

СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ РОТОРА НА НЕЛИНЕЙНЫХ ОПОРАХ

А.В. Геворкян¹, Г.Г. Шекян²

¹ЗАО НПИЦ “Электромаш ГАМ ”

²Институт механики НАН РА

При вращении ротора электрической машины на нелинейных опорах, например на подшипниках качения, возникают субгармонические колебания параметрического и комбинационного типа, обусловленные различными факторами: нелинейностью жесткостных характеристик, скоростью, нагрузкой, геометрией дорожек и тел качения, чистотой контактирующих поверхностей, величиной радиального зазора и т.д. Все это вызывает значительные трудности в точном математическом описании движения ротора и приводит к необходимости упрощения задачи. В результате имеем лишь приближенные решения, удовлетворяющие в той или иной степени требованиям, предъявляемым практической стороной вопроса. Показано, что субгармонические колебания появляются в нелинейной системе в виде резонанса, когда частота изменения возмущающей силы кратна собственной частоте линейной системы. Установлено, что субгармонические колебания валов на шарикоподшипниках с радиальным зазором могут возникнуть в рабочем диапазоне скоростей, так как коэффициент при нелинейном члене имеет тот же порядок, что и при линейном. Исходя из сказанного, для решения уравнения движения обычные асимптотические методы неприемлемы. Для решения задачи использован метод изображающей функции, изложенный в монографии О. Блякьера.

Ключевые слова: субгармоника, параметрическое колебание, нелинейная жесткость, подшипник качения.

Введение. Субгармонические колебания наблюдались при моделировании системы ротор-шарикоподшипник с нелинейными жесткостями и корпусом двигателя. При этом зона существования субгармоник располагалась за второй критической скоростью ротора. Фазовый портрет модели аналогичен фазовому портрету, полученному аналитически Т. Хаяси для системы, описываемой уравнением Дуффинга.

Результаты исследования и их обсуждение. Нелинейная жесткость шарикоподшипника, описываемая законом Герца, может быть представлена в виде аппроксимирующей функции $F(y) = ay + by^3$ и уравнения движения ротора по одной из координат:

$$\ddot{y} + ay + by^3 = H\omega^2 \cos \omega t. \quad (1)$$

Уравнение (1) относится к классу уравнений Дуффинга. Теоретически и экспериментально доказано, что в нелинейных системах, подчиняющихся уравнениям Дуффинга, существуют колебания, частота которых меньше частоты возмущающей силы в два или три раза. Такие колебания называются субгармоническими порядка $1/2$ или $1/3$ (в отличие от ультрагармонических, частота которых, наоборот, выше частоты возмущения) [1,2].

Так как в уравнении (1) коэффициент при нелинейном члене того же порядка, что и при линейном, то для решения этого уравнения обычные асимптотические методы, используемые при исследовании квазилинейных систем, здесь не применимы. Воспользуемся методом изображающей функции, изложенным в монографии О. Блакьера. Этот метод относится к частотным методам анализа и распространяет на нелинейные системы понятие передаточной функции, называемой в этом случае изображающей функцией. Уравнение (1) после введения демпфирования примет вид [1-6]

$$\ddot{y} + \eta \dot{y} + ay + by^3 = H\omega^2 \cos \omega t. \quad (2)$$

Будем полагать, что в системе, описываемой уравнением (2), существуют субгармонические колебания порядка $1/2$. В этом случае решение уравнения (2) будем искать в виде

$$y = A \cos(\omega t - \varepsilon_1) + \beta \cos\left(\frac{\omega}{2}t - \varepsilon_1\right). \quad (3)$$

Подставив (3) в уравнение (2) и обращаясь к методу изображающей функции [1,7,8], запишем

$$\begin{aligned} U = \ddot{y} + \eta \dot{y} + ay + by^3 = & -A\omega^2 \cos(\omega t - \varepsilon_1) - \frac{B}{4}\omega^2 \cos\left(\frac{\omega}{2}t - \varepsilon_2\right) - \\ & - \eta A\omega \sin(\omega t - \varepsilon_1) - \eta \frac{B}{2}\omega \sin\left(\frac{\omega}{2}t - \varepsilon_2\right) + aA \cos(\omega t - \varepsilon_1) + aB \cos\left(\frac{\omega}{2}t - \varepsilon_2\right) + \\ & + b\frac{3}{4}AB(2A^2 + B^2)\cos\left(\frac{\omega}{2}t - \varepsilon_2\right) + b\frac{3}{4}A(A^2 + 2B^2)\cos(\omega t - \varepsilon_1) + \\ & + b\frac{3}{4}A^2B \cos\left(\frac{3}{2}\omega t - 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right) + b\frac{B^2}{4} \cos\left(\frac{3}{2}\omega t - 3\varepsilon_2\right) + b\frac{3}{4}AB^2 \cos(2\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Согласно определению изображающей функции [9-11], применение комплексной записи для $y(t)$ и $U(t)$ допустимо:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = A \exp[i(\omega t - \varepsilon_1)] + B \exp\left[i\left(\frac{\omega}{2}t - \varepsilon_2\right)\right], \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
U(t) = & \ddot{y} + \mu \dot{y} + ay + b \left[\frac{3}{4} B (2A^2 + B^2) \exp(-i\varepsilon_2) \right] \exp\left(i \frac{\omega}{2} t\right) + \\
& + b \left[\frac{3}{4} A (A^2 + 2B^2) \exp(-i\varepsilon_1) \right] \exp(i\omega t) + \\
& + b \left\{ \frac{3}{4} A^2 B \exp[-i(2\varepsilon_1 - \varepsilon_2)] + \frac{B^2}{4} \exp(-i3\varepsilon_2) \right\} \exp\left(i \frac{3}{2} \omega t\right) + \\
& + b \frac{3}{4} AB^2 \exp[-i(\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2)] + \dots
\end{aligned} \tag{6}$$

Перегруппировав одночастотные слагаемые, можно уравнение разделить на три части:

$$\begin{aligned}
U(t) = & U_1(t) + U_2(t) + \Delta(t) = \ddot{y}_1 + \eta \dot{y}_1 + b \left[\frac{3}{4} (A^2 + 2B^2) \right] y_1 + \ddot{y}_2 + \\
& + \dot{\eta}_2 + ay_1 + b \left[\frac{3}{4} (2A^2 + B^2) \right] y_2 + b \left\{ \frac{3}{4} A^2 \exp\left[i\left(\frac{3}{2}\omega t - 2\varepsilon_1\right)\right] + \right. \\
& \left. + \frac{B^2}{4} \exp\left[i\left(\frac{3}{2}\omega t - 4\varepsilon_2\right)\right] + \frac{3}{4} AB \exp[i(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)] \right\} B \exp(i\varepsilon_2).
\end{aligned} \tag{7}$$

В результате получим двухчастотную передаточную (изображающую) функцию:

$$E_1(\omega, A, B) = -\omega^2 + \left[a + b \frac{3}{4} (A^2 + 2B^2) \right] + i\omega\eta, \tag{8}$$

$$E_2\left(\frac{\omega}{2}, A, B\right) = -\frac{\omega^2}{4} + \left[a + b \frac{3}{4} (2A^2 + 2B^2) \right] + i \frac{\omega^2}{2} \eta. \tag{9}$$

При этом необходимо потребовать, чтобы $\Delta(t) = 0$, т.е.

$$3A^2 \exp\left[i\left(\frac{3}{2}\omega t - 2\varepsilon_1\right)\right] + B^2 \exp\left[i\left(\frac{3}{2}\omega t - 4\varepsilon_2\right)\right] + 3AB \exp[i(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)] = 0.$$

Представляя возмущающее усилие в виде $H\omega^2 \exp(i\omega t)$, получим два уравнения:

$$\begin{aligned}
E_1(\omega, A, B) &= \frac{H\omega^2}{A} \exp(i\varepsilon_1), \\
E_2\left(\frac{\omega}{2}, A, B\right) &= 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Приступая к определению неизвестных амплитуд и фазовых углов, разделим вещественную и мнимую части в первом уравнении системы (10):

$$\begin{aligned}\omega A \eta &= H \omega^2 \sin \varepsilon_1, \\ -\omega^2 A + A \left[a + b \frac{3}{4} (A^2 + 2B^2) \right] &= H \omega^2 \cos \varepsilon_1.\end{aligned}\quad (11)$$

Далее положим $\eta = 0$ и $\varepsilon_1 = 0, \pi$. Тогда из (11) найдем

$$A = \frac{4H\omega^2}{4(a - \omega^2) + 3b(A^2 + 2B^2)}.\quad (12)$$

При $b = 0$ уравнение (12) дает значение амплитуды A для линейной системы с собственной частотой $\omega_0 = \sqrt{a}$. Из второго уравнения системы (10) получим

$$A^2 = \frac{\omega^2 - 4a}{6b} - \frac{B^2}{2}.\quad (13)$$

Подставляя (13) в (12), получим

$$A = \frac{8H\omega^2}{4a - 7\omega^2 + 9B^2b}.\quad (14)$$

Дополнительное уравнение для определения соотношения между амплитудами A и B найдем из условия $\Delta(t) = 0$. Полагая $\varepsilon_1 = 0$, выделим вещественную часть из этого уравнения

$$3A^2 \cos \frac{3}{2} \omega t + B^2 \cos \left(\frac{3}{2} \omega t - 4\varepsilon_2 \right) = -3AB \cos \varepsilon_2.\quad (15)$$

Разложим $\cos \left(\frac{3}{2} \omega t - 4\varepsilon_2 \right)$ и приравняем коэффициенты при одинаковых синусах. Тогда получим $B^2 \sin 4\varepsilon_2 = 0$, откуда следует, что при некотором установившемся режиме $4\varepsilon_2 = \pi$. Предположим, что при этом $B > A$, тогда будем иметь

$$A = \frac{\sqrt{2}}{3} B \cos \frac{3}{2} \omega t.\quad (16)$$

Смысл выражения (14) будет ясен, если учесть, что A – амплитуда колебаний ротора. Движение ротора в этом случае представляет собой круговую синхронную прецессию. Так как при субгармонических колебаниях на основные колебания накладываются еще одни частоты, то прецессия ротора не будет круговой, и центр шипа ротора опишет три полных колебания около положения

статического равновесия за два оборота ротора, т.е. частота прецессии ротора будет равна $\frac{3}{2}\omega$.

Из полученных для амплитуд зависимостей видно, что характер движения ротора в подшипнике зависит от соотношения между жесткостными коэффициентами a и b , которые, в свою очередь, являются функциями от начальных условий и от области изменения координаты y . Решив уравнение (14) относительно B , получим

$$B^2 = \frac{8H\omega^2 + (7\omega^2 - 4a)A}{9bA}. \quad (17)$$

Отсюда вытекает условие возникновения и существования субгармонических колебаний порядка $1/2$ для рассматриваемой системы:

$$H\omega^2 \geq \frac{A}{8}(4a - 7\omega^2).$$

Если полагать, что ω_0^2 – собственная частота линеаризованной системы ротор-подшипник, то, введя безразмерную частоту $\Omega = \omega/\omega_0$ и безразмерную амплитуду $\xi = a/2\delta$, где 2δ – диаметральный зазор в подшипнике, получим уравнение, определяющее нижнюю границу возникновения субгармонических колебаний при жесткой установке подшипников в корпусе:

$$\Omega^2 = \frac{4}{7 + (8h/\xi_1)}. \quad (18)$$

Формула (18) выражает границы возможного появления субгармонических колебаний порядка $1/2$ на плоскости параметров Ω и ξ для значений относительной неуравновешенности h .

Выводы. Как следует из результатов исследований, даже при идеальной балансировке ротора, вращающегося на нелинейных опорах, возможно появление субгармонических колебаний при $\Omega=0,755$. В системах с нелинейными жесткостными характеристиками, аппроксимируемыми полиномом типа $f(y) = ay + by^3$, кроме колебаний порядка $1/2$, возможны и колебания $1/3$. Следовательно, в системах с жесткими роторами на подшипниках качения можно ожидать перехода колебаний одного из указанных типов в другой. Понижение же границы возникновения субгармоники порядка $1/2$ при малых амплитудах основной частоты важно для высокоскоростных прецизионных роторных машин, например, шлифовальных шпинделей. Роторы подобных машин вращаются со скоростью 100...200 тыс. об/мин и являются жесткими. Они работают на докритических скоростях, имеют значительный запас скорости до критического числа оборотов (не менее 25%). В процессе

эксплуатации электрошпинделей нередки случаи, когда тщательно сбалансированный ротор в новых подшипниках качения не дает требуемой точности вращения. Это объясняется возникновением дополнительных гармоник вибрации из-за устранения усилий предварительного осевого натяга силами инерции шариков, что резко снижает границу субгармонических колебаний, вплоть до зоны рабочих скоростей.

Литература

1. **Шекян Г.Г.** Динамика роторных машин. – Ереван: Изд-во "Гитутюн" НАН РА, 2004. – 330 с.
2. **Шекян Г.Г.** К вопросу о факторах, снижающих долговечность подшипников высокоскоростных машин // Международный тематический сб. научн.тр."Машиностроение". – Ереван, 1983.- С. 42-45.
3. **Шекян Г.Г., Захарянц Г.В.** Защита современных чувствительных аппаратур от динамических воздействий. – Ереван: Изд-во "Гитутюн" НАН РА, 2003. – 148 с.
4. **Шекян Г.Г.** Динамика гибких роторов на подшипниках качения // Изв. АН АрмССР. Серия Техн. науки. - 1980. - Т.30, № 2. - С. 7-11.
5. **Шекян Г.Г., Белуян З.А.** Надежность подшипниковых узлов синхронных генераторов // Доклады НАН РА. - Ереван, 2003. - С. 62-70.
6. **Шекян Г.Г.** Жесткостная модель шарикоподшипника // Изв. НАН РА. Сер. Техн. науки. - 1996. – Т.11, №.3. - С. 263-268.
7. **Блакьер О.** Анализ нелинейных систем.- М.: Мир, 1969.- 400 с.
8. **Панов Е.Н.** Динамика систем автоматического регулирования. -М.: ГИТЛ, 1987.– 126 с.
9. **Позняк Э.Л., Цырлин А.Л.** Нелинейные колебания статически нагруженных роторов на подшипниках качения // Машиностроение – М., 1975. - №.3. – С. 13-20.
10. **Фролов К.В.** Параметрические задачи динамики машин // Rev. roum. sci. techn. ser. mec. appl. - 1979. - №2. - С. 265-290.
11. **Ямомото Т.** О субгармонических и суммарных разностных гармонических колебаниях вращающегося вала // Механика: Сб. переводов. – 1963. – №4. – С. 61 – 73.

*Поступила в редакцию 07.06.2016.
Принята к опубликованию 05.12.2016.*

ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՀԵՆԱՐԱՆՆԵՐՈՎ ՌՈՏՈՐԻ ԵՆԹԱՀԱՐՄՈՆԻԿ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

Ա.Վ. Գևորգյան, Հ.Գ. Շեկյան

Ոչ գծային հենարաններով էլեկտրական մեքենայի ռոտորի (օրինակ՝ գնդառանցքակալային) պտտման ժամանակ առաջանում են պարամետրական և կոմբինացիոն տիպի ենթահարմոնիկ տատանումներ, որոնք պայմանավորված են տարբեր գործոնների առկայությամբ՝ արագություն, բեռ, ոչ գծային կոշտություն, գլորման ակոսների և գնդիկների երկրաչափություն, շփվող մակերևույթների մաքրություն, շառավղային բացակ և այլն: Այդ բոլորն առաջացնում են որոշակի դժվարություններ ռոտորի տատանողական շարժման մաթեմատիկական ճշգրիտ նկարագրության հարցում, որով պայմանավորվում է խնդրի պարզեցման անհրաժեշտությունը: Արդյունքում՝ ունենում ենք մոտավոր լուծումներ, որոնք կարող են բավարարել հարցի միայն գործնական պահանջները: Բացահայտված է, որ ենթահարմոնիկ տատանումները ոչ գծային համակարգերում առաջանում են ռեզոնանսի ձևով, երբ գրգռող ուժի հաճախականությունը դառնում է գծային համակարգի սեփական հաճախականությանը պատիկ: Ցույց է տրված, որ այդ դեպքում ենթահարմոնիկ տատանումները կարող են հանդես գալ մեքենայի արագությունների բանվորական միջակայքում, քանի որ հավասարման ոչ գծային անդամի գործակիցը նույն կարգի է, ինչ որ գծային անդամի գործակիցը: Ուստի շարժման հավասարման լուծման համար ասիմպտոտիկ եղանակների կիրառումն անընդունելի է: Լուծման համար օգտագործվել է արտացոլման ֆունկցիայի եղանակը, որը շարադրված է Օ. Բլակերի մենագրության մեջ

Առանցքային բառեր. ենթահարմոնիկա, պարամետրական տատանում, ոչ գծային կոշտություն, գլորման առանցքակալ:

SUBHARMONIC OSCILLATIONS OF THE ROTOR ON NONLINEAR SUPPORTS

A.V. Gevorgyan, H.G. Shekyan

At the rotor rotation of the electric machine on non-linear supports, eg. on the rolling bearings, subharmonic and combination – type oscillations arise conditioned by different factors: non-linearity of the strength characteristics, speed, loading, geometry of paths and the rolling bodies, stated in the monograph by Blacker. All this causes considerable difficulties in precise mathematical description of the motion of the rotor and leads to a need for simplifying the problem, and as a result, we have only an approximate solution that satisfies, to some degree or other, the requirements imposed on the practical side of the problem. It is shown that subharmonic oscillations appear in the nonlinear system in the form of resonance, when the frequency of the disturbing force is a multiple of the natural frequency of the linear system. It is shown that subharmonic of oscillations shafts mounted on the ball bearings with radial clearance can occur in the working speed range, since the coefficient of nlinear member has the same order as for the linear member. Based on what was said, the asymptotic methods are not acceptable for solving the equation of motion. To solve the problem, the method of the imaging function is used.

Keywords: subharmonics, parametric oscillation, nonlinear stiffness, rolling bearing.