УДК 628.81/25

К ВОПРОСУ ВОЗНИКНОВЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ИНЕРЦИОННОСТИ ПРИ ВРАЩЕНИИ ГИБКОГО РОТОРА

А.В. Геворкян

ЗАО НПИЦ ”ЭЛЕКТРОМАШ ГАМ”

Проведено исследование нелинейной инерционности вращающегося гибкого ротора, закрепленного одним концом с сосредоточенной на свободном консольном конце массой. Показано, что нелинейная инерционность возникает за счет продольного перемещения этой массы. Для этого случая получена функция нелинейной инерционности, а ее обобщение позволило получить уравнение колебания для ротора с распределенной по длине массой. Основываясь на том, что при изгибных колебаниях гибкого ротора с распределенной по длине массой нелинейная инерционность возникает в результате продольного перемещения произвольного его сечения, получено уравнение колебания системы. С помощью метода Галеркина полученные нелинейные дифференциальные уравнения приведены к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, на основе которых получено приближенное решение в виде суммы двух периодических функций неизвестных переменных коэффициентов для стационарного режима колебаний с помощью приближенного метода Ван дер Поля. Такой подход позволил получить систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих искомые переменные коэффициенты. Далее, разложив функцию нелинейной инерционности в ряд Фурье, подставив их в исходное уравнение и приравняв коэффициенты при одинаковых периодических функциях, получена система из двух алгебраических уравнений, содержащих искомые коэффициенты в качестве медленно изменяющихся функционалов. Для упрощения расчетов предложено распределенную массу ротора заменить эквивалентной массой, сосредоточенной на консольном конце. Получены формулы для определения эквивалентной массы и амплитуды колебания гибкого ротора с распределенной массой с учетом инерционной нелинейности.

Ключевые слова: нелинейная инерционность, гибкий ротор, эксцентриситет, фундаментальная функция, эквивалентная масса, продольное перемещение.

Введение. Приоритетные задачи по совершенствованию современных методов исследования колебательных процессов с учетом нелинейной инерционности берут начало в знаменитых трудах А.М. Ляпунова и А. Пуанкаре

[1-4], и для вращающегося гибкого вала уравнение нелинейных колебаний имеет вид

$$y'' + 2ky' + \omega_0 y + \psi\left(y, y', y''\right) = S \cdot \sin \omega t,$$

где функция $\psi\left(y, y', y''\right)$ учитывает нелинейную инерционность. Нелинейная инерционность такого типа впервые встречается в работах [2,5], а необходимость ее учета была отмечена в работе И.И. Голденблата [3]. Сказанное имеет важное значение также при исследовании сейсмостойкости многоэтажных высотных зданий и сооружений.

Решение задачи. Для того чтобы перейти к понятию нелинейной инерционности вращающегося гибкого ротора, рассмотрим следующую простую задачу.

Пусть на свободном конце гибкого ротора, вращающегося со скоростью "w", имеется сосредоточенная масса m_1 (на практике это могут быть полумуфта, шкив, диск и пр.) (рис. 1).

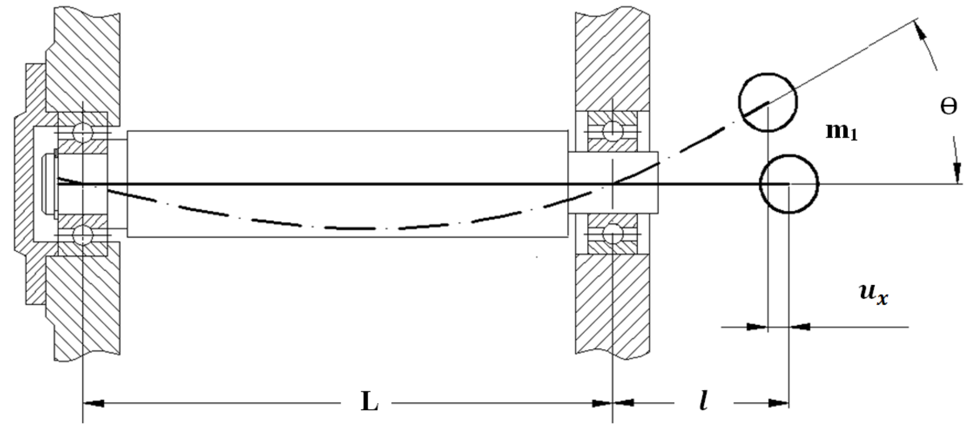

Рис. 1. Гибкий ротор с распределенной массой, закрепленный одним концом, и сосредоточенной массой m_1 на свободном конце

В этом случае при вращении ротора возникает дополнительная продольная сила

$$\Delta N_x = m_1 \cdot u_x'',$$

где u_x – продольное перемещение массы m_1, связанное с поперечным изгибным колебанием ротора. Продольное перемещение массы m_1 можно найти как разность между первоначальной длиной ротора и проекцией искривленной оси в направлении оси вращения:

$$u_x = l - \int \cos\theta \cdot du_x = l \cdot \int_0^l \sqrt{1 - \left(\frac{d\text{v}}{du_x}\right)^2}\, du_x \; . \qquad (1)$$

Разлагая радикал $\sqrt{1 - \left(\frac{d\text{v}}{du_x}\right)^2}$ в ряд

$$\sqrt{1 - \left(\frac{dv}{du_x}\right)^2} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{du_x}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{dv}{du_x}\right)^2 + \ldots$$

и интегрируя его, получим

$$u_x = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{dv}{du_x}\right)^2 du_x + \frac{1}{8}\int_0^l \left(\frac{dv}{du_x}\right)^2 du_x + \ldots \; . \qquad (2)$$

Здесь v – фундаментальная функция [3]:

$$\text{v} = \text{v}(u_x, t) = y \sin\frac{\pi u_x}{l}; \qquad (3)$$

y – поперечный прогиб (амплитуда изгибных колебаний рассматриваемого сечения ротора).

Подстановка (3) в (2) дает

$$u_x = \frac{\pi^2}{4l} y^2 + \frac{3}{64}\frac{\pi^4}{l^3} y^4 + \ldots \; . \qquad (4)$$

Тогда будем иметь

$$u_x^{''} = \frac{\pi^2}{2l}\left[yy^{''} + (y^{'})^2\right] + \frac{3\pi^2}{16l^3} y^2 \left[yy^{''} + 3(y^{'})^2\right] + \ldots .$$

С учетом (4) уравнение колебания вращающегося ротора с сосредоточенной в середине пролета массой m (рис.2) имеет вид

$$y^{''} + 2ky^{'} + \omega_0^2\left(1 - \frac{m_1 g l^2}{\pi^2 EJ}\right) y + \frac{m_1 \pi^4}{2l^3 m} y^2 \left[yy^{''} + (y^{'})^2\right] = \omega^2 e \sin\omega t, \qquad (5)$$

где e – эксцентриситет массы m; $\omega_0^2 = c/m$; c – жесткость ротора. (Здесь и везде штрихами обозначено дифференцирование по времени).

Обозначим

$$\omega_0^2\left(1 - \frac{m_1 g l^2}{\pi^2 EJ}\right) = \Omega_0^2, \; \frac{m_1 \pi^4}{2l^3 m} = \chi. \qquad (6)$$

С учетом этих обозначений уравнение (5) примет вид

$$y'' + 2ky' + \Omega_0^2 y + 2\chi \cdot y^2 \left[y \cdot y'' + (y')^2\right] = \omega^2 e \cdot \sin\omega t \; . \qquad (7)$$

В уравнении (7) выражение $2\chi \cdot y^2\left[y \cdot y'' + (y')^2\right] = \psi(y, y', y'')$ учитывает влияние нелинейных сил инерции на поперечное колебание ротора. В этой функции не учтены члены выше первого порядка малости. Нелинейные силы инерции указанного типа возникают не только при наличии на свободном подвижном конце ротора сосредоточенной массы. При вращении ротора с закрепленным одним концом каждое сечение получает некоторое продольное перемещение из-за прогиба вала при поперечных колебаниях. Хотя это перемещение составляет величину второго порядка малости по сравнению с поперечным прогибом, однако оно может иметь решающее значение при возникновении параметрических резонансов. В этом случае перемещение произвольного сечения вала согласно (2) имеет вид

$$u_x = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{dv}{du_x}\right)^2 du_x + \dots .$$

Тогда на ротор в продольном направлении будет действовать распределенная нагрузка от сил инерции

$$P(u_x, t) = -m' \frac{\partial u_x^2}{dt^2},$$

где m' – масса единицы длины ротора.

Полагая, что продольная сила мало влияет на форму колебания, и принимая фундаментальную функцию равной

$$V(u_x, t) = y(t)\sin\frac{\pi u_x}{l}, \tag{8}$$

получим

$$P(u_x, t) = \frac{\pi^2 m'}{2l^2}\left(u_x + \frac{l}{2\pi}\sin\frac{2\pi u_x}{l}\right)\left[yy'' + (y')^2\right].$$

Дополнительная продольная сила будет

$$\Delta N(u_x, t) = \int_l^{l-u_x} P(u_x, t)\, du_x$$

или

$$\Delta N(u_x, t) = \frac{\pi m'}{4}\left(1 - \frac{u_x}{l^2} - \frac{l}{\pi^2}\sin^2\frac{\pi u_x}{l}\right)\left[yy'' + (y')^2\right].$$

Тогда дифференциальное уравнение колебания ротора с распределенной массой m с учетом нелинейной инерционности будет иметь вид

$$EJ\frac{\partial^4 v}{\partial u_x^4}+\frac{\partial}{\partial u_x}\left(\Delta N\frac{\partial v}{\partial u_x}\right)+m^{'}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=m^{'}\omega^2 e\sin\omega t. \tag{9}$$

С помощью вариационного метода Галеркина [4-6] уравнение (9) может быть приведено к обыкновенному дифференциальному уравнению. Действительно, подставляя (8) в (9), после преобразования по указанному методу получим

$$y^{''}+\omega_0^2 y^{'}+2\chi_1 y\left[yy^{''}+(y^{'})^2\right]=\omega^2 e\sin\omega t, \tag{10}$$

где

$$\chi_1=\frac{\pi^3}{4l^2}\int_0^l \sin\frac{\pi x}{l}\frac{d}{dx}\left[\left(1-\frac{x^2}{l^2}-\frac{1}{\pi^2}\sin^2\frac{2\pi x}{l}\right)\cos\frac{\pi x}{l}\right]dx=\frac{\pi^4}{4l^2}\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{8\pi^2}\right). \tag{11}$$

Коэффициент χ_1, определяемый по формуле (11), учитывает влияние сил инерции самого ротора с распределенной массой на характер колебания. При сопоставлении выражений (6) и (11) видно, что влияние силы инерции ротора с распределенной массой можно заменить эквивалентной массой, сосредоточенной на свободном конце на расстоянии l от опоры

$$M_Э=\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{8\pi^2}\right)m^{'}l.$$

Для вращающегося гибкого ротора, закрепленного одним концом с сосредоточенной в середине пролета массой m (рис. 2), уравнение поперечных колебаний с учетом инерционной нелинейности и без учета сил сопротивления будет иметь вид

$$y^{''}+\Omega_0^2 y^{'}+2\chi^{'} y\left[yy^{''}+(y^{'})^2\right]=\omega^2 e\sin\omega t, \tag{12}$$

где $\chi^{'}=\dfrac{\pi^2}{4l^2}$, $\omega_0^2=\dfrac{c}{m}$, $\Omega_0^2=\omega_0^2\left(1-\dfrac{2mg}{Cl}\right)$, C – жесткость ротора.

С учетом сил сопротивления уравнение (12) принимает вид

$$\Omega_0^2 y+y^{''}+2ky^{'}+2\chi^{'} y\left[yy^{''}+(y^{'})^2\right]=\omega^2 e\sin\omega t, \tag{13}$$

где k – постоянный коэффициент.

Решение уравнения (13) будем искать в форме

$$y=a(t)\sin\omega t+b(t)\cos\omega t, \tag{14}$$

где $a(t)$ и $b(t)$ - медленно изменяющиеся амплитуды.

Перепишем урравнение (13) следующим образом:

$$y^{''}+\omega_0^2 y=\omega^2 e\sin\omega t+\left(\omega_0^2-\Omega_0^2\right)y-2ky^{'}-2\chi^{'} y\left[yy^{''}+(y^{'})^2\right].$$

Приближенное решение уравнения с учетом (14) дает

$$a(t) = \frac{1}{2\omega_0}\int_0^l G(\tau)d\tau,\ b(t) = \frac{1}{2\omega_0}\int_0^l F(\tau)d\tau. \qquad (15)$$

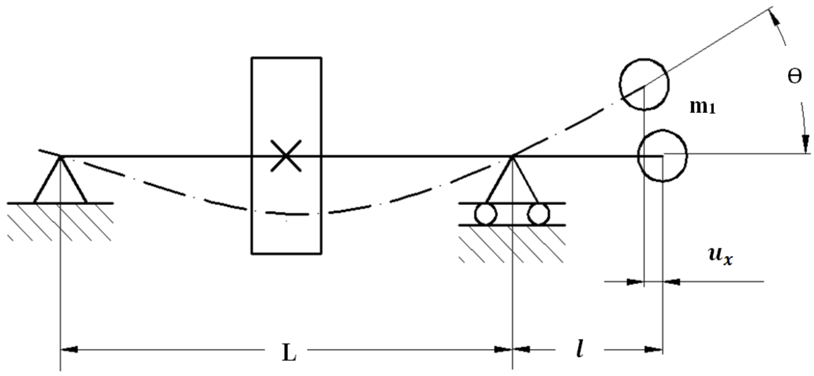

Рис. 2 Вращающийся гибкий ротор, закрепленный одним концом с сосредоточенными массами в середине пролета и на свободном консольном конце

Подставив (14) в правую часть уравнения и разложив ее в ряд, получим

$$F(a,b) = \omega^2 e + \left(\omega_0^2 - \Omega_0^2\right)a - 2k\omega^2 b - \phi(a,b),$$
$$G(a,b) = -\left(\omega_0^2 - \Omega_0^2\right)b - 2k\omega^2 a - \psi(a,b),$$

где $\phi(a,b) = \dfrac{\omega^2}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi/\omega} 2\chi' y\left[yy'' + (y')^2\right]\sin\omega t dt$.

После дифференцирования получим уравнение Ван-дер-Поля

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dt} = \dfrac{1}{2\omega}G(a,b), \\ \dfrac{db}{dt} = \dfrac{1}{2\omega}F(a,b), \end{cases} \qquad (16)$$

или в более развернутой форме

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dt} = \dfrac{1}{2\omega}\left[-\left(\omega_0^2 - \Omega_0^2\right)b - 2k\omega a - \psi(a,b)\right], \\ \dfrac{db}{dt} = \dfrac{1}{2\omega}\left[\omega^2 e + \left(\omega_0^2 - \Omega_0^2\right)a - 2k\omega b - \phi(a,b)\right]. \end{cases}$$

Таким образом, вместо уравнения (13) получим простую систему двух уравнений первого порядка, которые не содержат явного времени. В случае стационарного режима колебания $\dfrac{da}{dt} = \dfrac{db}{dt} = 0$ для установившихся амплитуд получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -\left(\omega_0^2-\Omega_0^2\right)b-2k\omega a-\psi(a,b)=0, \\ \omega^2 e+\left(\omega_0^2-\Omega_0^2\right)a-2k\omega b-\phi(a,b)=0. \end{cases} \quad (17)$$

Очевидно, система будет удовлетворена при $A=a$ и $b=0$. Корни уравнения (17) могут быть определены графически как координаты точек пересечения прямой [4]:

$$y=\frac{\omega^2 e+\left(\omega^2-\Omega_0^2\right)A}{\frac{3}{4}\gamma-k\omega},\ \gamma=\phi(a,b)$$

с кривой $\psi(y,y^{'},y^{''})=2\chi^{'}y\left[yy^{''}+(y^{'})^2\right]$.

Неустойчивое решение линейной задачи на границах первой, третьей и вообще нечетных областей имеет вид [4,6]

$$y(t)=\sum_{n=1,3,5,\ldots}\left(a_n\sin\frac{n\omega t}{2}+b_n\cos\frac{n\omega t}{2}\right), \quad (18)$$

где a_n и b_n – искомые постоянные.

Ряд (18) при определенном выборе коэффициентов может удовлетворять уравнению (13). Действительно, результат подстановки ряда (18) в (13) не будет содержать никаких других периодических членов, кроме $\sin\frac{n\omega t}{2}$ и $\cos\frac{n\omega t}{2}$. Это может быть выполнено только в том случае, если нелинейная функция $\psi\left(y,y',y''\right)$ не будет содержать членов четной степени.

Если нас интересуют колебания, происходящие при главном резонансе, когда $\omega=2\Omega_0$, то мы можем пренебречь разложениями (18), положив приближенно

$$y(t)=a\sin\frac{n\omega t}{2}+b\cos\frac{n\omega t}{2}\ . \quad (19)$$

Тогда разложив функцию $\psi\left(y,y',y''\right)$ в ряд Фурье, подставив (19) в (14) и приравняв коэффициенты при одинаковых $\sin\frac{\omega t}{2}$ и $\cos\frac{\omega t}{2}$, получим систему двух уравнений, содержащих коэффициенты a и b:

$$\left(\Omega_0^2-\omega^2/4\right)a-k\omega b+\phi(a,b)=0,\ \left(\Omega_0^2-\omega^2/4\right)b-k\omega a+\psi(a,b)=0. \quad (20)$$

С учетом (19) из уравнения (13) можно получить

$$\phi(a,b)=-\frac{A^2}{4}\chi^{'}\omega^2 a,\ \psi(a,b)=-\frac{A^2}{4}\chi^{'}\omega^2 b. \quad (21)$$

Здесь члены, содержащие гармоники, не вписаны, а через A обозначена амплитуда установившихся колебаний:

$$A = a^2 + b^2.$$

С учетом (21) система уравнений (20) примет вид

$$\begin{cases} \left(1-n^2\right)a - \dfrac{k'n}{\pi}b + A^2(-\chi' n^2 a) = 0, \\ \left(1-n^2\right)b - \dfrac{k'n}{\pi}a + A^2(-\chi' n^2 b) = 0, \end{cases} \qquad (22)$$

где $n = \dfrac{\omega}{2\Omega_0}$, $\chi' = \dfrac{\pi^4}{4l^2}$, $k' = \dfrac{2\pi}{\Omega_0}k$.

Система (22) имеет отличное от нуля решение только в том случае, если определитель системы, составленной из коэффициентов при неизвестных, равен нулю. Решение уравнения (22) относительно амплитуд установившихся движений будет

$$A = \frac{1}{n\sqrt{\chi'}}\sqrt{1-n^2 \pm \frac{k'n}{\pi}} \text{ или } A = \frac{2\Omega_0}{\omega\sqrt{\chi'}}\sqrt{1-\frac{\omega^2}{\Omega^2} \pm k\frac{\omega^2}{\Omega^2}}. \qquad (23)$$

Здесь имеем два решения, одно из которых неустойчиво.

На рис. 3 построен график, построенный по уравнению (23) (зависимость амплитуды A от соотношения ω/Ω_0).

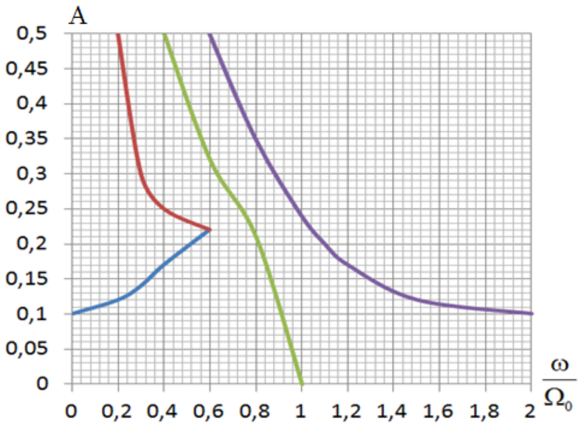

Рис. 3. Амплитудно–частотная характеристика гибкого ротора с распределенной массой с учетом нелинейной инерционности

Как видно из рис. 3, частотные кривые имеют уклон в сторону меньших частот, причиной которого является нелинейная инерционность, и если система имеет также нелинейную упругость, то она может попасть в область динамической неустойчивости. Этот случай является наиболее неблагоприятным с точки зрения устойчивости колебательных процессов. И тогда может возникнуть параметрический резонанс, который налагается на основной резонанс системы. В этом случае конечность амплитуды колебания может быть обепечена лишь за счет ввода в систему нелинейного затухания.

Помимо очевидных мер вывода системы из опасной области путем изменения ее параметров, могут быть рекомендованы и такие методы, как введение линейных и нелинейных демпферов. Увеличение жесткости системы далеко не всегда снижает амплитуды колебаний, поскольку существуют их неблагоприятные сочетания, вызывающие параметрические резонансные колебания.

Заключение. Проведенные исследования колебательных процессов вращающегося гибкого ротора, закрепленного одним концом, показывают, что нелинейная инерционность возникает за счет продольного перемещения произвольного сечения ротора при его изгибных колебаниях. Получены функция нелинейной инерционности и уравнение колебания вращающегося гибкого ротора с распределенной по длине массой. Решением этого уравнения выведена формула по определению амплитуды установившихся колебаний. Учет нелинейной инерционности позволил раскрыть причину уклона резонансных кривых в сторону меньших частот и выявить механизм возможного возникновения параметрического резонанса.

Литература

1. **Ляпунов А.М.** Общая задача устойчивости движения. - М.: Гостехиздат, 1950.- 176 с.
2. **Малкин И.Г.** Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. –М.: Гостехиздат, 2004. - 251с.
3. **Голденблат И.И**. Динамическая устойчивость сооружений. - М.: Стройиздат, 1978. - 846 с.
4. **Poincare H.** Les Methodes de la mecanique celeste. Vol. 3. - Woodbury, NY: American institute of Physics, 1993. – 58 p.
5. **Крылов Н.М., Богалюбов. Н.Н.** Сборник “Исследование колебаний конструкций” / ДНТВУ. - 1985. – 337 с.
6. **Шекян Г.Г., Захарянц Г.В.** Защита современных чувствительных аппаратур от динамических воздействий.-Ереван: Изд. "Гитутюн" НАН РА, 2003.- 148 с.
7. **Шекян Г.Г.** Динамика роторных машин: Монография. - Ереван: Изд. “Гитутюн” НАН РА, 2004. -330с.

Поступила в редакцию 05.12.2016.

Принята к опубликованию 14.06.2017.

ՃԿՈՒՆ ԼԻՍԵՌԻ ՊՏՏՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԻՆԵՐՑԻԱՅԻ ԱՌԱՋԱՑՄԱՆ ՀԱՐՑԻ ՄԱՍԻՆ

Ա.Վ. Գևորգյան

Ուսումնասիրված է մի ծայրում ամրակցված, իսկ մյուս ազատ ծայրում կենտրոնացված զանգվածով պտտվող ճկուն լիսեռի տատանողական շարժումը: Ցույց է տրված, որ ծռման տատանումների ժամանակ ռոտորի ազատ ծայրի կենտրոնացված զանգվածը կատարում է նաև երկայնական տատանումներ, ինչը առաջացնում է իներցիոն ուժերի ոչ գծայնություն: Ստացված է ոչ գծային իներցիոն ուժերի փոփոխման ֆունկցիան: Ցույց է տրված, որ բախշված զանգվածով պտտվող ճկուն ռոտորի ծռման տատանումների ժամանակ նույնպես առաջանում է իներցիոն ուժերի ոչ գծայնություն՝ ռոտորի կամայական կտրվածքի առանցքի ուղղությամբ փոփոխվող տեղափոխությունների արդյունքում: Ստացված է մի ծայրում ամրակցված բախշված զանգվածով պտտվող ճկուն ռոտորի շարժման հավասարումը, որը հաշվի է առնում իներցիոն ուժերի ոչ գծայնությունը: Գալյորկինի հայտնի եղանակի կիրառմամբ ստացված ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգը բերվել է սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների, որը թույլ է տվել մոտավոր լուծումները ներկայացնել դանդաղ փոփոխվող գործակիցներով երկու պարբերական ֆունկցիաների գումարի տեսքով; Անհայտ փոփոխական գործակիցները տատանումների ստացիոնար ռեժիմների դեպքում ստացված են Վան դեր Պոլի մոտավոր եղանակի կիրառմամբ: Այդ մոտեցումը թույլ է տվել ստանալ երկու սովորական դիֆերենցիալ այնպիսի հավասարումների համակարգ, որոնք ընդգրկում են փնտրվող անհայտ գործակիցները: Այնուհետև ոչ գծային իներցիայի ֆունկցիան վերածելով Ֆուրյեի շարքի, տեղադրելով նախնական հավասարման մեջ և հավասարեցնելով պարբերական ֆունկցիաների համապատասխան գործակիցները, ստացվել է երկու անհայտով հանրահաշվական հավասարումների համակարգ, որոնք պարունակում են փնտրվող փոփոխական անհայտ գործակիցները: Ցույց է տրված, որ պարզեցման նպատակով միավոր երկարության վրա ազդող բախշված զանգվածը կարելի է փոխարինել ռոտորի ազատ ծայրում ամրակցված համարժեք զանգվածով: Ստացված են համարժեք զանգվածի և ռոտորի տատանման ամպլիտուդի որոշման հաշվարկային բանաձևերը:

Առանցքային բառեր. ոչ գծային իներցիոնություն, ճկուն ռոտոր, արտակենտրոնություն, հիմնարար ֆունկցիա, համարժեք զանգված, երկայնական տեղափոխություն:

ON THE ORIGIN OF NONLINEAR SLUGGISHNESS AT THE ROTATION OF A FLEXIBLE ROTOR

A.V. Gevorkyan

The nonlinear sluggishness of a rotating flexible rotor fixed at one end is investigated. It is shown that the nonlinear sluggishness is due to longitudinal movement of the mass. For this case, a function of nonlinear sluggishness is obtained, and its generalization has made it possible to obtain the oscillation equation for a rotor with a mass distributed over the length. Based on the fact that when flexural vibrations of a flexible rotor with a mass distributed over the length of a nonlinear sluggishness occur as a result of longitudinal displacement of its arbitrary section, an equation for the oscillation of the system is obtained. Using the Galerkin method, the nonlinear differential equations obtained are reduced to a system of ordinary differential equations based on which it is possible to represent the approximate solution in the form of a sum of two periodic functions with slowly varying coefficients. The determination of the unknown variable coefficients for the stationary oscillation regime was carried out with the help of the approximate Van der Pol method. This approach has allowed to obtain a system of two ordinary differential equations, containing the unknown variable coefficients. Further, the expansion of the nonlinear inertia function in a Fourier series, setting them into the initial equation, and equating the coefficients for the same periodic functions, made it possible to obtain a system of two algebraic equations, containing the required coefficients as slowly varying functionals. To simplify the calculations, it is proposed to replace the distributed mass of the rotor with an equivalent mass concentrated at the cantilever end. Formulae to determine the equivalent weight and the flexible rotor oscillation amplitudes with a distributed mass,considering the inertial nonlinearity are obtained.

Keywords: nonlinear sluggishness, flexible rotor, eccentricity, fundamental function, equivalent mass, longitudinal displacement.