

UDC 539.3

**ANALYSIS OF SINGULARITIES AT THE CENTER OF HETEROGENEOUS
HONEYCOMB CELL UNDER ANTIPLANE DEFORMATION**

M.V. Belubekyan, H.A. Gevorgyan

Institute of mechanics of the NAS of the Republic of Armenia

In this paper, we discuss the presence or absence of stress concentration at the center of two kinds of heterogeneously dissimilar honeycomb cells under antiplane deformation. Determining the presence of stress concentration is necessary to determine the criteria for the destruction of structural elements. In the first case, a continuous two-compartment cell is considered, for which the boundary conditions have periodically repeating characteristics. In the second case, the heterogeneous cell is assumed to be discontinuous, with a cutout of one of its quarters, for which the periodic nature of the boundary conditions is violated. Thus, the task of investigating heterogeneous cells for the presence or absence of stress concentration at their center is reduced to the comparison of stress-strain states in the case of antiplane deformation of two differently dissimilar honeycomb cells: honeycomb cells with significantly and slightly different physicomachanical characteristics, for which, as it turns out, the picture of the stress state near the center is radically different. The study was carried out using modern methods and tools of computational mathematics and programming.

Keywords: heterogeneous honeycomb cells, pure shear, stresses, singularities.

Introduction. The phenomenon of stress concentration in structural elements is the main factor of appearance of cracks, and consequently, acts as the main reason for their destruction. Therefore, the problem of minimizing or eliminating of stress concentration in general at the design stage, which is called the low-stress effect in literature [1], never loses its relevance.

At the same time, different waveguides, using honeycomb cells are employed as insulators from seismic waves for various constructions. Therefore, any theoretical investigation of such structures on the stress concentration presence is of great practical importance [2 – 4].

Anti-plane deformation within a complete heterogeneous cell. As it is known [1], any two-dimensional field of anti-plane deformation is described by Poisson differential equation:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{f}{\mu}, \quad (1)$$

where w is the displacement function; f the volumetric force and μ – the shear module. In the absence of volumetric force ($f = 0$), equation (1) in the polar coordinates can be rewritten in the form of the Laplace differential equation:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0. \quad (2)$$

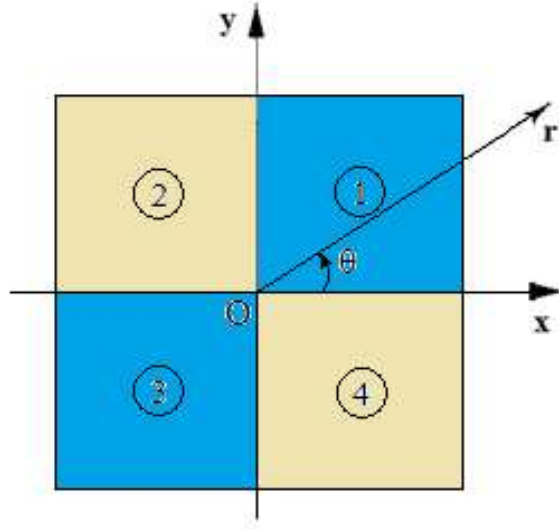


Fig. 1. Complete heterogeneous honeycomb cell

The problem of a heterogeneous honeycomb cell investigation (Fig. 1), where number one and three sub-cells have the same shear module μ_1 and number two and four sub-cells have μ_2 , is represented in polar coordinates as follows:

$$\frac{\partial^2 w_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \theta^2} = 0, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (3)$$

with the boundary conditions given by

$$w_1 = w_4, \quad \mu_1 \frac{\partial w_1}{\partial \theta} = \mu_2 \frac{\partial w_4}{\partial \theta} \quad \text{at } \theta = 0; \quad (4)$$

$$w_1 = w_2, \quad \mu_1 \frac{\partial w_1}{\partial \theta} = \mu_2 \frac{\partial w_2}{\partial \theta} \quad \text{at } \theta = \frac{\pi}{2}; \quad (5)$$

$$w_2 = w_3, \quad \mu_2 \frac{\partial w_2}{\partial \theta} = \mu_1 \frac{\partial w_3}{\partial \theta} \quad \text{at } \theta = \pi; \quad (6)$$

$$w_3 = w_4, \quad \mu_1 \frac{\partial w_3}{\partial \theta} = \mu_2 \frac{\partial w_4}{\partial \theta} \quad \text{at} \quad \theta = \frac{3\pi}{2}. \quad (7)$$

The analytical solution of differential equations system (3) by the boundary conditions (4) – (7) is represented as

$$w_i(r, \theta) = r^\lambda f_i(\theta). \quad (8)$$

By substituting (8) into (3) we obtain an ordinary differential equation system whose solution can be written in the following form:

$$f_i(\theta) = A_i \sin \lambda \theta + B_i \cos \lambda \theta. \quad (9)$$

A new substitution of expressions (8) and (9) into the boundary conditions (4) – (7) leads to the system of linear equations:

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1 = B_4; \\ \mu_1 A_1 = \mu_2 A_2; \\ A_1 \sin \lambda \frac{\pi}{2} + B_1 \cos \lambda \frac{\pi}{2} = A_2 \sin \lambda \frac{\pi}{2} + B_2 \cos \lambda \frac{\pi}{2}; \\ \mu_1 (A_1 \sin \lambda \frac{\pi}{2} + B_1 \cos \lambda \frac{\pi}{2}) = \mu_2 (A_2 \sin \lambda \frac{\pi}{2} + B_2 \cos \lambda \frac{\pi}{2}); \\ A_2 \sin \lambda \pi + B_2 \cos \lambda \pi = A_3 \sin \lambda \pi + B_3 \cos \lambda \pi; \\ \mu_2 (A_2 \cos \lambda \pi - B_2 \sin \lambda \pi) = \mu_1 (A_3 \cos \lambda \pi - B_3 \sin \lambda \pi); \\ A_3 \sin \lambda \frac{3\pi}{2} + B_3 \cos \lambda \frac{3\pi}{2} = A_4 \sin \lambda \frac{3\pi}{2} + B_4 \cos \lambda \frac{3\pi}{2}; \\ \mu_1 (A_3 \cos \lambda \frac{3\pi}{2} - B_3 \sin \lambda \frac{3\pi}{2}) = \mu_2 (A_4 \cos \lambda \frac{3\pi}{2} - B_4 \sin \lambda \frac{3\pi}{2}). \end{array} \right. \quad (10)$$

As a result of simplification of the linear equation system (10) we obtain

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[(1 - a_1) \sin \lambda \frac{3\pi}{2} - a_2 \cos \lambda \frac{3\pi}{2} \right] A_4 + \left[(1 - b_2) \cos \lambda \frac{3\pi}{2} - b_1 \sin \lambda \frac{3\pi}{2} \right] B_4 = 0; \\ \left[(\gamma - a_1) \cos \lambda \frac{3\pi}{2} + a_2 \sin \lambda \frac{3\pi}{2} \right] A_4 - \left[(\gamma - b_2) \sin \lambda \frac{3\pi}{2} + b_1 \cos \lambda \frac{3\pi}{2} \right] B_4 = 0, \end{array} \right. \quad (11)$$

where the following designations are assumed:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \left[1 + (\gamma - 1) \cos^2 \lambda \pi \right] \left[1 + (\gamma - 1) \sin^2 \lambda \frac{\pi}{2} \right] - \frac{(\gamma - 1)^2}{4} \sin 2\lambda \pi \sin \lambda \pi; \\
a_2 &= \frac{1 - \gamma}{2} \sin 2\lambda \pi \left[(\gamma - 1) \sin^2 \lambda \frac{\pi}{2} + 1 \right] + \frac{\gamma - 1}{2} \sin \lambda \pi \left[1 + (\gamma - 1) \sin^2 \lambda \pi \right]; \\
b_1 &= \left[1 + (\gamma - 1) \cos^2 \lambda \pi \right] \frac{1 - \gamma^{-1}}{2} \sin \lambda \pi + \frac{\gamma^{-1} - 1}{2} \sin 2\lambda \pi \left[(\gamma - 1) \cos^2 \lambda \frac{\pi}{2} + 1 \right]; \\
b_2 &= -\frac{(\gamma - 1)^2}{4} \sin \lambda \pi \sin 2\lambda \pi + \gamma^{-1} \left[1 + (\gamma - 1) \sin^2 \lambda \pi \right] \left[(\gamma - 1) \cos^2 \lambda \frac{\pi}{2} + 1 \right].
\end{aligned}$$

From the condition that the determinant of the algebraic equation system (11) is equal to zero, it follows:

$$\begin{vmatrix}
(1 - a_1) \sin \lambda \frac{3\pi}{2} - a_2 \cos \lambda \frac{3\pi}{2} & (1 - b_2) \cos \lambda \frac{3\pi}{2} - b_1 \sin \lambda \frac{3\pi}{2} \\
(\gamma - a_1) \cos \lambda \frac{3\pi}{2} + a_2 \sin \lambda \frac{3\pi}{2} & (\gamma - b_2) \sin \lambda \frac{3\pi}{2} + b_1 \cos \lambda \frac{3\pi}{2}
\end{vmatrix} = 0. \quad (12)$$

It is known [1] that among the solutions of the trigonometric equation (12) $\lambda < 1$, it means that near point O (Fig. 1), there is a singularity.

Anti-plane deformation within an incomplete heterogeneous cell. We consider now the same heterogeneous cell (Fig. 1), which is deprived of one of its quarters (Fig. 2).

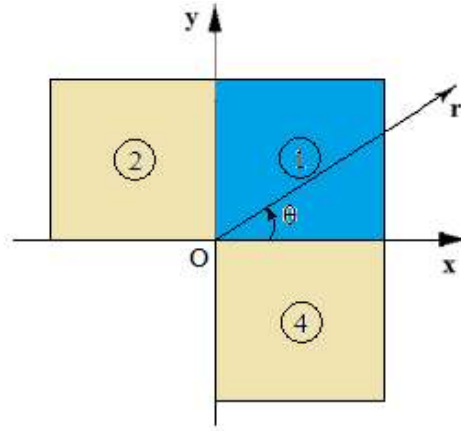


Fig. 2. An incomplete heterogeneous honeycomb cell

This problem is reduced to solving the system of differential equations

$$\frac{\partial^2 w_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \theta^2} = 0, \quad i=1,2,4. \quad (13)$$

With respect to the following boundary conditions:

$$w_1 = w_4, \quad \mu_1 \frac{\partial w_1}{\partial \theta} = \mu_2 \frac{\partial w_4}{\partial \theta} \quad \text{at} \quad \theta = 0; \quad (14)$$

$$w_1 = w_2, \quad \mu_1 \frac{\partial w_1}{\partial \theta} = \mu_2 \frac{\partial w_2}{\partial \theta} \quad \text{at} \quad \theta = \frac{\pi}{2}; \quad (15)$$

$$\mu_2 \frac{\partial w_2}{\partial \theta} = 0 \quad \text{at} \quad \theta = \pi; \quad (16)$$

$$\mu_2 \frac{\partial w_4}{\partial \theta} = 0 \quad \text{at} \quad \theta = \frac{3\pi}{2}. \quad (17)$$

Following the reasoning made (1) – (12), we finally conclude:

$$\begin{vmatrix} \gamma(\sin \lambda \frac{\pi}{2} - k \cos \lambda \frac{\pi}{2}) & \cos \lambda \frac{\pi}{2} + k \sin \lambda \frac{\pi}{2} \\ \cos \lambda \frac{3\pi}{2} & -\sin \lambda \frac{3\pi}{2} \end{vmatrix} = 0, \quad (18)$$

where

$$k = \frac{\operatorname{tg} \lambda \pi \sin \lambda \frac{\pi}{2} + \cos \lambda \frac{\pi}{2}}{\gamma(\operatorname{tg} \lambda \pi \cos \lambda \frac{\pi}{2} - \sin \lambda \frac{\pi}{2})}.$$

Numerical analysis and results. Computational detection of singularities at the centers of complete and incomplete (Fig. 1 and 2) heterogeneous honeycomb cells is an enterprise based on the *generalize iteration method* [5 - 7] developed from publication [8]. This method allows finding any existing solution of the given equation in some fixed interval [5].

Table 1

Numerical results obtained for the complete heterogeneous cell (Fig. 1)

$\gamma = \mu_2 / \mu_1$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
λ_{min}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\gamma = \mu_2 / \mu_1$	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
λ_{min}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Table 2

Numerical results obtained for the incomplete heterogeneous cell (Fig. 2)

$\gamma = \mu_2 / \mu_1$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$0 < \lambda < 1$	0.045	0.06	0.096	0.1	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.1
$\gamma = \mu_2 / \mu_1$	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
$0 < \lambda < 1$	0.07	0.04	0.009	0.08	0.3	0.3	0.66	0.7	0.2	0.35

In Tables 1 and 2 are introduced the obtained results of numerical analysis of the characteristic equations (12) and (18) about the presence of singularities at the centers of cells O (Fig. 1 and 2). As it follows from Table 1, there is no singularity at the center O of the heterogeneous complete cell (Fig. 1), whatever the relationship of shear modules $\gamma = \mu_2 / \mu_1$. On the other hand, there are singularities at point O of the heterogeneous incomplete cell (Fig. 2), therefore there is a stress concentration at this center O for a large range of variation of modules μ_1 and μ_2 .

Conclusion. In the article presented, open and closed heterogeneous honeycomb cells are investigated on the presence and absence of singularities in the case of pure shear. By numerical analysis it is proved that in the center of a closed heterogeneous honeycomb cell there is no stress concentration, regardless of the constituent material shear modules.

References

1. **Чобанян К.С.** Напряжения в составных упругих телах. – Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1987. – 338 с.
2. **Aleksanyan K.A., Chobanyan K.S.** Character of the stresses near the edge of the contact surface of a twisted heterogeneous composit bar // Appl. Mech. – 1977. – V. 13, N 6. – P. 90 – 96.
3. Analysis and Design of One Dimensional Periodic Foundations for Seismic Base Isolation of Structures / **Witaro Witaro, S.J. Wang, Xin Nie, Y.L. Mo, et al** // Int. Journal of Engineering Research and Applications. – 2016. – V. 6, issue I (Part 6). – P. 5 – 15.
4. **Алексян Р.К., Белубекян В.М., Белубекян М.В.** Особенности в узловых точках упругого клина из пьезоэлектрического материала кубической симметрии // Докл. НАН Армении. – 2016. – Т. 116, N2. – С. 136 – 140.
5. **Ванцян А.А., Геворкян Г.А.** Об одном методе решения трансцендентных и алгебраических уравнений. – Ереван: Гитутюн, 2014. – 56 с.
6. **Vantsyan A.A., Gevorgyan H.A., Moravej M.** Comparison analysis of a generalize method of iteration on the basis of solutions of some problems of the mechanics // Research Journal of Fisheries and Hydrobiology. – June 2015. – 10(10). – P. 772 – 775.
7. **Vantsyan A.A., Gevorgyan H.A.** About a nonlinear generalization of the contraction mapping // International Journal of Research and Development Organization, Journal of Mathematics. – October 2017. – V. 3, issue 10. – Paper 1. – P. 1 – 16.
8. **Ванцян А.А.** Об одном методе решения трансцендентных и алгебраических уравнений // Information, Technologies and Management. – 2004. – N4. – С. 44 – 47.

Received on 12.11.2018.

Accepted for publication on 18.12.2018.

ԽՈՐՄԻԱՆՄԱՆ ՏԱՐԱԲՆՈՒՅԹ ԲՋՋԻ ԿԵՆՏՐՈՆՈՒՄ ԱՌԱՆՁՆԱՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆԸ ՀԱՎԱՀԱՐԹ ԴԵՖՈՐՄԱՑՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Մ.Վ. Բելուբեկյան, Հ.Ա. Գևորգյան

Քննարկվում են լարումների կոնցենտրացիայի առկայության կամ բացակայության հարցերը հակահարթ դեֆորմացման ազդեցության տակ գտնվող երկու տարբեր տարաբնույթ բջիջների կենտրոնում: Լարումների կոնցենտրացիայի առկայության բացահայտումը անհրաժեշտ է կոնստրուկցիաների տարրերի քայքայման չափանիշների որոշման համար: Առաջին դեպքում դիտարկվում է հոծ երկկողմանի տարաբնույթ բջիջը, որի համար եզրային պայմաններն ունեն պարբերական բնույթ: Երկրորդ դեպքում տարաբնույթ բջիջը ենթադրվում է խզումով, որի մեկ քառորդը բացակայում է, ինչի հետևանքով խախտվում է եզրային պայմանների պարբերական բնույթը: Այսպիսով, տարաբնույթ բջիջների լարումների կոնցենտրացիայի առկայության կամ բացակայության հետազոտման խնդիրը վերածվում է երկու տարաբնույթ բջիջների լարվածա-դեֆորմացվող վիճակների համեմատությանը հակահարթ դեֆորմացման դեպքում. ֆիզիկամեխանիկական բնութագրերով զգալիորեն և իրարից քիչ տարբերվող բջիջների, որոնց

համար, ինչպես պարզվում է, կենտրոնի մոտ գտնվող լարվածային վիճակի պատկերը արմատապես տարբերվում է: Վերլուծությունն իրականացվել է հաշվողական մաթեմատիկայի և ծրագրավորման ժամանակակից մեթոդներով և սիմուլյացիաներով:

Առանցքային բաներ. տարաբնույթ խորսխաբջիջ, մաքուր սահք, լարումներ, եզակիություններ:

АНАЛИЗ ОСОБЕННОСТЕЙ В ЦЕНТРЕ РАЗНОРОДНОЙ СОТОВОЙ ЯЧЕЙКИ ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

М.В. Белубекян, Г.А. Геворкян

Обсуждаются вопросы наличия или отсутствия концентрации напряжений в центре двух видов неодинаково разнородных сотовых ячеек при антиплоской деформации. Установление наличия концентрации напряжений необходимо для определения критериев разрушения элементов конструкций. В первом случае рассматривается сплошная двоякоразнородная сотовая ячейка, для которой граничные условия носят периодически повторяющийся характер. Во втором случае разнородная ячейка предполагается несплошной, с вырезом одной из своих четвертей, для которой периодический характер граничных условий нарушается. Таким образом, задача исследования разнородных ячеек на предмет наличия или отсутствия в их центре концентрации напряжений сводится к сравнению напряженно-деформированных состояний при антиплоской деформации двух неодинаково разнородных сотовых ячеек: со значительно и незначительно отличающимися физико-механическими характеристиками, для которых, как выясняется, картина напряженного состояния вблизи центра в корне отличается. Исследование было проведено с помощью современных методов и средств вычислительной математики и программирования.

Ключевые слова: разнородные сотовые ячейки, чистый сдвиг, напряжения, особенности.