՝ էներգիայի աղբյուր կամ սպառիչ միացնելու համար, ընդհանուր դեպքում բնութագրվում են վեց գործակիցներով: Այսինքն՝ ստացվում է, որ առանց զույգված սեղմակների՝ քառաբևեռը բոլորովին այլ էլեկտրական շղթա է, սակայն նույնպես կոչվում է քառաբևեռ:

Սույն աշխատանքում ճշգրտված են հետևյալ հասկացությունները՝ n բևեռ (սեղմակ) էլեկտրական շղթա և p – մուտքային շղթայի, որը առաջանում է սեղմակները զույգելով: Տրվում է երկբևեռ, եռաբևեռ և քառաբևեռ շղթաների էլեկտրական վիճակի նկարագրությունը: Դուրս բերված բևեռները զույգվում են, և տրվում դրա հետևանքով ստացվող սահմանափակումները: Արդյունքում ստացվում է, որ երկբևեռը և մեկ մուտքով շղթան, ինչպես նաև եռաբևեռը, քառաբևեռն ու երկու մուտքով շղթաները հաստատված ռեժիմում ունեն նույն մաթեմատիկական մոդելը:

Որոշակիության համար ընդունենք հետևյալ նշանակումները. առանձնացված n բևեռով (սեղմակներով) էլեկտրական շղթան անվանենք n – բևեռ (n – սեղմակ): Բևեռները (սեղմակները) զույգելուց հետո ստացված շղթան անվանենք գոյացած մուտքերի թվով՝ մեկ մուտքով շղթա, երկու մուտքով շղթա և այլն:

Առանցքային բառեր. բազմասեղմակ, բազմաբևեռ, երկու մուտքով շղթա, մեկ մուտքով շղթա, ընդհանրացված պարամետրեր, հանգուցային հաղորդականությունների մատրից:

GENERALIZATION OF THE FOUR-POLE NETWORK CONCEPT

V.S. Safaryan, G.V. Harutyunyan

The paper is devoted to the investigation of the generalized parameters and specification of the notions of a two-pole, three-pole, and four-pole networks. In the classic literature on the theoretical foundations of electrical engineering, the definition of a four-pole network is as follows: a four-pole network is a circuit which has two input and two output terminals. In foreign literature, the four-pole network is called a two-port network, and the two-pole network is called a one-port network. These names are more precise from a functional point of view.

In some sources, it is noted, that all four-pole networks, which do not have paired terminals for connecting the source of electrical energy and the load, are characterized by six coefficients. According to the last rule, it turns out that a four-pole network without paired leads is another electrical circuit, but it is also called a four-pole network.

In this paper, the concepts of an electrical circuit with dedicated n poles (terminals) and a p -port circuit obtained after the pairing of terminals (poles) are specified. A description of the electrical condition of two-, three-and four-pole circuits is given. Next, the selected poles are paired and one- and two-port schemes are obtained. The limitations associated with the poles' pairing are given. As a result, it turns out that the two-pole and single-port circuits, as well as the three-pole, four-pole and two-port circuits are identical, i.e. have the same mathematical model of a steady state.

We introduce the following notation: an electrical circuit with n marked poles (terminals) will be called an n - pole (n-terminal circuit). After pairing the poles (terminals), the resulting circuit is called the number of ports received – one - port, two - port circuit, etc.

Keywords: multi-terminal, multi-pole, one – port circuit, two - port circuit, generalized parameters, matrix of nodal conductances.