УДК 621.539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА УПРУГОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, УСИЛЕННОЙ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ БЕСКОНЕЧНЫМИ И ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМИ СТРИНГЕРАМИ

К.С. Саркисян[1,2], Дж.С. Сукиасян[2]

[1]*Институт механики НАН РА*
[2]*Национальный политехнический университет Армении*

Рассматривается контактная задача о передаче нагрузки от двух параллельных упругих бесконечных и двух упругих полубесконечных стрингеров к изотропной однородной сплошной упругой бесконечной пластине. Контактирующая пара (пластина-стрингер) деформируется под воздействием сонаправленных осевых сосредоточенных сил, приложенных к упругим полубесконечным стрингерам. Задача определения неизвестных контактных напряжений на полубесконечных симметричных интервалах приводится к решению одного сингулярного интегрального уравнения первого рода для деформации конечного промежуточного интервала между полубесконечными стрингерами. Контактные напряжения выражаются через найденные деформации в замкнутом виде.

Ключевые слова: пластина, контакт, стрингер, сингулярное интегральное уравнение, функциональное уравнение, преобразование Фурье.

Введение. Исследование проблем взаимодействия между телами, содержащими концентраторы напряжения, такие как стрингеры, тонкостенные включения и трещины с однородной или кусочно-однородной бесконечными пластинами, является одним из актуальных направлений контактных задач теории упругости [1,2]. Такие проблемы часто возникают в авиастроении, судостроении, механике соединений и в других областях прикладной механики, поэтому их исследование имеет как теоретическую, так и прикладную значимость.

Постановка задачи. Пусть упругий сплошной изотропный лист в виде тонкой однородной бесконечной пластины малой постоянной толщины H на линиях y=-b и y=b (b>0) своей верхней поверхности усилен двумя параллельными бесконечными стрингерами с одинаковыми достаточно малыми прямоугольными поперечными сечениями F и модулями упругости E_1, а на линии y=0 – двумя полубесконечными упругими стрингерами с модулями упругости E_0. Задача заключается в определении закона распределения контактных напряжений вдоль линии соединения стрингеров с бесконечной упругой пластиной и осевых (нормальных) напряжений, возникающих в стрингерах, когда на концах полубесконечных стрингеров действуют сосредоточенные силы P (рис.).

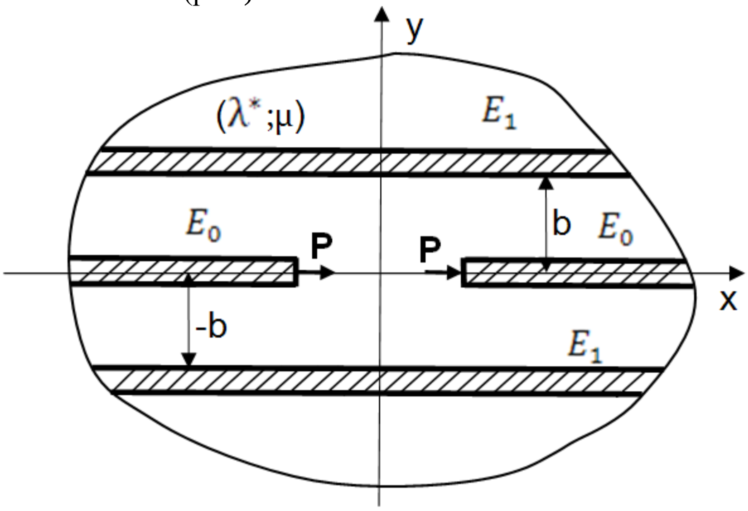

Рис.

Решение задачи. В исследуемой задаче относительно стрингеров принимается модель контакта по линии, т.е. предполагается, что тангенциальные усилия сосредоточены вдоль средней линии контактного участка, а для упругой однородной пластины справедлива модель обобщённого плоского напряженного состояния [3].

На основе вышеприведенных предположений трансформанта Фурье горизонтальных перемещений пластины будет иметь следующий вид [4,5]:

$$\bar{u}(\sigma, y-\eta) = \frac{P}{H}\left[\frac{\lambda^* + 3\mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)} \cdot \frac{1}{|\sigma|} - \frac{\lambda^* + \mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)} \cdot |y-\eta|\right] e^{-|\sigma||y-\eta|} \tag{1}$$

$$(-\infty < \sigma,\ y < \infty,\ 0 < \eta < \infty).$$

Здесь $\bar{u}(\sigma, y-\eta) = F[u(x; y-\eta)]$ – трансформанта Фурье горизонтальных перемещений точек пластины; $F[\ ]$– оператор Фурье; $\sigma(-\infty < \sigma < \infty)$ – параметр преобразования Фурье; P – интенсивность сосредоточенных сил, приложенных на концах упругих полубесконечных стрингеров; λ^* и μ – упругие постоянные Ламе, причем

$$\lambda^* = \frac{E\nu}{1-\nu^2};\ \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \tag{2}$$

где ν – коэффициент Пуассона; E – модуль Юнга материала бесконечной пластины.

Для трансформантов Фурье горизонтальных перемещений, согласно (1), на линиях $y = \pm b$ и $y = 0$ соответственно получим

$$\bar{u}(\sigma; y-b) = \frac{\bar{\tau}(\sigma;b)}{H}\left[\frac{\lambda^* + 3\mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)} \cdot \frac{1}{|\sigma|} - \frac{\lambda^* + \mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)} \cdot |y-b|\right] e^{-|\sigma||y-b|} \tag{3}$$

$$(-\infty < \sigma,\ y < \infty,\ 0 < \eta < \infty),$$

$$\bar{u}(\sigma; y+b) = \frac{\bar{\tau}(\sigma;-b)}{H}\left[\frac{\lambda^* + 3\mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)} \cdot \frac{1}{|\sigma|} - \frac{\lambda^* + \mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)} \cdot |y+b|\right] e^{-|\sigma||y+b|} \tag{4}$$

$$(-\infty < \sigma,\ y < \infty,\ 0 < \eta < \infty),$$

$$\bar{u}(\sigma; y) = \frac{\bar{\tau}(\sigma;0)}{H}\left[\frac{\lambda^* + 3\mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)} \cdot \frac{1}{|\sigma|} - \frac{\lambda^* + \mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)} \cdot |y|\right] e^{-|\sigma||y|} \tag{5}$$

$$(-\infty < \sigma,\ y < \infty,\ 0 < \eta < \infty).$$

Учитывая симметричность бесконечных стрингеров относительно горизонтальной оси, получим

$$\bar{u}(\sigma;b) = \bar{u}(\sigma;-b)\,(-\infty < \sigma < \infty), \tag{6}$$

следовательно, и

$$\bar{\tau}(\sigma;b) = \bar{\tau}(\sigma;-b)\,(-\infty < \sigma < \infty)\,. \tag{7}$$

Теперь, учитывая соотношения (3)–(7), окончательно для трансформантов горизонтальных перемещений получим

$$\begin{aligned}\bar{u}(\sigma;b) = {} & \frac{\bar{\tau}(\sigma;b)}{H}\left[\frac{\lambda^* + 3\mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)} \cdot \frac{1}{|\sigma|} - \frac{\lambda^* + \mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)} \cdot 2b\right] e^{-|\sigma|2b} + \\ & + \frac{\bar{\tau}(\sigma;0)}{H}\left[\frac{\lambda^* + 3\mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)} \cdot \frac{1}{|\sigma|} - \frac{\lambda^* + \mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)} \cdot b\right] e^{-|\sigma|b} + \\ & + \frac{\bar{\tau}(\sigma;b)}{H} \cdot \frac{\lambda^* + 3\mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)} \cdot \frac{1}{|\sigma|}\ (-\infty < \sigma < \infty),\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\bar{u}(\sigma;0) = {} & \frac{\bar{\tau}(\sigma;b)}{H}\left[\frac{\lambda^* + 3\mu}{2\mu(\lambda^* + 2\mu)} \cdot \frac{1}{|\sigma|} - \frac{\lambda^* + \mu}{2\mu(\lambda^* + 2\mu)} \cdot b\right] e^{-|\sigma|b} + \\ & + \frac{\bar{\tau}(\sigma;0)}{H} \cdot \frac{\lambda^* + 3\mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)} \cdot \frac{1}{|\sigma|}\ (-\infty < \sigma < \infty).\end{aligned} \tag{9}$$

Учитывая модель контакта по линии, уравнения равновесия стрингеров на линиях y=b и y=0 будут иметь следующий вид:

$$\frac{d^2u_s(x;b)}{dx^2}=\frac{\tau(x;b)}{E_1F}(-\infty<x<\infty), \tag{10}$$

$$\frac{d^2u_s(x;0)}{dx^2}=\frac{\tau(x;0)}{E_0F}(|x|>a) \tag{11}$$

с граничными условиями

$$\left.\frac{du_s(x;0)}{dx}\right|_{x=a}=-\frac{P}{E_0F},$$

$$\left.\frac{du_s(x;0)}{dx}\right|_{x=-a}=\frac{P}{E_0F}, \tag{12}$$

где F – площадь поперечного сечения стрингеров; $\tau(x;0)$ и $\tau(x;b)$ интенсивность тангенциальных контактных усилий под полубесконечными и бесконечными стрингерами; $u_s(x;b)$ и $u_s(x;0)$ – горизонтальные перемещения точек на линиях y=b и y=0; E_0 – модуль упругости полубесконечных стрингеров; E_1 – модуль упругости бесконечных стрингеров.

Применив к уравнению (10) преобразование Фурье, получим

$$-\sigma^2\bar{u}_s(\sigma;b)=\frac{1}{E_1F}\bar{\tau}(\sigma;b)(-\infty<\sigma<\infty). \tag{13}$$

Далее, имея в виду условия контакта

$$u_s(\sigma;b)=\bar{u}(\sigma;b)(-\infty<\sigma<\infty), \tag{14}$$

на основе (8) и (13) получим связь между $\bar{\tau}(\sigma;b)$ и $\bar{\tau}(\sigma;0)$:

$$\bar{\tau}(\sigma;b)=\frac{kb\sigma^2-|\sigma|}{Te^{|\sigma|b}+2|\sigma|ch|\sigma|b-2k\sigma^2e^{-|\sigma|b}}\bar{\tau}(\sigma;0), \tag{15}$$

где

$$T=\frac{4\mu(\lambda^*+2\mu)}{\lambda^*+3\mu}\frac{H}{E_1F},\ k=\frac{\lambda^*+\mu}{\lambda^*+3\mu}. \tag{16}$$

Подставляя (15) в (9), получим связь между $\bar{u}(\sigma;0)$ и $\bar{\tau}(\sigma;0)$:

$$\bar{u}(\sigma;0)=\frac{\bar{\tau}(\sigma;0)}{TE_1F}\left[\frac{2(1-kb|\sigma|)^2e^{-|\sigma|b}}{2bk\sigma^2e^{-|\sigma|b}-2|\sigma|ch|\sigma|b-Te^{|\sigma|b}}+\frac{1}{|\sigma|}\right] \tag{17}$$

$$(-\infty<\sigma<\infty).$$

Применив обратное преобразование Фурье к (17) и учитывая условие контакта

$$\frac{du(x;0)}{dx} = \frac{du_s(x;0)}{dx} (|x| \geq a), \tag{18}$$

получим

$$U_1(x) + U_2(x) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma \bar{u}(\sigma;0) e^{-i\sigma x} d\sigma, \tag{19}$$

где

$$U_1(x) + U_2(x) = \frac{du(x;0)}{dx}, \tag{20}$$

причем

$$U_1(x) = \begin{cases} \dfrac{du}{dx}; \ |x| \leq a, \\ 0; \quad |x| > a; \end{cases}$$
$$U_2(x) = \begin{cases} \dfrac{du}{dx}; \ |x| > a, \\ 0; \quad |x| \leq a. \end{cases} \tag{21}$$

Применив к (11) преобразование Фурье, с учетом (12) получим

$$\frac{1}{E_0 F} \bar{\tau}(\sigma;0) = \frac{2P}{E_0 F} \cos \sigma\alpha - i\sigma \overline{U}_2(\sigma). \tag{22}$$

С другой стороны,

$$u(x;0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}(\sigma;0) e^{-i\sigma x} d\sigma, \tag{23}$$

откуда

$$\frac{du(x;0)}{dx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\sigma) \bar{u}(\sigma;0) e^{-i\sigma x} d\sigma, \tag{24}$$

Применив к (24) преобразование Фурье, с учетом (17) и (21) получим

$$\overline{U}_1(\sigma) + \overline{U}_2(\sigma) = -i\sigma \overline{K}_1(\sigma) \bar{\tau}(\sigma;0), \tag{25}$$

где

$$K_1(\sigma) = \frac{1}{TE_1 F} \left[\frac{2(1 - kb|\sigma|)^2 e^{-|\sigma| b}}{2bk\sigma^2 e^{-|\sigma| b} - 2|\sigma| ch|\sigma| b + Te^{|\sigma| b}} + \frac{1}{|\sigma|} \right]. \tag{26}$$

Подставляя выражение функции $\overline{U}_2(\sigma)$ из (25) в (22), окончательно для $\bar{\tau}(\sigma;0)$ получим

$$\bar{\tau}(\sigma;0) = \frac{2P}{\sigma E_0 F \cos \sigma\alpha} \overline{K}(\sigma) + 2\overline{K}(\sigma) \overline{U}_1(\sigma), \tag{27}$$

где

$$\overline{K}(\sigma)=\frac{\sigma}{\dfrac{1}{E_0F}-\sigma^2\overline{K}_1(\sigma)}. \tag{28}$$

Применив к (27) обратное преобразование Фурье, получим

$$(x;0)=\frac{P}{\pi E_0F}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{K}(\sigma)}{\sigma\cos\sigma\alpha}e^{-i\sigma x}d\sigma+\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}K(x-s)U_1(s)ds \tag{29}$$

при условии

$$\frac{P}{\pi E_0F}\int_{-a}^{a}\frac{\overline{K}(\sigma)}{\sigma\cos\sigma\alpha}e^{-i\sigma x}d\sigma+\int_{-a}^{a}K(x-s)U_1(s)ds=0. \tag{30}$$

Заключение. Задача определения неизвестных контактных напряжений на полубесконечных симметричных интервалах сведена к решению одного сингулярного интегрального уравнения первого рода (30) для деформации $U_1(x)$ конечного промежуточного интервала между полубесконечными стрингерами [6]. Контактные же напряжения $\tau(x;0)$ выражаются через найденные деформации в замкнутом виде (29).

Литература

1. **Александров В.М., Мхитарян С.М.** Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – М.: Наука, 1983.- 487 с.
2. **Григолюк Э.И., Толкачев В.М.** Контактные задачи теории пластин и оболочек.- М.: Машиностроение, 1980.- 411 с.
3. **MelanE.** Ein Beitrag zur Theorie geschwiβter Verbindungen // Ingenieur-Archiv. –1932. – Bd3,heft 2. - S. 123-129.
4. **Арутюнян Н.Х.** Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением // ПММ. – 1968. - Т.32, №4. - С. 632-646.
5. **Григорян Э.Х., Саркисян К.С.** Контактная задача для упругой пластины, усиленной двумя бесконечными стрингерами // Известия НАН Армении. Механика. – 2004. -Т. 57, № 2. - С. 3-10.
6. **Григорян Э.Х.** Об одном эффективном методе решения одного класса смешанных задач теории упругости // Уч. записки ЕГУ. Естеств. науки. - 1979. – № 2. - С. 62-71.

Поступила в редакцию 17.11.2016.
Принята к опубликованию 05.12.2016.

ԵՐԿՈՒ ԱՆՎԵՐՋ ԵՎ ԿԻՍԱԱՆՎԵՐՋ ԶՈՒԳԱՀԵՌ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՎԵՐԱԴԻՐՆԵՐՈՎ ՈՒԺԵՂԱՑՎԱԾ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԱՆՎԵՐՋ ՍԱԼԻ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ

Կ.Ս. Սարգսյան, Ջ.Ս. Սուքիասյան

Դիտարկված է երկու անվերջ և երկու կիսաանվերջ զուգահեռ առաձգական վերադիրներից իզոտրոպ համասեռ առաձգական անվերջ սալին բեռի փոխանցման կոնտակտային խնդիր: Սալ-վերադիր կոնտակտային զույգը դեֆորմացվում է առաձգական կիսաանվերջ վերադիրներին կիրառված համուղղված, առանցքային կենտրոնացված ուժերի ազդեցության տակ: Կիսաանվերջ սիմետրիկ միջակայքերում անհայտ կոնտակտային լարումների որոշման խնդիրը դրանց միջև առկա դեֆորմացումների համար հանգեցվում է առաջին սեռի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման: Որոնվող կոնտակտային լարումներն արտահայտվում են այդ փակ տեսքով դեֆորմացումներով:

Առանցքային բառեր. սալ, կոնտակտ, վերադիր, սինգուլյար ինտեգրալ հավասարում, ֆունկցիոնալ հավասարում, Ֆուրյեի ձևափոխություն:

THE CONTACT PROBLEM OF ELASTIC INFINITE PLATE STRENGTHENED BY TWO PARALLEL INFINITE AND SEMI-INFINITE STRINGERS

K.S. Sargsyan, J.S. Suqiasyan

A contact problem on the load transfer from two parallel elastic infinite and two semi-infinite elastic stringers to isotropic homogeneous continuous elastic infinite plate is considered. The plate-stringer contact pair is deformed under the impact of codirectional concentrated forces applied to the semi-infinite stringers. The problem of determining the unknown tangential contact stresses on semi-infinite symmetric intervals is reduced to the solution of one singular integral equation of the first kind with respect to strains, arising in the interval between the semi-infinite stringers. Tangential contact stresses are expressed in terms of those strains.

Keywords: plate, contact, stringer, singular integral equation, functional equation, Fourier transform.