

**ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ
СЖАТОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ**

М.В. Белубекян¹, М.Г. Саргсян², Ц.М. Смбалян³

¹Институт механики НАН РА

²Национальный политехнический университет Армении

*³Старшая школа Национального университета архитектуры и
строительства Армении*

Современная микромеханика эффективно объединяет механические, электронные, компьютерные системы в единые устройства, что позволяет уменьшить размеры создаваемых устройств. Это способствует развитию таких важных направлений техники, как мехатроника, биомеханика, в которых большое внимание уделяется разработке микророботов, механизмов микроперемещений, микроманипуляторов. В указанных механизмах в качестве исполнительных элементов широко применяются пьезоматериалы, которые выполнены в виде стержней, дисков, прямоугольных пластин, работающих на сжатие-растяжение, изгиб, сдвиг. Работа пьезоэлементов, пьезопроводов, пьезоактюаторов основана на использовании прямого или обратного пьезоэффекта: прямой - это появление электрического заряда при деформации пьезоэлемента; обратный - линейное изменение размеров пьезоэлемента при изменении действующего электрического поля. Преимущества пьезоэлементов перед известными механическими системами очевидны. Это - малые габариты, способность обеспечивать микроперемещения, высокая точность позиционирования, быстродействие, работа в статическом и динамическом режимах, простота конструкции, стабильность работы при повышенных температурах и, наконец, высокая прочность. Применение пьезоэлектрических элементов в различных устройствах требует исследования их напряженно-деформированного состояния в зависимости от действия электрического поля. В представленной работе предлагается проект прибора для диагностики плоскостопия большого. Пьезоковрик представляет собой резиновый диэлектрический коврик, в который с большой поверхностной частотой вставлены пьезоэлектрические стержни круглого поперечного сечения, работающие в режиме датчиков давления. Благодаря точному моделированию формы стопы, знанию закона распределения нагрузки по поверхности стопы становится возможным индивидуальный подбор формы супинатора. Точность соответствия супинатора в дальнейшем позволяет уменьшить дальнейшее развитие плоскостопия, улучшить кровоснабжение стопы и голени, смягчить неизбежные колебания при ходьбе.

Рассматривается задача зависимости величины напряженности электрического поля от внешней нагрузки, действующей вдоль оси пьезоэлектрического стержня. Исследованы три случая действия внешней нагрузки по трем направлениям

координатных осей стержня. Указанные задачи решены на основе основных уравнений пьезосреды для случая поляризации материала вдоль оси стержня. Проведен сравнительный анализ результатов. Предложено практическое применение результатов исследований.

Ключевые слова: пьезостержень, продольные деформации, напряженность электрического поля, пьезоковрик, плоскостопие.

Введение. Исследование взаимосвязи напряжений, деформаций и электрического поля в пьезоматериалах представляет собой актуальную задачу. Это обусловлено тем, что пьезоматериалы в современных механизмах микроперемещений находят все большее применение в машиностроении, в частности, в биомеханике, мехатронике. Как правило, пьезоэлементы имеют форму стержней, дисков, прямоугольных пластин. В представленной работе рассматривается пьезоэлектрический стержень, работающий под действием внешнего давления на растяжение-сжатие, т.е. имеет место прямой пьезоэлектрический эффект.

Постановка задачи и методы исследования. Рассматривается пьезоэлектрический стержень длиной H , торцевые поверхности которого электродированы и находятся под действием внешнего давления величиной q , направленного вдоль оси пьезостержня. При работе стержня на растяжение-сжатие, в силу прямого пьезоэффекта, на электродах возникают электрические заряды, создавая электрическое поле напряженностью E_3 . Величина напряженности электрического поля зависит от направления поляризации пьезостержня и величины внешнего давления.

Основные уравнения пьезосреды для случая поляризации пьезостержня имеют следующий вид [1,2]:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= c_{11}\varepsilon_{11} + c_{12}\varepsilon_{22} + c_{13}\varepsilon_{33} - e_{31}E_3, \\ \sigma_{22} &= c_{12}\varepsilon_{11} + c_{11}\varepsilon_{22} + c_{13}\varepsilon_{33} - e_{31}E_3, \\ \sigma_{33} &= c_{13}\varepsilon_{11} + c_{13}\varepsilon_{22} + c_{33}\varepsilon_{33} - e_{33}E_3, \\ \sigma_{12} &= \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})\varepsilon_{12} = c_{66}\varepsilon_{12},\end{aligned}\tag{1}$$

$$\sigma_{23} = c_{44}\varepsilon_{23} - e_{15}E_2,$$

$$\sigma_{31} = c_{44}\varepsilon_{31} - e_{15}E_1,$$

$$D_1 = \varepsilon_1 E_1 + e_{15}\varepsilon_{13},$$

$$D_2 = \varepsilon_1 E_2 + e_{15}\varepsilon_{23},$$

$$D_3 = \varepsilon_3 E_3 + e_{31}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + e_{33} \varepsilon_{33},$$

где c_{ij} – упругие постоянные пьезоматериала; σ_{ij} – механические напряжения; e_{ij} – пьезоэлектрические постоянные; ε_i – диэлектрическая проницаемость среды; ε_{ij} – деформации; E_i – компоненты вектора напряженности электрического поля; D_i – компонент вектора электрической индукции.

Уравнения статического равновесия в напряжениях имеют вид [3,4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} &= 0, \\ \operatorname{rot} \bar{E} &= 0, \quad \operatorname{div} \bar{D} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

На основе представленных уравнений в работе рассматриваются три варианта взаимодействия внешней нагрузки q на пьезоэлектрический столбик.

Вариант N1

Рассматривается пьезостержень высотой H , поляризованный вдоль оси Z (рис. 1).

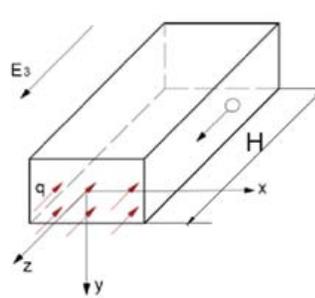


Рис. 1. Поляризация пьезостержня по длине

Торцевые поверхности пьезостержня электродированы. На верхнюю торцевую поверхность действует нагрузка $q \left[\frac{H}{M^2} \right]$.

$E_3 = E_z$ – величина напряженности электрического поля $\left[\frac{B}{M} \right]$, возникающая от пьезоэффекта.

В указанной постановке задачи уравнения (1) принимают вид

$$\begin{aligned}\sigma_{33} &= c_{33}\varepsilon_{33} - e_{33}E_3, \\ D_3 &= \varepsilon_3 E_3 + e_{33}\varepsilon_{33}.\end{aligned}\quad (3)$$

Уравнения равновесия (2) принимают вид

$$\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

$$\text{где } \sigma_{33} = q. \quad (5)$$

Учитывая соотношения для индукции электрического поля

$$\operatorname{div} \bar{D} = 0, \text{ т.е. } \frac{\partial D_1}{\partial x} + \frac{\partial D_2}{\partial y} + \frac{\partial D_3}{\partial z} = 0, \quad (6)$$

следует

$$\frac{\partial D_3}{\partial z} = 0, \quad (7)$$

$$\text{т.е. } D_3 = A.$$

Уравнения (3) с учетом (5) и (7) примут следующий вид:

$$\begin{aligned}e_{33}E_3 &= c_{33}\varepsilon_{33} - q, \\ A &= \varepsilon_3 E_3 + e_{33}\varepsilon_{33}.\end{aligned}\quad (8)$$

Из второго уравнения (2) следует

$$\varepsilon_{33} = \frac{A}{e_{33}} + \frac{\varepsilon_3}{e_{33}} E_3.$$

Подставляя последнее выражение в первое уравнение (8), следует

$$\varepsilon_{33}E_3 = c_{33}\left(\frac{A}{e_{33}} + \frac{\varepsilon_3}{e_{33}} E_3\right) - q. \quad (9)$$

Из (9) видно, что при отсутствии внешнего давления ($q=0$) напряженность электрического поля $E_3 = 0$, а следовательно, постоянная $A=0$.

В результате выражение (9) примет следующий вид:

$$\left(\frac{e_{33}^2}{c_{33}\varepsilon_3} + 1\right) \frac{c_{33}}{e_{33}} \varepsilon_3 E_3 = -q, \quad (10)$$

где величина $\frac{e_{33}^2}{c_{33}\varepsilon_3} = X_1$ является коэффициентом электромеханической связи

пьезоматериала и, как видно, зависит от его физико-механических констант. В итоге выражение связи между внешней нагрузкой и напряженностью электрического поля имеет вид

$$E_3 = -\frac{e_{33}}{c_{33}\epsilon_3} \frac{1}{1+X_1} q. \quad (11)$$

Вариант N2

На рис. 2 показан случай действия внешней нагрузки в направлении оси x , т.е. $\sigma_{11} = q$.

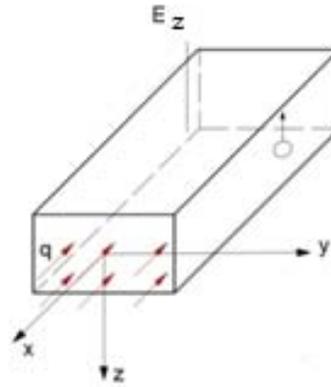


Рис. 2. Поляризация пьезостержня по толщине

Уравнения (1) имеют вид

$$\sigma_{11} = c_{11}\epsilon_{11} - e_{31}E_3,$$

$$D_3 = \epsilon_3 E_3 + e_{31}\epsilon_{11},$$

$$\frac{\partial D_3}{\partial z} = 0.$$

Следуя в дальнейшем методике, показанной в варианте N1, окончательное выражение примет вид

$$E_3 = -\frac{e_{31}}{c_{11}\epsilon_3} \frac{1}{1+X_2} q, \quad (12)$$

$$\text{где } X_2 = \frac{e_{31}^2}{c_{11}\epsilon_3}. \quad (13)$$

Вариант N3

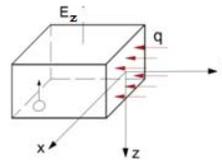


Рис. 3. Поляризация пьезостержня по ширине

На рис. 3 показан случай действия внешней нагрузки в направлении оси y , т.е. $\sigma_{22} = q$.

Следовательно, уравнения (1) примут вид

$$\sigma_{22} = c_{11}\varepsilon_{22} - e_{31}E_3,$$

$$D_3 = \varepsilon_3 E_3 + e_{31}\varepsilon_{22},$$

$$\frac{\partial D_3}{\partial z} = 0.$$

Следуя методике, приведенной ранее, окончательное выражение примет вид

$$E_z = -\frac{e_{31}}{c_{11}\varepsilon_3} \frac{1}{1 + X_3} q, \quad \text{где } X_3 = \frac{e_{31}^2}{c_{11}\varepsilon_3}.$$

Представленные результаты могут иметь практическое значение при проектировании механизмов микроперемещения, в которых в качестве привода линейных перемещений может использоваться пьезостержень [6,7].

В работе предлагается проект прибора-“пьезоковрика”, позволяющего определить закон распределения нагрузки по поверхности стопы человека и проводить диагностику плоскостопия.

На рис. 4 представлена схема “пьезоковрика”, представляющего собой пластиковый или резиновый коврик, в который вставлены с большой поверхностной плотностью пьезодатчики, выполненные в виде столбиков диаметром $\varnothing 1,5 \dots 2$ мм и высотой $15 \dots 20$ мм.



Рис. 4. Схема пьезоковрика для диагностики плоскостопия

Пьезоковрик может быть использован для изготовления индивидуальной ортопедической обуви. Результаты исследований могут быть анализированы с помощью компьютера, поскольку на “выходе” получается электрический сигнал в виде напряженности электрического поля.

Заключение. На базе основных уравнений пьезосреды, с учетом постановки задачи исследования напряженно-деформированного состояния пьезостержня,

получена математическая связь между действующим давлением и величиной вектора напряженности электрического поля. Это позволяет применять пьезостержень в качестве датчика усилий давления [4], а также в качестве пьезопривода в механизмах линейных перемещений. Предложена схема пьезоковрика для диагностики плоскостопия, а также моделирования формы стопы.

Литература

1. **Мэзон П.** Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультразвуке. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962. - 592 с.
2. **Глозман И.А.** Пьезокерамика. – М.: Энергия 1972. – 288 с.
3. **Belubekyan M., Sarkisyan M., Sanoyan Ju.** Tense distorted condition of Bimorphous piezoelectric Console plate // 50 internationales Wissenschaftlicheskoloqium Technische Universitat.– Ilmenau, 19-23, September, 2005.- P. 42-45.
4. **Belubekyan M., Sarkisyan M., Sanoyan Ju.** Stress deformed state of piezoelastic plate under crosscut electric field // Известия НАН РА и ГИУА. Серия Техн. наук. - 2010.- Т.58, №1.- С.19-23.
5. **Vatulyan O.A., Rinkova A.A.** Bending vibratios of piezoelectric bimorph plate with inner electrode // Applied mechanics and technical physics. - 2001. -N1. –P. 184-189.
6. Displacment control in piezoplate by electric field. Report on the+ period review 2009 for ANSEF grant proposal N 1589. – 6 p.
7. Научный отчет по теме: “Исследования напряженно-деформированного состояния пьезоактюатора, используемого в механизмах микроперемещений. GRANTEN-1589.- ANSEF. Руководитель **М. Саргсян**, научн. консультант **М. Белубекян**. - 2009.

*Поступила в редакцию 25.10.2017.
Принята к опубликованию 18.12.2017.*

ՍԵՂՄՎԱԾ ՊԻՅԵԶՈԷԼԵԿՏՐՈՒԿԱՆ ՁՈՂԻ ԼԱՐՎԱԾԱ-ԴԵՖՈՐՄԱՑԻՈՆ ՎԻՃԱԿԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

Մ.Վ. Բելուբեկյան, Մ.Գ. Սարգսյան, Յ.Մ. Սմբատյան

Ժամանակակից միկրոմեխանիկան արդյունավետ ձևով միատեղում է մեխանիկական, էլեկտրոնային, քոմպյութերային համակարգերը, միասնական սարքավորումները, ինչը հնարավոր է դարձնում փոքրացնել ստեղծվող սարքավորումների չափսերը: Դա նպաստում է տեխնիկայի այնպիսի կարևոր ուղղությունների զարգացմանը, ինչպիսիք են մեխանիկական, մեխատրոնիկական, բիոմեխանիկական, որտեղ մեծ ուշադրություն է հատկացվում միկրոռոբոտների, միկրոտեղափոխություններով մեխանիզմների,

միկրոմանիպուլատորների մշակմանը: Նշված մեխանիզմներում, որպես կրող օղակներ, լայնորեն օգտագործվում են սեղման, ձգման, սահքի և ծռման պայմաններում աշխատող պլեզոնյութերից ձողերը, սկավառակները, ուղղանկյուն սալիկները:

Պլեզոտարրերի, պլեզոշարժաբերների, պլեզոակտուատորների աշխատանքը հիմնված է ուղիղ և հակադարձ պլեզոէֆեկտի օգտագործման վրա: Ուղիղ պլեզոէֆեկտը պլեզոտարրի դեֆորմացման հետևանքով էլեկտրական բևեռացման առաջացումն է: Հակառակ պլեզոէֆեկտը ենթադրում է, որ էլեկտրական դաշտի հետևանքով առաջանում է տարրի ձևափոխություն: Պլեզոտարրի առավելությունները, հայտնի մեխանիկական համակարգերի համեմատ ակնհայտ է: Դրանք են՝ փոքր չափսերը, միկրոտեղափոխություններ ապահովելու կարողությունը, դիրքավորման բարձր ճշգրտությունը, արագագործությունը, ստատիկ և դինամիկ ընթացքները, կառուցվածքի պարզությունը, աշխատանքի կայունությունը բարձր ջերմաստիճաններում և, վերջապես, մեծ ամրությունը: Պլեզոտարրի օգտագործումը տարբեր սարքավորումներում պահանջում է ուսումնասիրել դրանց լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակը՝ կախված էլեկտրական դաշտից:

Պլեզոէլեկտրական սեղմված ձողի լարվածադեֆորմացիոն վիճակի հետազոտման համար առաջարկվում է սահքի նախագիծ՝ հիվանդի հարթաթաթոթյան ախտորոշման համար: Սարքը ներկայացնում է ռետինի դիէլեկտրիկ կարպետ, որում տեղադրված են մեծ հաճախականությամբ պլեզոէլեկտրական ձողիկներ, որոնք աշխատում են որպես ճնշման տվիչներ:

Ուտնաթաթի ճիշտ մոդելավորմամբ, իմանալով բեռի բաշխումն ըստ ուտնաթաթի կառուցվածքի, հնարավոր է կատարել սուպինատորի անհատականացված ընտրություն: Սուպինատորի համապատասխանության ճշտությունը հնարավորություն է տալիս հետազայում կանխելու հարթաթաթոթյան զարգացումը, արյան շրջանառության բարելավումը ուտնաթաթում և ձկնամկանում, ինչպես նաև մեղմում է անխուսափելի տատանումները քայլելիս:

Վերլուծվում է արտաքին բեռնվածության դեպքում պլեզոէլեկտրական ձողի առանցքի երկայնքով ազդող էլեկտրական դաշտի լարվածության արժեքների կախվածությունը: Դիտարկվում է արտաքին բեռնվածության ազդման երեք դեպք ձողի կողողինատային երեք առանցքների ուղղությամբ: Նշված խնդիրները լուծվում են պլեզոմիջավայրի հիմնական հավասարումների հիման վրա: Իրականացվել է արդյունքների համեմատական վերլուծություն, առաջարկվել արդյունքների գործնական կիրառություն:

Առանցքային բառեր. պլեզոձող, երկայնական դեֆորմացումներ, էլեկտրական դաշտի լարվածություն, պլեզոկարպետ, հարթաթաթոթյուն:

INVESTIGATING THE STRESS-STRAIN STATE OF A COMPRESSED PIEZOELECTRIC ROD

M.V. Belubekyan, M.G. Sargsyan., Ts.M. Smbatyan

Modern micromechanics effectively integrates mechanical, electronic, computer systems into single devices which makes it possible to reduce the sizes of the devices created. This contributes to the development of such important directions of technology as mechatronics, biomechanics, in which much attention is paid to the development of microrobots, mechanisms of microtranslations, micromanipulators. In the mentioned mechanisms, piezomaterials are widely used as actuating elements, made in the form of rods, disks, rectangular plates, working on compression-stretching, bending, and shearing. The operation of piezoelements, piezo drives, piezo actuators is based on the use of direct or reverse piezoelectric effects: the direct is the appearance of an electric charge in the deformation of a piezoelectric element, the reverse-linear change in the size of a piezoelement when the effective electric field changes. The advantages of piezoelements over known mechanical systems are obvious. These are: small size, ability to provide micro-displacements, high positioning accuracy, speed, operation in statistical and dynamic modes, simplicity of design, stable operation at elevated temperatures and finally high strength. The use of piezoelectric elements in various devices requires the study of their stress-strain state depending on the action of the electric field. In the presented work, the project of the device for diagnostics of a flat-footed patient is offered. A piezocoupe is a rubber dielectric mat in which piezoelectric rods of circular cross section, working in the mode of pressure sensors, are inserted with a large surface frequency. Due to precise modeling of the foot shape, the knowledge of the law of load distribution over the foot surface makes it possible to individually select the shape of the instep. The accuracy of the instep suppressor further reduces the further development of the flat feet, improves the blood supply to the foot and the lower leg, and softens the inevitable fluctuations at walking.

The problem of the dependence of the electric field strength on the external load, acting along the axis of the piezoelectric rod is discussed. Three cases of the action of an external load in three directions of the coordinate axes of the rod are investigated. These problems are solved on the basis of the basic piezo-environment equations for the case of polarization of the material along the axis of the rod. The results are compared and analyzed. The practical application of research results is offered.

Keywords: piezo-column, longitudinal deformations, electric field strength, piezo-carpet, flat-feet.