УДК 621.81/85

К ВОПРОСУ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМАХ С НЕЛИНЕЙНО–ВОССТАНАВЛИВАЮЩЕЙ СИЛОЙ

А.В. Геворкян[1], Г.Г. Шекян[2]

[1]ЗАО НПИЦ “Электромаш ГАМ”
[2]Институт механики НАН РА

В линейных системах, когда воздействует периодическая (циклическая) сила, результирующее движение имеет два типа колебаний - свободные и вынужденные. Там, где система линейна и асимптотически устойчива, свободные колебания быстро затухают, и остаются только вынужденные колебания, которые имеют ту же частоту, что и частота внешней воздействующей силы. Отсюда следует, что при рассмотрении линейных систем их колебания однозначно определяются параметрами системы и характеристиками внешней силы, которые не зависят от исходных условий.

По существу, все задачи механики в реальных системах нелинейны. Применяемые методы линеаризации обычно являются приближенными, которые в большинстве случаев дают вполне удовлетворительные, а иногда и достаточно точные результаты. Существует, однако, ряд нелинейных задач, где линейное представление совершенно неприемлемо, поскольку в нелинейных системах часто встречаются существенно новые явления, принципиально отсутствующие в линейных системах.

В работе проведен анализ вынужденных колебаний физических и механических систем, где нелинейный период колебания равен целому кратному периоду внешней силы. Анализируется связь между нелинейными характеристиками системы и порядком субгармоники. Показано, что в нелинейных системах наряду с колебаниями, имеющими ту же частоту, что и внешние силы, может появиться ряд других периодических колебаний. Для их оценки в работе рассмотрены вынужденные колебания системы с полиномом нелинейно–восстанавливающей силы общего вида (до пятой степени нелинейности). В зависимости от степени нелинейности получен порядок субгармонических колебаний, как функция от амплитуды и частоты вынужденных колебаний. Показано, что аппроксимация амплитуды субгармонических колебаний по отношению к амплитудам вынужденных сил, принятым Мандельштамом и Папалекси, обеспечивает достаточную точность.

Ключевые слова: вынужденные колебания, субгармонические колебания, порядок субгармоники, нелинейно–восстанавливающая сила, свободные колебания, линейная система.

Введение. Отличительной чертой нелинейных систем является то, что в одной и той же системе могут существовать различные виды периодических колебаний, зависящие от начальных условий. Экспериментальные данные, приведенные на рисунке, показывают форму приложенного напряжения и результирующих токов в последовательной электрической цепи. Прикладывая одно и то же синусоидальное напряжение (а), наблюдаются колебания (б), имеющие в установившемся режиме ту же частоту, что и приложенное напряжение, поэтому эти колебания являются гармоническими. Осциллограмма (в), однако, представляет субгармоническое колебание порядка $1/3$, поскольку частота установившегося режима составляет одну треть вынуждающей частоты.

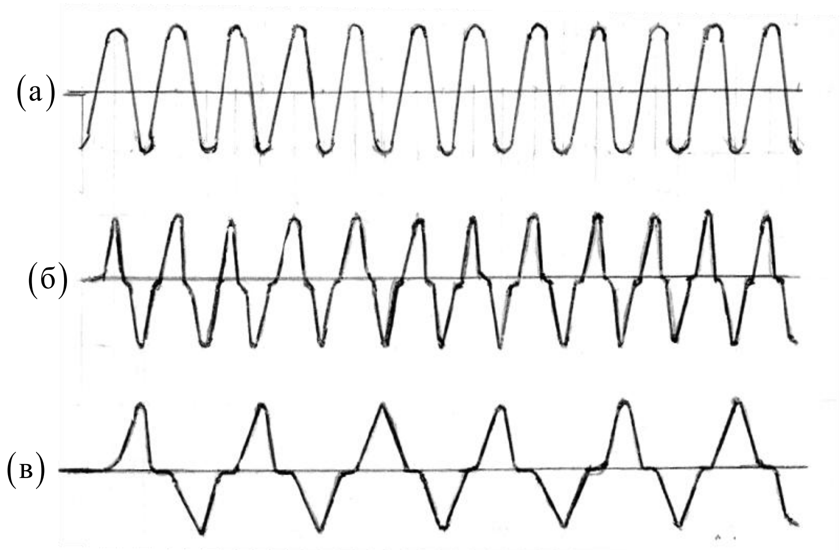

Рис. Различные виды колебаний системы: а - вынужденные колебания, б - резонансные колебания, в - субгармонические колебания

При вынужденных колебаниях возникающие гармоники зависят от степени нелинейности восстанавливающей силы, что и определяет его порядок.

Постановка задачи и ее решение. Рассмотрим колебания с основной частотой $1/\nu\ (\nu = 2,3,4,...)$. Эти колебания относятся к очень важному типу нелинейных колебаний, часто встречающихся в различных физических и механических системах [1-3]. Для исследования этого вопроса основное уравнение движения системы с нелинейно–восстанавливающей силой представим в виде

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + 2k\frac{dx}{d\tau} + F(x) = \frac{1}{\nu} B \cdot \sin \nu\tau, \tag{1}$$

где x – перемещение; τ – безразмерное время $(\tau = \omega t)$; k – коэффициент затухания; $F(x)$ – член, характеризующий нелинейно–восстанавливающую силу.

Заменив $dx/d\tau$ на v и продифференцировав уравнение (1) еще раз по τ, будем иметь

$$\frac{d^2\text{v}}{d\tau^2} + 2k\frac{dv}{d\tau}\text{v} + F(\text{v}) = B \cdot \cos v\tau. \tag{2}$$

С целью установления связи между нелинейностью восстанавливающей силы и порядком субгармонических колебаний рассмотрим полином соответствующей нелинейно–восстанавливающей силы $F(v)$:

$$F(v) = c_1\text{v} + c_2\text{v}^2 + c_3\text{v}^3 + ..., \tag{3}$$

где $c_1, c_2, c_3, ...$ - постоянные, определяемые нелинейными характеристиками восстанавливающей силы. (Как и в случае гармонических колебаний, величина базовых сил может быть выбрана произвольно). Для упрощения вычислений их удобно связать соотношением $c_1 + c_2 + c_3 + ... = 1$ [4 - 6].

Поскольку период внешних сил равен $2\pi/v$, то субгармонические колебания порядка $\frac{1}{v}$ будут иметь также период 2π и могут быть представлены функциями $\sin\tau$ и $\cos\tau$. Тогда для установившихся колебаний периодическое решение уравнения (2) представим в виде [6 - 8]

$$\text{v} = z + x\sin\tau + y\cos\tau + A\cos v\tau, \tag{4}$$

где z – постоянная составляющая; $x\sin\tau + y\cos\tau$ – субгармоническая составляющая, а $A \cdot \cos v\tau$ - член, имеющий частоту внешней силы.

Предполагается, что коэффициент затухания не очень велик, и им можно пренебречь. Тогда, согласно Мандельштаму и Папалекси [5], амплитуду можно аппроксимировать выражением

$$A = \frac{1}{1 - v^2} \cdot B. \tag{5}$$

Подстановка (4) в (2) и приравнивание нулю коэффициентов при $\sin\tau$ и $\cos\tau$ дает результат в зависимости от вида нелинейных характеристик восстанавливающей силы.

Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. Нелинейность определяется выражением

$$F(v) = c_1\text{v} + c_3\text{v}^3.$$

Здесь нелинейность симметрична, поскольку $F(v)$ нечетна.

Постоянный член z обычно в (4) отбрасывается, и упомянутая выше подстановка (4) в (2) приводит к уравнениям

$$\begin{cases} \left[1-\frac{3}{4}(x^2+y^2)-\frac{3}{2}A^2\right]x+k_1y, \\ \left[1-\frac{3}{4}(x^2+y^2)-\frac{3}{2}A^2\right]y-k_1x, \end{cases} \tag{6}$$

где $k_1=\frac{2k}{c_3}$.

Умножая первое уравнение на y, а второе на x и вычитая второе из первого, получим

$$k_1\left(x^2+y^2\right)=0.$$

Это означает, что при наличии затухания (т.е. при $k_1 \neq 0$) амплитуда субгармонических колебаний равна нулю. Следовательно, субгармонические колебания порядка $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$ в этом случае не могут иметь место. Однако для $v=3$ можно получить не равные одновременно нулю корни x и y, в результате чего получим ряд состояний равновесий, причем некоторые из них являются устойчивыми (колебания сохраняются в том случае, если они устойчивы).

Отсюда заключаем, что в случае, когда разложение (3) содержит нелинейный член $c_3\cdot\mathrm{v}^3$, то могут возникнуть субгармонические колебания порядка $1/3$.

Случай 2. Нелинейность определяется выражением

$$F\left(v\right)=c_1\mathrm{v}+c_2\mathrm{v}^2+c_3\mathrm{v}^3.$$

В этом случае нелинейность несимметрична, и в (4) следует учитывать постоянный член z. Тогда могут возникнуть субгармонические колебания порядка $1/2$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\mathrm{v}}{d\tau^2}+k_1\frac{d\mathrm{v}}{d\tau}+c_1\mathrm{v}+c_2\mathrm{v}^2+c_3\mathrm{v}^3=B\cdot\cos 2\tau, \tag{7}$$

в котором восстанавливающая сила несимметрична из-за присутствия квадратичного члена. Уравнение (7) легко преобразовать к виду

$$\frac{d^2\mathrm{v}'}{d\tau^2}+k_1\frac{d\mathrm{v}'}{d\tau}+c_1'\mathrm{v}'+c_3'\left(\mathrm{v}'\right)^3=B\cdot\cos 2\tau+B_0. \tag{8}$$

Здесь восстанавливающая сила симметрична, но внешняя сила несимметрична, поскольку она содержит составляющую B_0. С целью анализа и исследования субгармонических колебаний порядка $1/2$ опустим штрихи в (8) и запишем уравнение в виде

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2}+k_1\frac{dv}{d\tau}+c_1 v+c_3 v^3=B\cdot\cos 2\tau+B_0. \tag{9}$$

Периодическое решение будем искать в виде (4), где $v=2$.

Согласно (5), для амплитуды A используем аппроксимацию

$$A=\frac{1}{1-v^2}B=\frac{1}{1-2^2}B=-\frac{1}{3}B. \tag{10}$$

Подстановка (4) в (9) и приравнивание нулю отдельных коэффициентов при $\sin\tau$, $\cos\tau$ дает

$$\begin{gathered}Dx+ky=-3c_3Axz,\quad k_1x-Dy=-3c_3Ayz,\\ c_1 z+c_2\left[\left(\frac{3}{2}r^2+z^2+\frac{3}{2}A^2\right)z-\frac{3}{4}A\left(x^2-y^2\right)\right]=B_0,\end{gathered} \tag{11}$$

где $\quad D=\left(1-c_1\right)-c_3\left(\frac{3}{4}r^2+3z^2+\frac{3}{2}A^2\right),\quad r^2=x^2+y^2.$ (12)

Исключив x и y из (11) и (12), получим

$$D^2+k_1^2=\left(3c_3\cdot Az\right)^2,\quad c_1z+c_3\left[\left(\frac{3}{2}r^2+z^2+\frac{3}{2}A^2\right)z+\frac{D\cdot r^2}{4c_3z}\right]=B_0, \tag{13}$$

где составляющие x и y амплитуды r имеют вид

$$\begin{gathered}x=r\cos\theta,\quad r\cos\left(\theta+180^0\right),\\ y=r\sin\theta,\quad r\sin\left(\theta+180^0\right),\end{gathered} \tag{14}$$

где $\sin 2\theta=-\frac{k_1}{3c_3Az};\quad \cos 2\theta=-\frac{D}{3c_3Az}.$

Согласно [2], состояние равновесия будет устойчивым, если

$$\left[\theta_0-\left(\frac{n}{2}\right)^2\right]^2+2\left[\theta_0+\left(\frac{n}{2}\right)^2\right]k_1^2+k_1^4>\theta_n,\quad n=1,2,3,... \tag{15}$$

Из (13) и (14) видно, что если знак B_0 изменится, то знак z, $\cos 2\theta$ и $\sin 2\theta$ также изменятся, и в результате θ изменится на 90^0. Тогда значения x и y будут иметь вид

$$\begin{gathered}x=r\cos\left(\theta+90^0\right),\quad r\cos\left(\theta+270^0\right),\\ y=r\sin\left(\theta+90^0\right),\quad r\sin\left(\theta+270^0\right).\end{gathered}$$

В частности, когда $B_0 = 0,$ существует четыре типа колебаний порядка $1/2,$ отличающихся друг от друга по фазе на 90^0[6].

Случай 3. Нелинейность определяется полиномом вида

$$F(v) = c_1 \mathrm{v} + c_3 \mathrm{v}^5 .$$

Несмотря на то, что в разложении $F(v)$ нелинейный член $c_3 \mathrm{v}^5$ отсутствует, субгармоники порядка 1/3 в данном случае возможны. В этом случае поддер- живается субгармоника порядка 1/5.

На основании вышесказанного можно заключить, что наличие в (3) члена $c_v \mathrm{v}^v$ желательно для возникновения субгармонических колебаний порядка $1/v$. Однако это условие не является необходимым. Можно также сделать вывод , что субгармоники порядка $1/v$ не возникают в тех случаях, когда наибольшая степень нелинейных членов в (3) меньше v.

Тогда будем исследовать субгармонические колебания порядка $1/3$ в системе, описываемой дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2\mathrm{v}}{d\tau^2} + k_1 \frac{d\mathrm{v}}{d\tau} + c_1 \mathrm{v} + c_5 \mathrm{v}^5 = B\cos 3\tau. \qquad (16)$$

При $k_1 = 0$ с учетом приближения (5) периодическое решение уравнения (16) можно представить в виде

$$\mathrm{v} = x\sin\tau + y\cos\tau + A\cos 3\tau, \qquad (17)$$

где $A = \dfrac{B}{1-v} = -\dfrac{B}{8}.$

Подстановка (17) в (16) при $k_1 = 0$ и приравнивание нулю коэффициентов при членах, содержащих $\sin\tau$ и $\cos\tau$, дает

$$\begin{cases} \left[1 - \frac{3}{4}\left(x^2 + y^2\right) - \frac{3}{2}A^2\right]x = -\frac{3}{4}A \cdot 2xy, \\ \left[1 - \frac{3}{4}\left(x^2 + y^2\right) - \frac{3}{2}A^2\right]y = -\frac{3}{4}A\left(x^2 - y^2\right). \end{cases} \qquad (18)$$

Умножив первое уравнение на y, а второе на x и выполнив вычисления, получим

$$x = 0 \text{ и } x = \pm\sqrt{3} \cdot y.$$

Рассмотрим состояния, для которых $x = 0,$ поскольку другие состояния имеют ту же амплитуду и отличаются только по фазе на $2\pi/3$ и $4\pi/3$ радиана, т.е. на один или два периода приложенной силы. Этот результат является естественным следствием возбуждения субгармонических колебаний порядка 1/3. Предполагая для $x=0$, что во втором уравнении (18) $y \neq 0$, получим

$$y^2 + Ay + 2A^2 - \frac{4}{3} = 0. \qquad (19)$$

Это уравнение показывает связь между амплитудой A (которая предполагается здесь пропорциональной внешней силе B) и амплитудой y субгармонического колебания.

Теперь введем условие устойчивости состояний равновесия, описываемое уравнением (19). Поступая обычным образом, рассмотрим отклонение ξ от состояния равновесия, для которого справедливо уравнение [9,10]

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \left(c_1 + 3c_3 \mathrm{v}_0^2\right)\xi = 0.$$

Подставляя в это уравнение периодические решения, определяемые равенством

$$\mathrm{v}_0 = y\cos\tau + A\cdot\cos 3\tau,$$

получим уравнение типа Хилла в виде

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \left(\theta_0 + 2\sum_{n=1}^{3}\theta_n \cos 2n\tau\right)\xi = 0. \qquad (20)$$

Интересен случай, когда нелинейность определяется кубической функцией, а диссипативность отсутствует $(k=0)$. Поскольку $c_1 = 0,\ c_3 = 1,$ будем иметь

$$\frac{d^2\mathrm{v}}{d\tau^2} + \mathrm{v}^3 = B\cos 3\tau.$$

Подставляя в это уравнение периодическое решение

$$\mathrm{v}_0 = y\cos\tau + A\cos 3\tau$$

и приравнивая нулю отдельные коэффициенты при членах, содержащих $\cos\tau$ и $\cos 3\tau$, получим

$$\begin{cases} y^2 + Ay + 2A^2 - \dfrac{4}{3} = 0, \\ \dfrac{1}{4}y^3 + \dfrac{3}{2}Ay^2 + \dfrac{3}{4}A^3 - 9A = B. \end{cases} \qquad (21)$$

Система уравнений (21) выражает зависимость амплитуды y от A для предельных значений B.

Поскольку нами рассматривалась недиссипативная система, характеристический показатель решения уравнения (20) на границе области устойчивости обращается в нуль.

Выводы. Из полученных результатов следует, что аппроксимация $A = \dfrac{B}{1-\nu^2}$ обеспечивает достаточную степень точности. Поскольку A не совсем точно пропорционально B, то предельные значения достигаются ими неодновременно. Амплитуды y и A для предельных значений B находятся из уравнения (21).

Литература

1. Качественная теория динамических систем второго порядка / **Л.А. Андронов, Е.А. Леонтович и др.** - М.: Наука, 1966. - 568 с.
2. **Каплан А.Е., Кравцов Ю.А., Рылов В.А.** Параметрические генераторы и делители частоты. - М.: Советское радио, 1966. - 335 с.
3. **Четаев Н.Г.** Устойчивость движения. - М.: Наука, 1965. - 176 с.
4. **Hayashi C.** Forced oscillations in nonlinear systems. - Osaka, Japan, 1953. - 427 p.
5. **Мандельштам Л.И., Папалекси Н.Д.** О резонансных явлениях при делении частоты: Полное собр. трудов. Изд. 2. - АН СССР, 1947. - С.7-12.
6. **Папалекси Н.Д.** Сборник трудов. - М., 1948. - 426 с.
7. **Митропольский Ю.А.** Нестационарные процессы в нелинейных автоколебательных системах. – Киев: АН УССР, 1955. - 286 с.
8. **Малкин И.Г.** Теория устойчивости движения. - М.: Наука, 1966. - 530 с.
9. **Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н.** Введение в нелинейную механику. - Киев, 1937. -365 с.
10. **Лефшец С.** Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. - М.: Мир, 1964. -156 с.

Поступила в редакцию 05.05.2018.
Принята к опубликованию 04.06.2018.

ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՎԵՐԱԿԱՆԳՆՈՂ ՈՒԺՈՎ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐՈՒՄ ՀԱՐԿԱԴՐԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՐՑԻ ՄԱՍԻՆ

Ա.Վ. Գևորգյան, Հ.Գ. Շեկյան

Գծային համակարգերում, երբ ազդում է պարբերական (ցիկլիկ) ուժ, գումարային շարժումը ներկայացնում է երկու տիպի տատանումներ՝ ազատ և հարկադրական: Այն դեպքում, երբ համակարգը գծային է և ասիմպտոտիկորեն կայուն, ազատ տատանումները արագ մարում են, և մնում են միայն հարկադրական տատանումները, որոնք ունեն այնպիսի հաճախականություն, ինչպիսին և արտաքին ազդող ուժերը: Այստեղից հետևում է, որ գծային համակարգերը դիտարկելիս դրանց տատանումները միարժեք որոշվում են համակարգի պարամետրերով և արտաքին ուժի բնութագրերով, որոնք կախված չեն սկզբնական պայմաններից: Ըստ էության, մեխանիկայի բոլոր խնդիրները իրական համակարգերում ոչ գծային են: Ընդհանուր դեպքերում կիրառվող գծայնացման եղանակները մոտավոր եղանակներ են, որոնք, սակայն, շատ դեպքերում տալիս են բավականին բավարար, իսկ հաճախ էլ ճշգրիտ արդյունքներ: Սակայն կան մի շարք ոչ գծային համակարգեր, որոնց գծայնացումն անընդունելի է: Այդպիսի համակարգերում հաճախ հանդիպում են այնպիսի երևույթներ, որոնք սկզբունքորեն բացակայում են գծային համակարգերում: Աշխատանքը նպատակաուղղված է այդպիսի ոչ գծային համակարգերի ուսումնասիրությանը, որտեղ տատանումների ամենափոքր պարբերությունը հավասար է արտաքին ուժի փոփոխման պատիկին՝ ամբողջ թիվ անգամ: Վերլուծված է նաև ոչ գծայնության բնութագրերի և ենթահարմոնիկ տատանումների կարգերի միջև կապը: Ցույց է տրված, որ, գծային համակարգերում, արտաքին ուժերի հաճախականությամբ տատանումներից բացի, միաժամանակ կարող են առաջանալ բազմաթիվ այլ պարբերական տատանումներ՝ կախված ոչ գծայնության աստիճանից: Դիտարկված են բազմաստիճան բազմանդամ վերականգնողական ուժով տատանողական համակարգի հարկադրական տատանումները, և կախված ոչ գծայնության աստիճանից՝ ստացված է ենթահարմոնիկ տատանումների կարգը՝ որպես ֆունկցիա հարկադրական տատանումների ամպլիտուդից և հաճախականությունից: Ցույց է տրված, որ ենթահարմոնիկ տատանման ամպլիտուդային արժեքը, արտաքին ուժի նկատմամբ Մանդելշտամի և Պապալեքսիի ընդունած ապրոքսիմացիայի համեմատ, ապահովում է հաշվարկման բավարար ճշտություն:

Առանցքային բառեր. հարկադրական տատանումներ, ենթահարմոնիկ տատանումներ, ենթահարմոնիկայի կարգ, ոչ գծային վերականգնող ուժ, ազատ տատանումներ, գծային համակարգ:

THE ISSUE OF FORCED VIBRATIONS IN THE SYSTEMS WITH A NONLINEARLY- RESTORING FORCE

A.V. Gevorgyan, H.G. Shekyan

In linear systems, if a periodical force acts, the resulting motion represents a vibration of two types: free and forced.

In the case when the system is linear and asymptotically stable, the free vibrations are rapidly damped and only remain the forced vibrations, having the same frequencies as the outer forces. From here, it follows that when considering the linear systems, the vibrations are uniquely determined by the parameters of the system and characteristics of the outer forces, which do not depend on the initial conditions. In fact, all the problems of mechanics are linear in real systems. The linearization methods, applied in general cases are approximate methods which in many cases give rather satisfactory, and often-quite exact results. But there are a number of non–linear systems whose linearization is unacceptable. In such systems we meet such phenomena which are principally absent in linear systems.

The work is devoted to the research of such non–linear systems where the smallest period of vibrations is equal to the change multiple of the outer force, a whole number times. The connection between the non–linear characters and subharmonic vibration orders is analyzed here as well. It is shown that in nonlinear systems, along with the vibrations having the same frequency as the outer forces, a number of periodical vibrations may turn up. In order to estimate that, the forced vibrations of the system with the polynomial of linearly – restoring force of general form (up to the fifth degree of nonlinearity) is considered. Depending on the non–linearity degree, the order of subharmonic vibrations as a function from the amplitude and frequency of the forced vibrations is obtained. It is shown that the approximation of the subharmonic vibration amplitude with respect to the amplitude of forced vibrations, accepted by Mandelshtam and Papalexi, provide enough exactness. Subharmonics of order ½, 1/3 and 1/5, taking into account the stability of the periodical vibrations is considered in detail, as well.

Keywords: forced vibrations, order of subharmonics, nonlinearly restoring forces, free vibrations, linear system.