

УДК 620.178.153

**ДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ВЫСОКОТОЧНОГО ПАРАЛЛЕЛЬНОГО МИКРОМАНИПУЛЯТОРА
С НЕВЕСОМОЙ ПОДВИЖНОЙ ПЛАТФОРМОЙ**

Г.А. Геворкян, М.Г. Арутюнян, Ю.Л. Саркисян

Национальный политехнический университет Армении

На основе метода Лагранжа формируется нелинейная система алгебро-дифференциальных уравнений движения параллельного микроманипулятора с невесомой и недеформируемой подвижной платформой. Для каждой из трех составляющих четырехподвижных подцепей-модулей микроманипулятора формулируются классические уравнения Лагранжа второго рода с дополнительными связями, причем наряду с дифференциальными уравнениями движения записываются алгебраические уравнения связей, выражающие условия неизменности расстояний между концевыми точками подцепей. В качестве конфигурационных параметров, призванных для описания движения рассматриваемого микроманипулятора, выбрана система абсолютных обобщенных координат. Полученная система алгебро-дифференциальных уравнений движения микроманипулятора записывается в компактной матричной форме. На основании сформированной динамической модели параллельного микроманипулятора путем устремления к нулю длин первого и четвертого звеньев каждой из подцепей осуществляется формальный переход к расчетной схеме параллельного микроманипулятора с прецизионными упругими шарнирами. Эта схема обладает рядом преимуществ, связанных с конструкцией упругих шарниров, и является предпочтительной по отношению к традиционной конструкции микроманипулятора как по достигаемой точности обработки координат, так и по адекватности управления движением его платформы. Представлены численные результаты динамического моделирования исследуемого микроманипулятора, генерированные с использованием явной схемы численного интегрирования Ньюмарка. Рассмотрены случаи совместного действия двух и трех приводов, приводятся графики положения подвижной платформы во времени для каждого из отмеченных выше случаев тестирования моделируемого микроманипулятора.

Ключевые слова: параллельный микроманипулятор, упругие шарниры, подвижная платформа, динамическое моделирование.

Введение. История возникновения механизмов параллельной структуры восходит к теоретическим разработкам в области моделирования летательных аппаратов, которые возникли на базе предложенной в 1956 г. *платформы Гуфа-Стюарта*. Впоследствии параллельные механизмы стали успешно применяться

во многих отраслях промышленности [1], в том числе и в робототехнике [2], поскольку они, по сравнению с механизмами последовательной структуры, при одинаковых геометрических и инерционных характеристиках обеспечивают значительно большую жесткость системы и точность позиционирования исполнительного органа.

В последнее время в приборостроении получили распространение микро-манипуляторы, которые построены по структурным схемам классических параллельных манипуляторов, но их звенья соединены между собой не жесткими, а специально сформированными упругими шарнирами [3].

В настоящей статье приводятся уравнения движения параллельного микроманипулятора с невесомой и недеформируемой подвижной платформой, выработанные на основе формализма Лагранжа. Оригинальность подхода к решению поставленной задачи заключается в простоте формирования уравнений дополнительных склерономных (стационарных голономных) связей для недеформируемой подвижной платформы параллельного манипулятора. Более того, фундаментальное свойство поступательности движения подвижной платформы параллельных манипуляторов, т.е. $\bar{\omega}_p = 0$, позволяет наиболее рационально сформировать глобальную матрицу масс исследуемых систем.

Моделирование динамики параллельного микроманипулятора с невесомой подвижной платформой. Рассмотрим параллельный микроманипулятор (рис.1), предложенный в работе [4] и названный BAPMAN1 (Binary Actuated Parallel Micro-Manipulator Version 1), подвижная платформа которого изначально предполагается невесомой и недеформируемой.

Динамическая модель представленного микроманипулятора формируется из нелинейных дифференциальных уравнений движения (уравнений Лагранжа второго рода) звеньев $C_i, i=1, \dots, 4$ относительно обобщенных координат $q_1^j = \varphi_1^j, q_2^j = \varphi_2^j, q_3^j = \varphi_2^j + \varphi_3^j, q_4^j = \varphi_1^j + \varphi_4^j$ (рис. 1б) для каждой отдельно взятой подцепи $Z_j, j=1,2,3$ и нелинейных алгебраических уравнений связей $g_k^j = 0, j,k=1,2,3$, расписанных относительно тех же обобщенных координат на уровне невесомой и недеформируемой подвижной платформы в точках А, В и С (см. рис. 1 б).

Следует обратить внимание на принятые в формализме следующие обозначения: $(OO'_0)_X$ и $(OO'_0)_Z$, $(OO''_0)_X$ и $(OO''_0)_Z$, $(OO'''_0)_X$ и $(OO'''_0)_Z$ – проекции расстояний между началами координат неподвижных $O'_0x'_0y'_0z'_0$, $O''_0x''_0y''_0z''_0$, $O'''_0x'''_0y'''_0z'''_0$ и глобальной OXYZ систем отсчета на оси глобальной системы

координат OXYZ (см. рис. 1б); \tilde{Q}' , \tilde{Q}'' и \tilde{Q}''' – углы между осями $x'_1(z'_1)$, $x''_1(z''_1)$, $x'''_1(z'''_1)$ неподвижных и X(Z) глобальной систем отсчета (см. рис. 1б).

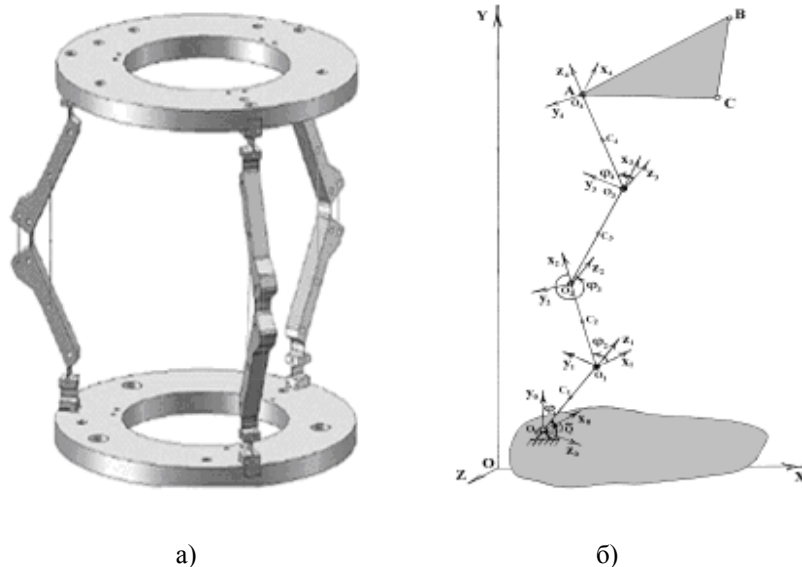


Рис. 1. Конструктивная (а) и кинематическая (б) схемы микроманипулятора

В силу вышеизложенного и с учетом принятых обозначений записывается система нелинейных алгебро-дифференциальных уравнений движения параллельного микроманипулятора в неявном виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i^1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i^1} = Q_i^1 + \sum_{m=1}^3 \left(\frac{\partial g_m^1}{\partial q_i^1} \lambda_m^1 + \frac{\partial g_m^2}{\partial q_i^1} \lambda_m^2 + \frac{\partial g_m^3}{\partial q_i^1} \lambda_m^3 \right), \\ \dots \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i^2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i^2} = Q_i^2 + \sum_{m=1}^3 \left(\frac{\partial g_m^1}{\partial q_i^2} \lambda_m^1 + \frac{\partial g_m^2}{\partial q_i^2} \lambda_m^2 + \frac{\partial g_m^3}{\partial q_i^2} \lambda_m^3 \right), \\ \dots \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i^3} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i^3} = Q_i^3 + \sum_{m=1}^3 \left(\frac{\partial g_m^1}{\partial q_i^3} \lambda_m^1 + \frac{\partial g_m^2}{\partial q_i^3} \lambda_m^2 + \frac{\partial g_m^3}{\partial q_i^3} \lambda_m^3 \right), \quad i = 1, \dots, 4; \\ \dots \\ g_k^1(q_1^1, \dots, q_4^1; q_1^2, \dots, q_4^2) = 0, \\ \dots \\ g_k^2(q_1^2, \dots, q_4^2; q_1^3, \dots, q_4^3) = 0, \\ \dots \\ g_k^3(q_1^3, \dots, q_4^3; q_1^1, \dots, q_4^1) = 0, \quad k = 1, \dots, 3. \end{array} \right. \quad (1)$$

Система нелинейных алгебро-дифференциальных уравнений движения микроманипулятора (1) приводится к явному виду путем подстановки

функции кинетической энергии манипулятора. Таким образом, формируется система нелинейных дифференциальных уравнений движения рассматриваемого параллельного микроманипулятора:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_4 \right) l_1^2 \ddot{q}_1^j + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 \right) l_1 l_2 \cos(q_1^j) \cos(q_2^j) \ddot{q}_2^j + \left(\frac{m_3}{2} + m_4 \right) l_1 l_3 \cos(q_1^j) \cos(q_3^j) \ddot{q}_3^j + \\
 & + \frac{m_4}{2} l_1 l_4 \cos(q_1 - q_4) \ddot{q}_4^j - \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 \right) l_1 l_2 (\dot{q}_2^j)^2 \cos(q_1^j) \sin(q_2^j) - \left(\frac{m_3}{2} + m_4 \right) l_1 l_3 (\dot{q}_3^j)^2 \cos(q_1^j) \sin(q_3^j) + \\
 & + \frac{m_4}{2} l_1 l_4 (\dot{q}_4^j)^2 \sin(q_1 - q_4) = Q_1^j + \sum_{m=1}^3 \left(\frac{\partial g_m^1}{\partial q_1^j} \lambda_m^1 + \frac{\partial g_m^2}{\partial q_1^j} \lambda_m^2 + \frac{\partial g_m^3}{\partial q_1^j} \lambda_m^3 \right), \\
 & \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 \right) l_1 l_2 \cos(q_1^j) \cos(q_2^j) \ddot{q}_1^j + \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_4 \right) l_2^2 \ddot{q}_2^j + \left(\frac{m_3}{2} + m_4 \right) l_2 l_3 \cos(q_2^j - q_3^j) \ddot{q}_3^j + \\
 & + \frac{m_4}{2} l_2 l_4 \cos(q_2^j) \cos(q_4^j) \ddot{q}_4^j - \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 \right) l_1 l_2 (\dot{q}_1^j)^2 \sin(q_1^j) \cos(q_2^j) + \left(\frac{m_3}{2} + m_4 \right) l_2 l_3 (\dot{q}_3^j)^2 \sin(q_2^j - q_3^j) - \\
 & - \frac{m_4}{2} l_2 l_4 (\dot{q}_4^j)^2 \cos(q_2^j) \sin(q_4^j) = Q_2^j + \sum_{m=1}^3 \left(\frac{\partial g_m^1}{\partial q_2^j} \lambda_m^1 + \frac{\partial g_m^2}{\partial q_2^j} \lambda_m^2 + \frac{\partial g_m^3}{\partial q_2^j} \lambda_m^3 \right), \\
 & \left(\frac{m_3}{2} + m_4 \right) l_1 l_3 \cos(q_1^j) \cos(q_3^j) \ddot{q}_1^j + \left(\frac{m_3}{2} + m_4 \right) l_2 l_3 \cos(q_3^j - q_2^j) \ddot{q}_2^j + \left(\frac{m_3}{4} + m_4 \right) l_3^2 \ddot{q}_3^j + \\
 & + \frac{m_4}{2} l_3 l_4 \cos(q_3^j) \cos(q_4^j) \ddot{q}_4^j - \left(\frac{m_3}{2} + m_4 \right) l_1 l_3 (\dot{q}_1^j)^2 \sin(q_1^j) \cos(q_3^j) + \left(\frac{m_3}{2} + m_4 \right) l_2 l_3 (\dot{q}_2^j)^2 \sin(q_3^j - q_2^j) - \\
 & - \frac{m_4}{2} l_3 l_4 (\dot{q}_4^j)^2 \cos(q_3^j) \sin(q_4^j) = Q_3^j + \sum_{m=1}^3 \left(\frac{\partial g_m^1}{\partial q_3^j} \lambda_m^1 + \frac{\partial g_m^2}{\partial q_3^j} \lambda_m^2 + \frac{\partial g_m^3}{\partial q_3^j} \lambda_m^3 \right), \\
 & \frac{m_4}{2} l_1 l_4 \cos(q_4^j - q_1^j) \ddot{q}_1^j + \frac{m_4}{2} l_2 l_4 \cos(q_2^j) \cos(q_4^j) \ddot{q}_2^j + \frac{m_4}{2} l_3 l_4 \cos(q_3^j) \cos(q_4^j) \ddot{q}_3^j + \frac{m_4}{4} l_4^2 \ddot{q}_4^j + \\
 & + \frac{m_4}{2} l_1 l_4 (\dot{q}_1^j)^2 \sin(q_4^j - q_1^j) - \frac{m_4}{2} l_2 l_4 (\dot{q}_2^j)^2 \sin(q_2^j) \cos(q_4^j) - \frac{m_4}{2} l_3 l_4 (\dot{q}_3^j)^2 \sin(q_3^j) \cos(q_4^j) = \\
 & = Q_4^j + \sum_{m=1}^3 \left(\frac{\partial g_m^1}{\partial q_4^j} \lambda_m^1 + \frac{\partial g_m^2}{\partial q_4^j} \lambda_m^2 + \frac{\partial g_m^3}{\partial q_4^j} \lambda_m^3 \right), \\
 & j = 1, 2, 3.
 \end{aligned} \tag{2}$$

К этой системе дифференциальных уравнений присовокупляется система линейных алгебраических уравнений голономных дополнительных связей, выражающих условия недеформируемости подвижной платформы (рис. 1а и б), т.е. $AB = BC = AC = Const$:

$$\left\{ \begin{array}{l}
g_1^1(q_1^1, \dots, q_4^1; q_1^2, \dots, q_4^2) = (OO'_0)_X + l_2 \text{Cos}(\tilde{Q}'^1) \text{Cos}(q_2^1) + l_3 \text{Cos}(\tilde{Q}'^2) \text{Cos}(q_3^1) - \\
\quad - (OO''_0)_X - l_2 \text{Cos}(\tilde{Q}''^1) \text{Cos}(q_2^2) - l_3 \text{Cos}(\tilde{Q}''^2) \text{Cos}(q_3^2) = (AB)_X, \\
g_2^1(q_1^1, \dots, q_4^1; q_1^2, \dots, q_4^2) = l_1 \text{Sin}(q_1^1) + l_2 \text{Sin}(q_2^1) + l_3 \text{Sin}(q_3^1) + l_4 \text{Sin}(q_4^1) - \\
\quad - l_1 \text{Sin}(q_1^2) - l_2 \text{Sin}(q_2^2) - l_3 \text{Sin}(q_3^2) - l_4 \text{Sin}(q_4^2) = (AB)_Y, \\
g_3^1(q_1^1, \dots, q_4^1; q_1^2, \dots, q_4^2) = (OO'_0)_Z + l_1 \text{Cos}(\tilde{Q}'^1) \text{Cos}(q_1^1) + l_4 \text{Cos}(\tilde{Q}'^4) \text{Cos}(q_4^1) - \\
\quad - (OO''_0)_Z - l_1 \text{Cos}(\tilde{Q}''^1) \text{Cos}(q_1^2) - l_4 \text{Cos}(\tilde{Q}''^4) \text{Cos}(q_4^2) = (AB)_Z;
\end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
g_1^2(q_1^2, \dots, q_4^2; q_1^3, \dots, q_4^3) = (OO''_0)_X + l_2 \text{Cos}(\tilde{Q}''^1) \text{Cos}(q_2^2) + l_3 \text{Cos}(\tilde{Q}''^2) \text{Cos}(q_3^2) - \\
\quad - (OO'''_0)_X - l_2 \text{Cos}(\tilde{Q}'''^1) \text{Cos}(q_2^3) - l_3 \text{Cos}(\tilde{Q}'''^2) \text{Cos}(q_3^3) = (BC)_X, \\
g_2^2(q_1^2, \dots, q_4^2; q_1^3, \dots, q_4^3) = l_1 \text{Sin}(q_1^2) + l_2 \text{Sin}(q_2^2) + l_3 \text{Sin}(q_3^2) + l_4 \text{Sin}(q_4^2) - \\
\quad - l_1 \text{Sin}(q_1^3) - l_2 \text{Sin}(q_2^3) - l_3 \text{Sin}(q_3^3) - l_4 \text{Sin}(q_4^3) = (BC)_Y, \\
g_3^2(q_1^2, \dots, q_4^2; q_1^3, \dots, q_4^3) = (OO''_0)_Z + l_1 \text{Cos}(\tilde{Q}''^1) \text{Cos}(q_1^2) + l_4 \text{Cos}(\tilde{Q}''^4) \text{Cos}(q_4^2) - \\
\quad - (OO'''_0)_Z - l_1 \text{Cos}(\tilde{Q}'''^1) \text{Cos}(q_1^3) - l_4 \text{Cos}(\tilde{Q}'''^4) \text{Cos}(q_4^3) = (BC)_Z;
\end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
g_1^3(q_1^1, \dots, q_4^1; q_1^3, \dots, q_4^3) = (OO'_0)_X + l_2 \text{Cos}(\tilde{Q}'^1) \text{Cos}(q_2^1) + l_3 \text{Cos}(\tilde{Q}'^2) \text{Cos}(q_3^1) - \\
\quad - (OO'''_0)_X - l_2 \text{Cos}(\tilde{Q}'''^1) \text{Cos}(q_2^3) - l_3 \text{Cos}(\tilde{Q}'''^2) \text{Cos}(q_3^3) = (AC)_X, \\
g_2^3(q_1^1, \dots, q_4^1; q_1^3, \dots, q_4^3) = l_1 \text{Sin}(q_1^1) + l_2 \text{Sin}(q_2^1) + l_3 \text{Sin}(q_3^1) + l_4 \text{Sin}(q_4^1) - \\
\quad - l_1 \text{Sin}(q_1^3) - l_2 \text{Sin}(q_2^3) - l_3 \text{Sin}(q_3^3) - l_4 \text{Sin}(q_4^3) = (AC)_Y, \\
g_3^3(q_1^1, \dots, q_4^1; q_1^3, \dots, q_4^3) = (OO'_0)_Z + l_1 \text{Cos}(\tilde{Q}'^1) \text{Cos}(q_1^1) + l_4 \text{Cos}(\tilde{Q}'^4) \text{Cos}(q_4^1) - \\
\quad - (OO'''_0)_Z - l_1 \text{Cos}(\tilde{Q}'''^1) \text{Cos}(q_1^3) - l_4 \text{Cos}(\tilde{Q}'''^4) \text{Cos}(q_4^3) = (AC)_Z.
\end{array} \right. \quad (5)$$

С учетом условия голономности дополнительных связей система алгебро-дифференциальных уравнений движения (2) – (5) микроманипулятора путем двукратного дифференцирования уравнений связей может быть приведена к виду [5]

$$\begin{bmatrix} M_{qq} & M_{q\lambda} \\ M_{\lambda q} & O_{9 \times 9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\vec{q}} \\ \ddot{\vec{\lambda}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{c}_q \\ \vec{c}_\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{F} \\ \vec{0}_9 \end{bmatrix} \quad (6)$$

при следующих обозначениях:

$$[M_{\lambda q}] = \begin{bmatrix} 0 & -l_2 \cos(\tilde{Q}') \sin(q_2^1) & -l_3 \cos(\tilde{Q}') \sin(q_3^1) & 0 \\ l_1 \cos(q_1^1) & l_2 \cos(q_2^1) & l_3 \cos(q_3^1) & l_4 \cos(q_4^1) \\ -l_1 \cos(\tilde{Q}') \sin(q_1^1) & 0 & 0 & -l_4 \cos(\tilde{Q}') \sin(q_4^1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -l_2 \cos(\tilde{Q}') \sin(q_2^1) & -l_3 \cos(\tilde{Q}') \sin(q_3^1) & 0 \\ l_1 \cos(q_1^1) & l_2 \cos(q_2^1) & l_3 \cos(q_3^1) & l_4 \cos(q_4^1) \\ -l_1 \cos(\tilde{Q}') \sin(q_1^1) & 0 & 0 & -l_4 \cos(\tilde{Q}') \sin(q_4^1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & l_2 \cos(\tilde{Q}'') \sin(q_2^2) & l_3 \cos(\tilde{Q}'') \sin(q_3^2) & 0 \\ -l_1 \cos(q_1^2) & -l_2 \cos(q_2^2) & -l_3 \cos(q_3^2) & -l_4 \cos(q_4^2) \\ l_1 \cos(\tilde{Q}'') \sin(q_1^2) & 0 & 0 & l_4 \cos(\tilde{Q}'') \sin(q_4^2) \\ 0 & -l_2 \cos(\tilde{Q}'') \sin(q_2^2) & -l_3 \cos(\tilde{Q}'') \sin(q_3^2) & 0 \\ -l_1 \cos(q_1^2) & -l_2 \cos(q_2^2) & -l_3 \cos(q_3^2) & -l_4 \cos(q_4^2) \\ l_1 \cos(\tilde{Q}'') \sin(q_1^2) & 0 & 0 & l_4 \cos(\tilde{Q}'') \sin(q_4^2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 \cos(\tilde{Q}''') \sin(q_2^3) & l_3 \cos(\tilde{Q}''') \sin(q_3^3) & 0 \\ -l_1 \cos(q_1^3) & -l_2 \cos(q_2^3) & -l_3 \cos(q_3^3) & -l_4 \cos(q_4^3) \\ l_1 \cos(\tilde{Q}''') \sin(q_1^3) & 0 & 0 & l_4 \cos(\tilde{Q}''') \sin(q_4^3) \\ 0 & l_2 \cos(\tilde{Q}''') \sin(q_2^3) & l_3 \cos(\tilde{Q}''') \sin(q_3^3) & 0 \\ -l_1 \cos(q_1^3) & -l_2 \cos(q_2^3) & -l_3 \cos(q_3^3) & -l_4 \cos(q_4^3) \\ l_1 \cos(\tilde{Q}''') \sin(q_1^3) & 0 & 0 & l_4 \cos(\tilde{Q}''') \sin(q_4^3) \end{bmatrix},$$

причем $[M_{q\lambda}] = [M_{\lambda q}]^T$;

$$[M_{qq}] = \begin{bmatrix} [M_{qq}^1] & [0_{4 \times 4}] & [0_{4 \times 4}] \\ [0_{4 \times 4}] & [M_{qq}^2] & [0_{4 \times 4}] \\ [0_{4 \times 4}] & [0_{4 \times 4}] & [M_{qq}^3] \end{bmatrix}, \text{ где}$$

$$[M_{qq}^j] = \begin{bmatrix} m_{11}^j & m_{12}^j & m_{13}^j & m_{14}^j \\ m_{21}^j & m_{22}^j & m_{23}^j & m_{24}^j \\ m_{31}^j & m_{32}^j & m_{33}^j & m_{34}^j \\ m_{41}^j & m_{42}^j & m_{43}^j & m_{44}^j \end{bmatrix} \text{ при } m_{ik}^j = m_{ki}^j \text{ у } j = 1, 2, 3,$$

причем

$$m_{11}^j = \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_4 \right) l_1^2, \quad m_{12}^j = \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 \right) l_1 l_2 \text{Cos}(q_1^j) \text{Cos}(q_2^j),$$

$$m_{13}^j = \left(\frac{m_3}{2} + m_4 \right) l_1 l_3 \text{Cos}(q_1^j) \text{Cos}(q_3^j), \quad m_{14}^j = \frac{m_4}{2} l_1 l_4 \text{Cos}(q_1^j - q_4^j);$$

$$m_{22}^j = \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_4 \right) l_2^2, \quad m_{23}^j = \left(\frac{m_3}{2} + m_4 \right) l_2 l_3 \text{Cos}(q_2^j - q_3^j), \quad m_{24}^j = \frac{m_4}{2} l_2 l_4 \text{Cos}(q_2^j) \text{Cos}(q_4^j);$$

$$m_{33}^j = \left(\frac{m_3}{4} + m_4 \right) l_3^2, \quad m_{34}^j = \frac{m_4}{2} l_3 l_4 \text{Cos}(q_3^j) \text{Cos}(q_4^j);$$

$$m_{44}^j = \frac{m_4}{4} l_4^2;$$

$$\vec{q} = [\ddot{q}_1^j, \dots, \ddot{q}_4^j; \dot{q}_1^2, \dots, \dot{q}_4^2; \dot{q}_1^3, \dots, \dot{q}_4^3]^T, \quad \vec{\lambda} = [\lambda_1^j, \dots, \lambda_3^j; \lambda_1^2, \dots, \lambda_3^2; \lambda_1^3, \dots, \lambda_3^3]^T;$$

$$\vec{c}_q = [c_{q1}^j, c_{q2}^j, c_{q3}^j, c_{q4}^j, c_{q1}^2, c_{q2}^2, c_{q3}^2, c_{q4}^2, c_{q1}^3, c_{q2}^3, c_{q3}^3, c_{q4}^3]^T, \quad \text{где}$$

$$c_{q1}^k = -\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 \right) l_1 l_2 (\dot{q}_2^k)^2 \text{Cos}(q_1^k) \text{Sin}(q_2^k) - \left(\frac{m_3}{2} + m_4 \right) l_1 l_3 (\dot{q}_3^k)^2 \text{Cos}(q_1^k) \text{Sin}(q_3^k) + \\ + \frac{m_4}{2} l_1 l_4 (\dot{q}_4^k)^2 \text{Sin}(q_1^k - q_4^k),$$

$$c_{q2}^k = -\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 \right) l_1 l_2 (\dot{q}_1^k)^2 \text{Sin}(q_1^k) \text{Cos}(q_2^k) + \left(\frac{m_3}{2} + m_4 \right) l_2 l_3 (\dot{q}_3^k)^2 \text{Sin}(q_2^k - q_3^k) - \\ - \frac{m_4}{2} l_2 l_4 (\dot{q}_4^k)^2 \text{Cos}(q_2^k) \text{Sin}(q_4^k),$$

$$c_{q3}^k = -\left(\frac{m_3}{2} + m_4 \right) l_1 l_3 (\dot{q}_1^k)^2 \text{Sin}(q_1^k) \text{Cos}(q_3^k) + \left(\frac{m_3}{2} + m_4 \right) l_2 l_3 (\dot{q}_2^k)^2 \text{Sin}(q_3^k - q_2^k) - \\ - \frac{m_4}{2} l_3 l_4 (\dot{q}_4^k)^2 \text{Cos}(q_3^k) \text{Sin}(q_4^k),$$

$$c_{q4}^k = \frac{m_4}{2} l_1 l_4 (\dot{q}_1^k)^2 \text{Sin}(q_4^k - q_1^k) - \frac{m_4}{2} l_2 l_4 (\dot{q}_2^k)^2 \text{Sin}(q_2^k) \text{Cos}(q_4^k) - \frac{m_4}{2} l_3 l_4 (\dot{q}_3^k)^2 \text{Sin}(q_3^k) \text{Cos}(q_4^k),$$

$$k = 1, \dots, 3;$$

$$\bar{c}_\lambda = [c_{\lambda 1}^1, c_{\lambda 2}^1, c_{\lambda 3}^1, c_{\lambda 1}^2, c_{\lambda 2}^2, c_{\lambda 3}^2, c_{\lambda 1}^3, c_{\lambda 2}^3, c_{\lambda 3}^3]^T, \quad \text{где}$$

$$\begin{aligned} c_{\lambda 1}^1 &= -l_2(\dot{q}_2^1)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}') \text{Cos}(q_2^1) - l_3(\dot{q}_3^1)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}') \text{Cos}(q_3^1) + \\ &\quad + l_2(\dot{q}_2^2)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}'') \text{Cos}(q_2^2) + l_3(\dot{q}_3^2)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}'') \text{Cos}(q_3^2), \\ c_{\lambda 2}^1 &= -l_1(\dot{q}_1^1)^2 \text{Sin}(q_1^1) - l_2(\dot{q}_2^1)^2 \text{Sin}(q_2^1) - l_3(\dot{q}_3^1)^2 \text{Sin}(q_3^1) - l_4(\dot{q}_4^1)^2 \text{Sin}(q_4^1) + \\ &\quad + l_1(\dot{q}_1^2)^2 \text{Sin}(q_1^2) + l_2(\dot{q}_2^2)^2 \text{Sin}(q_2^2) + l_3(\dot{q}_3^2)^2 \text{Sin}(q_3^2) + l_4(\dot{q}_4^2)^2 \text{Sin}(q_4^2), \\ c_{\lambda 3}^1 &= -l_1(\dot{q}_1^1)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}') \text{Cos}(q_1^1) - l_4(\dot{q}_4^1)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}') \text{Cos}(q_4^1) + \\ &\quad + l_1(\dot{q}_1^2)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}'') \text{Cos}(q_1^2) + l_4(\dot{q}_4^2)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}'') \text{Cos}(q_4^2), \\ c_{\lambda 1}^2 &= -l_2(\dot{q}_2^2)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}'') \text{Cos}(q_2^2) - l_3(\dot{q}_3^2)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}'') \text{Cos}(q_3^2) + \\ &\quad + l_2(\dot{q}_2^3)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}''') \text{Cos}(q_2^3) + l_3(\dot{q}_3^3)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}''') \text{Cos}(q_3^3), \\ c_{\lambda 2}^2 &= -l_1(\dot{q}_1^2)^2 \text{Sin}(q_1^2) - l_2(\dot{q}_2^2)^2 \text{Sin}(q_2^2) - l_3(\dot{q}_3^2)^2 \text{Sin}(q_3^2) - l_4(\dot{q}_4^2)^2 \text{Sin}(q_4^2) + \\ &\quad + l_1(\dot{q}_1^3)^2 \text{Sin}(q_1^3) + l_2(\dot{q}_2^3)^2 \text{Sin}(q_2^3) + l_3(\dot{q}_3^3)^2 \text{Sin}(q_3^3) + l_4(\dot{q}_4^3)^2 \text{Sin}(q_4^3), \\ c_{\lambda 3}^2 &= -l_1(\dot{q}_1^2)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}'') \text{Cos}(q_1^2) - l_4(\dot{q}_4^2)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}'') \text{Cos}(q_4^2) + \\ &\quad + l_1(\dot{q}_1^3)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}''') \text{Cos}(q_1^3) + l_4(\dot{q}_4^3)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}''') \text{Cos}(q_4^3), \end{aligned}$$

$$\bar{c}_\lambda = [c_{\lambda 1}^1, c_{\lambda 2}^1, c_{\lambda 3}^1, c_{\lambda 1}^2, c_{\lambda 2}^2, c_{\lambda 3}^2, c_{\lambda 1}^3, c_{\lambda 2}^3, c_{\lambda 3}^3]^T, \quad \text{где}$$

$$\begin{aligned} c_{\lambda 1}^1 &= -l_2(\dot{q}_2^1)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}') \text{Cos}(q_2^1) - l_3(\dot{q}_3^1)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}') \text{Cos}(q_3^1) + \\ &\quad + l_2(\dot{q}_2^2)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}'') \text{Cos}(q_2^2) + l_3(\dot{q}_3^2)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}'') \text{Cos}(q_3^2), \\ c_{\lambda 2}^1 &= -l_1(\dot{q}_1^1)^2 \text{Sin}(q_1^1) - l_2(\dot{q}_2^1)^2 \text{Sin}(q_2^1) - l_3(\dot{q}_3^1)^2 \text{Sin}(q_3^1) - l_4(\dot{q}_4^1)^2 \text{Sin}(q_4^1) + \\ &\quad + l_1(\dot{q}_1^2)^2 \text{Sin}(q_1^2) + l_2(\dot{q}_2^2)^2 \text{Sin}(q_2^2) + l_3(\dot{q}_3^2)^2 \text{Sin}(q_3^2) + l_4(\dot{q}_4^2)^2 \text{Sin}(q_4^2), \\ c_{\lambda 3}^1 &= -l_1(\dot{q}_1^1)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}') \text{Cos}(q_1^1) - l_4(\dot{q}_4^1)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}') \text{Cos}(q_4^1) + \\ &\quad + l_1(\dot{q}_1^2)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}'') \text{Cos}(q_1^2) + l_4(\dot{q}_4^2)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}'') \text{Cos}(q_4^2), \\ c_{\lambda 1}^2 &= -l_2(\dot{q}_2^2)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}'') \text{Cos}(q_2^2) - l_3(\dot{q}_3^2)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}'') \text{Cos}(q_3^2) + \\ &\quad + l_2(\dot{q}_2^3)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}''') \text{Cos}(q_2^3) + l_3(\dot{q}_3^3)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}''') \text{Cos}(q_3^3), \\ c_{\lambda 2}^2 &= -l_1(\dot{q}_1^2)^2 \text{Sin}(q_1^2) - l_2(\dot{q}_2^2)^2 \text{Sin}(q_2^2) - l_3(\dot{q}_3^2)^2 \text{Sin}(q_3^2) - l_4(\dot{q}_4^2)^2 \text{Sin}(q_4^2) + \\ &\quad + l_1(\dot{q}_1^3)^2 \text{Sin}(q_1^3) + l_2(\dot{q}_2^3)^2 \text{Sin}(q_2^3) + l_3(\dot{q}_3^3)^2 \text{Sin}(q_3^3) + l_4(\dot{q}_4^3)^2 \text{Sin}(q_4^3), \\ c_{\lambda 3}^2 &= -l_1(\dot{q}_1^2)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}'') \text{Cos}(q_1^2) - l_4(\dot{q}_4^2)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}'') \text{Cos}(q_4^2) + \\ &\quad + l_1(\dot{q}_1^3)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}''') \text{Cos}(q_1^3) + l_4(\dot{q}_4^3)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}''') \text{Cos}(q_4^3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{\lambda 1}^3 &= -l_2(\dot{q}_2^1)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}') \text{Cos}(q_2^1) - l_3(\dot{q}_3^1)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}') \text{Cos}(q_3^1) + \\
&\quad + l_2(\dot{q}_2^3)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}''') \text{Cos}(q_2^3) + l_3(\dot{q}_3^3)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}''') \text{Cos}(q_3^3), \\
c_{\lambda 2}^3 &= -l_1(\dot{q}_1^1)^2 \text{Sin}(q_1^1) - l_2(\dot{q}_2^1)^2 \text{Sin}(q_2^1) - l_3(\dot{q}_3^1)^2 \text{Sin}(q_3^1) - l_4(\dot{q}_4^1)^2 \text{Sin}(q_4^1) + \\
&\quad + l_1(\dot{q}_1^3)^2 \text{Sin}(q_1^3) + l_2(\dot{q}_2^3)^2 \text{Sin}(q_2^3) + l_3(\dot{q}_3^3)^2 \text{Sin}(q_3^3) + l_4(\dot{q}_4^3)^2 \text{Sin}(q_4^3), \\
c_{\lambda 3}^3 &= -l_1(\dot{q}_1^1)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}') \text{Cos}(q_1^1) - l_4(\dot{q}_4^1)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}') \text{Cos}(q_4^1) + \\
&\quad + l_1(\dot{q}_1^3)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}''') \text{Cos}(q_1^3) + l_4(\dot{q}_4^3)^2 \text{Cos}(\tilde{Q}''') \text{Cos}(q_4^3);
\end{aligned}$$

$$\vec{F} = [F_1^e, F_2^e, F_3^a + F_3^e, F_4^e; F_5^e, F_6^e, F_7^a + F_7^e F_8^e; F_9^e, F_{10}^e, F_{11}^a + F_{11}^e F_{12}^e]^T,$$

где F_{4i-1}^a , $i=1,2,3$ – обобщенные (приводные) силы и F_i^e , $i=1,\dots,12$ – упругие силы в шарнирах.

Моделирование динамики прецизионного параллельного микроманипулятора. На основе принципиальной схемы параллельного микроманипулятора ВАРАМАН1 [4] в Национальном политехническом университете Армении разработана его модификация [6, 7], функциональная схема которой показана на рис. 2.

В целях повышения точности функционирования микроманипулятора и усовершенствования возможностей его управления в новом варианте, состоящем также из двух платформ (элементы 3 на рис. 2), применены качественно новые одно– и двухподвижные высокоточные вращательные упругие шарниры (1 и 2 на рис. 2) и пьезоэлектрические или полимерметаллические актуаторы (4 на рис. 2).

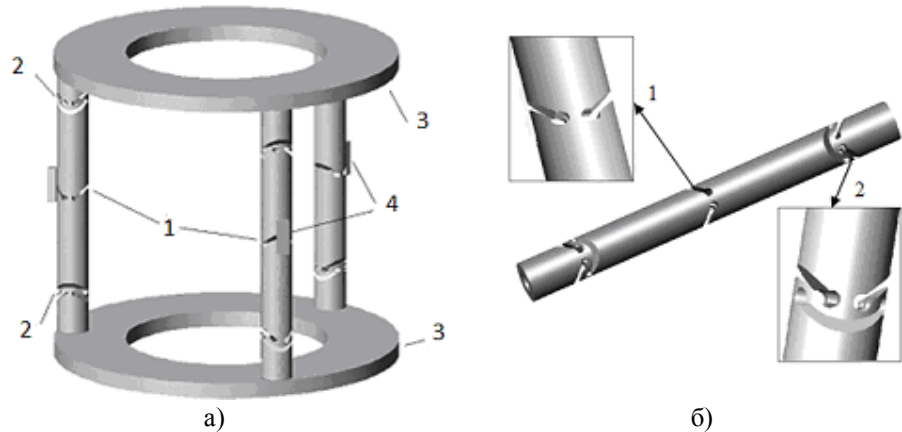


Рис. 2. Прецизионный параллельный микроманипулятор (а) и его структурные модули (б)

В отличие от прототипа, который допускал лишь дискретное управление [6,7], предложенная модификация обеспечивает непрерывное управление

микроманипулятором, а также высокую скорость и точность позиционирования платформы.

Нетрудно убедиться, что переход от принципиальной схемы базового параллельного микроманипулятора, показанной на рис. 1, к изображенной на рис. 2 видоизмененной расчетной схеме осуществляется путем следующего предельного перехода в формализме (2) – (6): $l_1 = l_4 \rightarrow 0$ для всех трех составляющих подцепей (см. рис. 2).

Численный пример моделирования динамики прецизионного микроманипулятора. Численный пример динамического моделирования показанного на рис. 2 высокоточного параллельного микроманипулятора реализуется для следующих геометрических и механических характеристик его звеньев: $l_1 = l_4 = 0,01\text{ м}$, $l_2 = l_3 = 0,1\text{ м}$; $E = 200 \cdot 10^9\text{ Па}$. Звенья микроманипулятора предполагаются полыми при значениях наружного и внутреннего диаметров: $D = 0,01\text{ м}$ и $d = 0,009\text{ м}$ соответственно.

Для численного примера принимаются следующие начальные условия:

$$q_1^j = \frac{\pi}{2}, \quad q_2^j = \frac{2}{3}\pi, \quad q_3^j = \frac{\pi}{3}, \quad q_4^j = \frac{\pi}{2}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Численное решение системы нелинейных дифференциальных уравнений движения (6) микроманипулятора (см. рис. 2) с учетом начальных условий (7) производится на основе явной схемы численного интегрирования Ньюмарка [8].

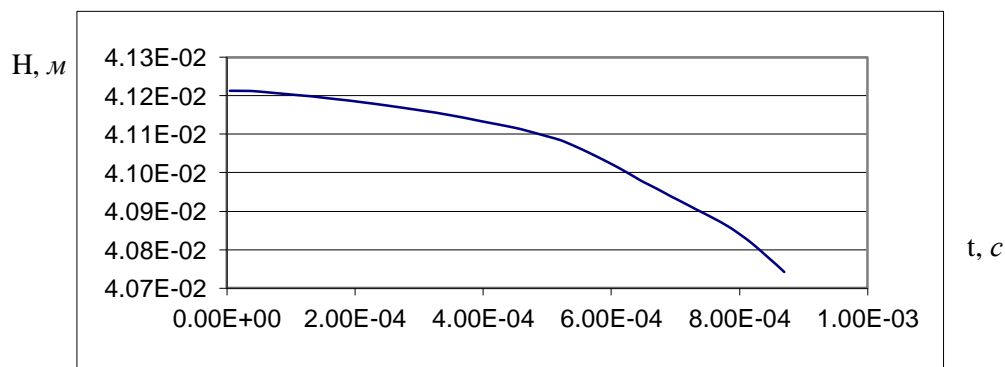


Рис. 3. Результаты симуляции динамической модели микроманипулятора при трех работающих приводах. Шаг интегрирования $\Delta t = 5 \cdot 10^{-6}\text{ с}$

Сначала проведена симуляция динамической модели микроманипулятора в случае совместной работы трех приводов при постоянных значениях приводных моментов $M_1 = M_2 = M_3 = -0,1\text{ Нм}$ и шаге численного

интегрирования $\Delta t = 5 \cdot 10^{-6} \text{ с}$. График зависимости положения подвижной платформы (Н) от времени (t) представлен на рис. 3. Перемещение платформы составляет 450 мкм. Затем проведена симуляция в режиме работы двух приводов со стационарными значениями приводных моментов $M_1 = M_2 = -0,3 \text{ Нм}$, $M_3 = 0$. Графики зависимостей положения подвижной платформы (Н) от времени (t) для значений шага интегрирования (а) $\Delta t = 10^{-5} \text{ с}$ и $\Delta t = 3 \cdot 10^{-6} \text{ с}$) представлены на рис. 4. Перемещение платформы составляет 200 мкм. Адекватность результатов естественно повышается при уменьшении шага интегрирования (см рис. 4б).

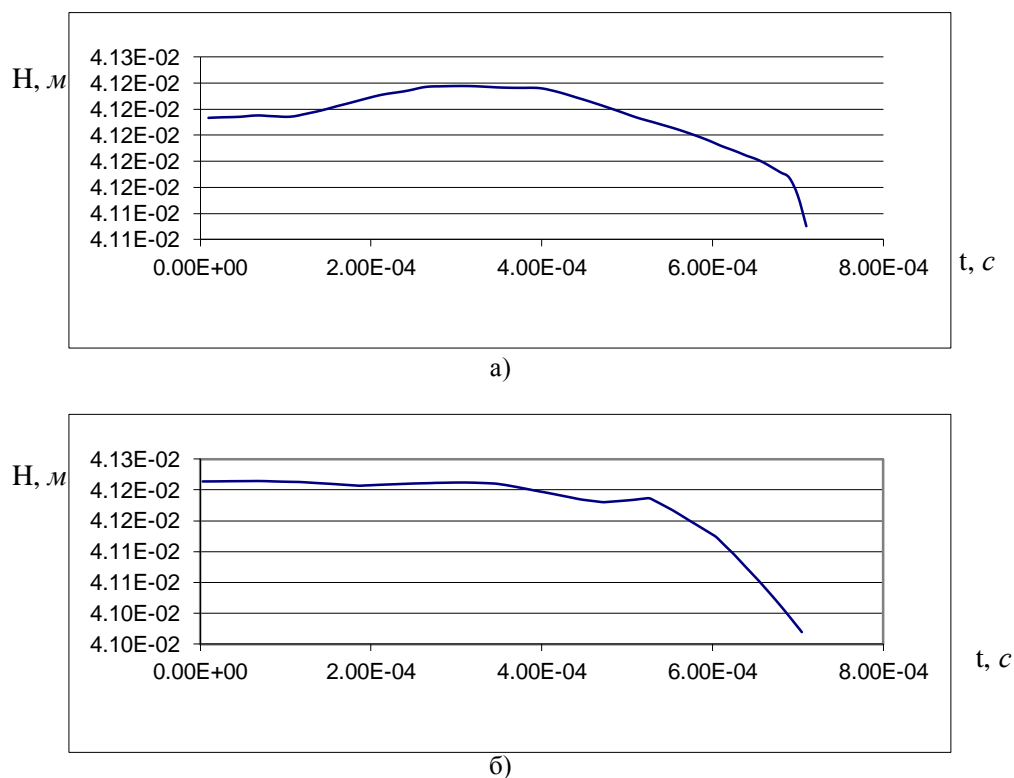


Рис. 4. Результаты симуляции динамической модели микроманипулятора при двух активных приводах. Шаг интегрирования: а - $\Delta t = 10^{-5} \text{ с}$ и б - $\Delta t = 3 \cdot 10^{-6} \text{ с}$

Заключение. В изложенной статье формулируются уравнения движения параллельного микроманипулятора с абсолютно жесткими звеньями, упругими шарнирами и невесомой подвижной платформой, которая предполагается к тому же еще и недеформируемой. Перечисленные свойства и особенности звеньев,

шарниров и подвижной платформы микроманипулятора обеспечивают численное решение сформулированной нелинейной задачи с минимальными трудностями формализации динамической модели и алгоритмизации вычислительного процесса в целом. Помимо отмеченного, представленная методика обладает хорошей адаптируемостью и создает реальные предпосылки для эффективного динамического моделирования любых структур параллельных манипуляторов с упругими звеньями и недеформируемой подвижной платформой, поскольку всякое упругое звено может быть представлено как некоторая конечная совокупность абсолютно жестких звеньев, связанных между собой упругими шарнирами. Таким образом, предложен общий подход к динамическому анализу параллельных манипуляторов с упругими звеньями.

Работа выполнена в рамках научной темы 15Т-2Д044 при финансовой поддержке КН МОН РА.

Литература

1. Глазунов В.А., Колискор А.Ш., Крайнев А.Ф. Пространственные механизмы параллельной структуры. – М.: Наука, 1991. – 94 с.
2. Merlet J.P. Parallel Robots. – Kluwer Academic Publishers, 2000. – 394 p.
3. Степанян К.Г., Арутюнян М.Г., Мкртчян М.Г., Саркисян Ю.Л. Оптимальное управление параллельных манипуляторов с упругими шарнирами // Вестник Инженерной академии Армении (ВИАА). – 2015. – Т.12, N2. – С. 298 – 303.
4. Design and Simulation of a Binary Actuated Parallel Micro-Manipulator/ **Giuseppe Carbone, Conghui Liang, Hao Gu, et al** // 13th World Congress in Mechanism and Machine Science.- Guanajuato, Mexico, 19 – 25 June, 2011.
5. **Shabana A.** Dynamic of multibody systems. – Edition Springer-Verlag, 1988. – 374 p.
6. Арутюнян М.Г., Мкртчян М.Г. Концептуальные принципы разработки и моделирования прецизионных устройств // Вестник НПУА: Сб. науч. ст. Часть 2. – Ереван: Чартарагет, 2015. – С. 302 – 307.
7. А.с. на изобретение РА, N 2757 А. Параллельный микроманипулятор / **М.Г. Арутюнян, М.Г. Мкртчян, С.А. Саркисян, Н.Б. Закарян.** – Ереван, 25.07.2013.
8. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 598 с.

*Поступила в редакцию 04.04.2018.
Принята к опубликованию 04.06.2018.*

ԱՆԿՇՈՒԵԼԻ ՇԱՐԺԱԿԱՆ ՀԱՐԹԱԿՈՎ ԳԵՐՃԵԳՐԻՏ ԶՈՒԳԱՀԵՌ
ՄԻԿՐՈՄԱՆԻՊՈՒԼՅԱՏՈՐԻ ԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ՄՈԴԵԼԱՎՈՐՈՒՄԸ

Հ.Ա. Գևորգյան, Մ.Գ. Հարությունյան, Յու. Լ. Սարգսյան,

Լագրանժի մեթոդով ձևավորված է անկշիռ և չդեֆորմացվող շարժական հարթակով զուգահեռ մանիպուլյատորի շարժման հանրահաշվադիֆերենցիալ հավասարումների համակարգը: Մանիպուլյատորի քառաշարժուն երեք ենթաշղթաներից յուրաքանչյուրի համար կազմվում են Լագրանժի դասական երկրորդ սեռի հավասարումները՝ լրացուցիչ կապերով: Միաժամանակ, գրվում են հետազոտվող մանիպուլյատորի ենթաշղթաների ծայրակետերի միջև հեռավորությունների անփոփոխության պայմանն արտահայտող հանրահաշվական հավասարումները: Որպես զուգահեռ մանիպուլյատորի շարժումը բնութագրող կոնֆիգուրացիոն պարամետրեր ընտրված են նրա ընդհանրացված կորդինատներն անշարժ կորդինատային համակարգում: Ձևափոխումների արդյունքում մանիպուլյատորի շարժումը նկարագրող հավասարումների համակարգը ներկայացվում է կոմպակտ մատրիցային տեսքով: Զուգահեռ մանիպուլյատորի ձևավորված դինամիկական մոդելի հիման վրա, գրոյի ձգտեցնելով յուրաքանչյուր ենթաշղթայի առաջին և չորրորդ օղակների երկարությունները, անցում է կատարվում գերճշգրիտ առաձգական հողակապերով զուգահեռ միկրոմանիպուլյատորի դիտարկվող սխեմային: Վերջինս օժտված է առաձգական հողակապերի կառուցվածքով ու կիրառվող ակտուատորներով պայմանավորված մի շարք առավելություններով՝ հարթակի շարժման ճշտության և կառավարման միաժամանակյա տեսանկյուններից, և գերադասելի է նրա կոշտ զույգերով նախատիպերից: Ներկայացված են հետազոտվող գերճշգրիտ առաձգական հողակապերով զուգահեռ միկրոմանիպուլյատորի դինամիկական մոդելավորման թվային արդյունքները, որոնք ստացվել են Նյումարկի թվային ինտեգրման եղանակով: Դիտարկված են երկու և երեք շարժաբեռների համատեղ գործողության դեպքերում միկրոմանիպուլյատորի շարժական դիրքի փոփոխությունները՝ կախված ժամանակից: Միկրոմանիպուլյատորի դինամիկայի թվային թեստավորման արդյունքները յուրաքանչյուր դեպքի համար ներկայացված են գրաֆիկական տեսքով:

Առանցքային բառեր. զուգահեռ միկրոմանիպուլյատոր, առաձգական հողակապեր, շարժական հարթակ, դինամիկական մոդելավորում:

DYNAMIC MODELING OF A HIGH-PRECISION PARALLEL MICROMANIPULATOR WITH A WEIGHTLESS MOBILE PLATFORM

H.A. Gevorgyan, M.G. Arutunyan, Yu.L. Sarkissyan

On the basis of the Lagrange method, a nonlinear system of algebro-differential equations of motion is formed for a parallel micromanipulator with a weightless and non-deformable mobile platform. For each of the 3 four d.o.f. subchains of the manipulator, the classical Lagrange equations of second order with additional constraints are obtained; along with the Lagrange differential equations of motion scleronomous constraints are made up. Along with the Lagrange differential equations of motion, algebraic equations of scleronomous constraints are described, expressing the invariability of the distances between the end points of the constituent subchains. As configuration parameter to describe the motion of the considered parallel manipulator, a set of absolute generalized coordinates is chosen. In the final form, the system of algebraic differential equations of motion of the parallel manipulator with weightless and non-deformable mobile platform is written in a compact matrix form. Then, on the basis of the generated dynamic model of the parallel manipulator, for zero lengths of the first and fourth links of each of three subchains, a formal transition to the model of parallel micromanipulator with weightless and non-deformable moving platform as with high-precision elastic hinges is implemented. The latter has a number of proven advantages due to the elastic joints and is preferable to its prototype design with rigid joints. In the final part, numerical results of the dynamic modeling of the parallel under consideration generated by using the Newmark's explicit scheme of numerical integration are presented. The cases of the combined action of two and three microdrives are considered and time functions of the position of the mobile platform for each of the above mentioned testing cases are given.

Keywords: parallel micromanipulator, elastic joints, mobile platform, dynamic modeling.