

УДК 539.3

**О СУЩЕСТВОВАНИИ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ
В СОСТАВНЫХ СВОБОДНО ОПЕРТЫХ ПЛАСТИНАХ****М.В. Белубекян, Ю.Г.Саноян, В.Г. Гараков***Институт механики НАН РА*

Исследованы локализованные (интерфейсные) изгибные колебания составной прямоугольной пластины, состоящей из двух частей. Края пластины свободно оперты. Для частного случая, когда части пластин отличаются значениями коэффициентов Пуассона, исследованы условия существования локализованных колебаний с учетом размеров длин частей пластины. Показано, что: а) локализованные волны на стыке частей могут существовать только в тех пластинах, относительная длина частей которых превышает критическую величину, равную 46,6583; б) для каждого значения коэффициента Пуассона одной части пластины существует область существования колебаний с одним либо двумя коэффициентами Пуассона во второй части. Размеры этих областей зависят от относительных длин частей пластины.

Ключевые слова: пластина, локализованные изгибные колебания, коэффициент Пуассона.

Введение. О существовании краевых изгибных колебаний в окрестности свободного края в полубесконечной пластине было установлено в работе [1]. В [2,3] проведены исследования локализованных колебаний пластин с другими краевыми условиями и с применением уточненной теории. В [4-6] рассмотрены интерфейсные поперечные колебания бегущих вдоль линии контакта двух полубесконечных, жестко связанных пластин. К настоящему времени изучение локализованных колебаний ограничивается исследованиями условий их существования в бесконечных либо неограниченно протяженных в одном направлении пластин. В этой работе предпринята попытка исследования физических условий существования локализованных колебаний для пластин конечных размеров.

Пластина длиной a , шириной b и толщиной h расположена срединной плоскостью в координатной плоскости $z=0$ (рис. 1).

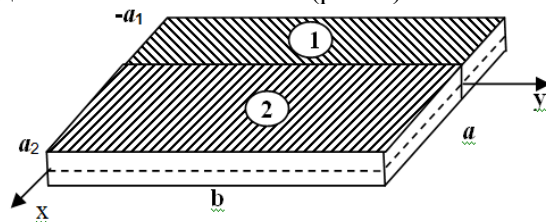


Рис. 1. Составная пластина в прямоугольной системе координат

Ось y лежит в плоскости, разделяющей пластины на части. Вдоль границы раздела такой пластины при $x = 0$ возможно существование интерфейсной изгибной волны из поперечных колебаний, бегущей вдоль оси OY и затухающей с ростом $[x]$.

Постановка задачи. В рамках теории Кирхгофа относительно изгиба тонких пластин уравнения, описывающие прогибы частей составной пластины w_i ($i=1,2$), имеют следующий вид:

$$D_1 \Delta^2 w_1 + \rho_1 h \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = 0, \quad -a_1 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq y \leq b, \quad (1a)$$

$$D_2 \Delta^2 w_2 + \rho_2 h \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq a_2, \quad 0 \leq y \leq b, \quad (1b)$$

где Δ - оператор Лапласа; ρ_i - плотности материалов;

$$D_i = \frac{E_i h^3}{3(1-\nu_i^2)}, \quad i=1, 2 - \quad (2)$$

изгибные жесткости частей пластин; E_i - модули Юнга; ν_i - коэффициенты Пуассона.

На краях пластины необходимо выполнить условия равенства перемещений и изгибающих моментов нулю:

$$\begin{aligned} w_1 = 0, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = 0, \quad x = -a_1, \quad w_2 = 0, \quad \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = 0, \quad x = a_2, \\ w_{1,2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w_{1,2}}{\partial t^2} = 0, \quad y = 0, b. \end{aligned} \quad (3)$$

На стыке частей пластины приравняем перемещения, производные перемещений по переменной x , изгибающие моменты и перерезывающие силы:

$$\begin{aligned} w_1 = w_2, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial x}, \quad D_1 \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right) = D_2 \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} \right), \\ D_1 \left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} + (2-\nu_1) \frac{\partial^3 w_1}{\partial y^3} \right) = D_2 \left(\frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} + (2-\nu_2) \frac{\partial^3 w_2}{\partial y^3} \right) \text{ при } x = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Решение задачи. Решения системы уравнений (1) в перечисленных выше работах проводились для полубесконечных, бесконечных пластин либо для пластин, дисперсионные уравнения которых имели решение в замкнутом виде. Решение однородных уравнений (1), удовлетворяющих краевым условиям (3), представим в виде

$$w_1(x, y) = e^{i\alpha x} \left(A_1 \frac{\operatorname{sh}[\lambda_n(x+a_1)p_{11}]}{ah[\lambda_n a_1 p_{11}]} + C_1 \frac{\operatorname{sh}[\lambda_n(x+a_1)p_{12}]}{ah[\lambda_n a_1 p_{12}]} \right) \sin(\lambda_n y), \quad (5a)$$

$$w_2(x, y) = e^{i\omega t} (A_2 \frac{sh[\lambda_n(x-a_2)p_{21}]}{ah[\lambda_n a_2 p_{21}]} + C_2 \frac{sh[\lambda_n(x-a_2)p_{22}]}{ah[\lambda_n a_1 p_{22}]} \sin(\lambda_n y), \quad (5b)$$

$$\text{где } p_{11} = \sqrt{1-\eta_1}, \quad p_{12} = \sqrt{1+\eta_1}, \quad p_{21} = \sqrt{1-\eta_1 k}, \quad p_{22} = \sqrt{1+\eta_1 k}, \quad (6)$$

$$a_1 = \lambda_n a_1, \quad a_2 = \lambda_n a_2; \quad \omega - \text{частота колебаний}; \quad \lambda_n = \pi n / b, \quad (7)$$

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\rho_1}{\lambda_n^4 D_1}}, \quad \eta_2 = k \eta_1, \quad \mu = \frac{p_2}{p_1}, \quad \gamma = \frac{D_2}{D_1}, \quad k = \frac{\mu}{\lambda}. \quad (8)$$

Решения для частей пластин, заданных в виде (5), ограничены в росте перемещений $w_1(x, y)$ при увеличении аргумента гиперболических функций. Это значительно облегчает и повышает точность численных расчетов. Подставляя решения (5) в условия (4), получим систему линейных однородных алгебраических уравнений в следующем виде:

$$A_2 + C_2 + A_1 + C_1 = 0, \quad (9a)$$

$$A_2 p_{21} cth(\alpha_2 p_{21}) + C_2 p_{22} cth(\alpha_2 p_{22}) - A_1 p_{11} cth(\alpha_1 p_{11}) - C_1 p_{12} cth(\alpha_1 p_{12}) = 0, \quad (9б)$$

$$A_2 \gamma (p_{21}^2 - \nu_2) + C_2 \gamma (p_{22}^2 - \nu_2) + A_1 (p_{11}^2 - \nu_1) + C_1 (p_{12}^2 - \nu_1) = 0, \quad (9в)$$

$$A_2 p_{21} (p_{21}^2 - 2 + \nu_2) cth(\alpha_2 p_{21}) + C_2 p_{22} (p_{22}^2 - 2 + \nu_2) cth(\alpha_2 p_{22}) - A_1 p_{11} (p_{11}^2 - 2 + \nu_1) cth(\alpha_1 p_{11}) - C_1 p_{12} (p_{12}^2 - 2 + \nu_1) cth(\alpha_1 p_{12}) = 0, \quad (9г)$$

Приравнявая нулю определитель этой системы, получим дисперсионное уравнение для параметров (η_1, η_2) , характеризующих частоты колебаний. В систему линейных уравнений попарно входят три физических параметра для каждой части пластины: изгибные жесткости, плотности и коэффициенты Пуассона. Однако первые два параметра входят в виде отношений (7), и поэтому волновое состояние пластины определяется всего четырьмя параметрами: двумя отношениями жесткостей и плотностей материалов частей пластины (7) и двумя коэффициентами Пуассона. Приравнявая определитель системы уравнений (9), составленный из коэффициентов при неизвестных A_2, C_2, A_1, C_1 , и учитывая η_2 из (8), получим дисперсионное уравнение для волновой величины η_1 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ p_{21} cth(\alpha_2 p_{21}) & p_{21} cth(\alpha_2 p_{21}) & p_{21} cth(\alpha_2 p_{21}) & p_{21} cth(\alpha_2 p_{21}) \\ \gamma (p_{21}^2 - \nu_2) & \gamma (p_{22}^2 - \nu_2) & p_{11}^2 - \nu_1 & p_{12}^2 - \nu_1 \\ p_{21} \hat{p}_{21} cth(\alpha_2 p_{21}) & p_{22} \hat{p}_{22} cth(\alpha_2 p_{21}) & -p_{11} \hat{p}_{11} cth(\alpha_1 p_{11}) & -p_{12} \hat{p}_{12} cth(\alpha_1 p_{12}) \end{vmatrix} = 0, \quad (10)$$

$$\text{где } \hat{p}_{21} = (p_{21}^2 - 2 + \nu_2), \quad \hat{p}_{22} = (p_{22}^2 - 2 + \nu_2), \quad \hat{p}_{11} = (p_{11}^2 - 2 + \nu_1), \quad \hat{p}_{12} = (p_{12}^2 - 2 + \nu_1).$$

Для составной пластины с одинаковыми физическими значениями параметров дисперсионное уравнение сводится к известному уравнению частот для шарнирно опертой пластины:

$$\sin(\lambda_n a \sqrt{1-\eta_1}) = 0. \quad (11)$$

При этих условиях существование интерфейсной волны невозможно. В большинстве случаев дисперсионное уравнение невозможно свести к явному виду, и исследование условий колебаний пластин представляет трудную задачу.

В работе рассмотрен частный случай существования локализованной волны, части которой отличаются только коэффициентами Пуассона. Тогда, поскольку $k=1$, формулы (6) представим в следующем виде:

$$p_{11} = p_{21} = p, \quad p_{12} = p_{22} = q. \quad (12)$$

Найдем область значений коэффициентов Пуассона и относительных длин частей пластины α_1 и α_2 при которой возможны локализованные колебания.

Для этого необходимо найти такие значения ν_1, ν_2, α_1 и α_2 , при которых детерминант (10) равняется нулю при $\eta_1 = 1$. Для этого первый и третий столбцы детерминанта соответственно умножим на α_1 и α_2 , найдем предел детерминанта матрицы системы (10) при $p \rightarrow 0$ ($\eta_1 \rightarrow 1$). Учитывая, что для достаточно больших значений α_1 и α_2 , $\text{cth}(\alpha_1 q) \approx 1$ и $\text{cth}(\alpha_2 q) \approx 1$, получим

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & \alpha_2 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & -1 & -\sqrt{2} \\ -\nu_1 \alpha_1 & 2-\nu_1 & -\gamma \nu_2 \alpha_2 & \gamma(2-\nu_2) \\ -(2-\nu_1) & \sqrt{2} \nu_1 & \gamma(2-\nu_2) & -\gamma \sqrt{2} \nu_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

Для пластины с $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ детерминант можно представить в виде

$$(\nu_2 - \nu_1)^2 (1 - \sqrt{2}a)^2 - 16\sqrt{2}a = 0. \quad (14)$$

Отсюда уже нетрудно получить зависимость ν_2 от ν_1 и α , при которой изгибная волна становится локализованной:

$$\nu_{2i}(\nu_1) = \pm \frac{4\sqrt[4]{2a^2}}{1 - \sqrt{2}a} + \nu_1. \quad (15)$$

График этих функций состоит из прямых линий, симметрично расположенных относительно диагонали квадрата (рис. 2). Индексу $i=1$ соответствуют знак “-” и прямые с правой стороны от диагонали прямоугольника, а индексу $i=2$ – знак “+” и прямые с левой стороны. Из графика рис. 2 видно, что при изменении коэффициента Пуассона

$$\text{от } -\frac{4\sqrt[4]{2a_1^2}}{1-\sqrt{2}a_1} \text{ до } 0,5 + \frac{4\sqrt[4]{2a_1^2}}{1-\sqrt{2}a_1} \quad (16)$$

коэффициент Пуассона во второй части получает два значения, а вне этой области – одно значение.

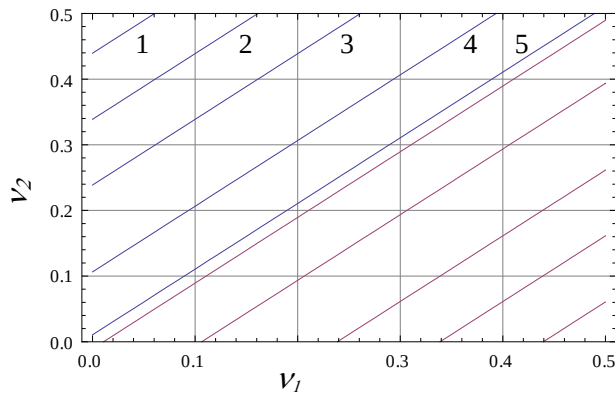


Рис. 2. График $\nu_{2i}(\nu_1)$ для $\alpha_1 = 60(1), 100(2), 200(3), 1000(4), 100000(5)$

Дисперсионное уравнение (13) относительно длин частей пластины (которые равны) имеет два корня (рис. 3):

$$\alpha_{1i}(\nu_1, \nu_2) = \frac{8 + (\nu_1 - \nu_2)^2 \pm 4\sqrt{4 + (\nu_1 - \nu_2)^2}}{\sqrt{2}(\nu_1 - \nu_2)^2} + \nu_1. \quad (17)$$

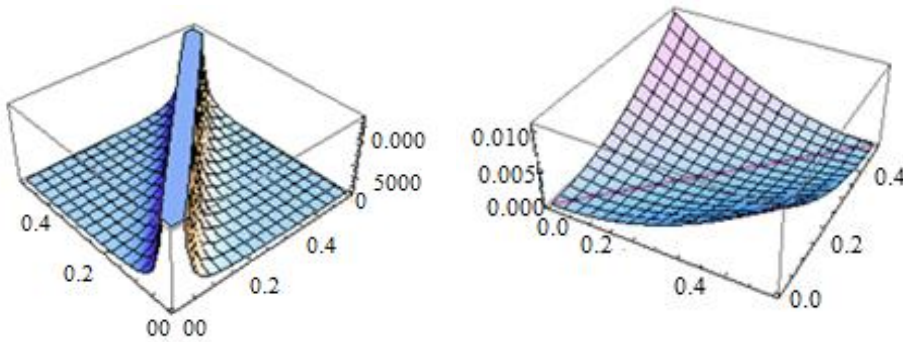


Рис. 3. Графики частей пластины $\alpha_{1i}(\nu_1, \nu_2)$

Индексу $i = 1$ соответствуют знак “+”, а индексу $i = 2$ – знак “-”. Таким образом, при $\nu_1 \rightarrow \nu_2 \alpha_{11}(\nu_1, \nu_2)$ устремляется в бесконечность, а $\alpha_{12}(\nu_1, \nu_2)$ стремится к нулю. В первом случае ($\nu_1 = \nu_2$), когда все физические параметры частей пластины равны, естественно, что локализованные волны невозможны, и

изгибные колебания пластины описываются выражением (11). Для пластин с равными относительными длинами частей пластины ($\alpha_1 = \alpha_2$) и для коэффициентов Пуассона одной из частей 0,5, а другой 0 минимальные значения относительных длин, для которых локализованная волна существует, равны 46,6583.

Заключение. Получено решение задачи уравнения колебаний для состоящей из двух частей составной, шарнирно закрепленной пластины. Из четырех контактных условий получено в неявном виде дисперсионное уравнение в виде приравненного к нулю определителя матрицы, составленной из коэффициентов однородной системы алгебраических уравнений. Для составных пластин, отличающихся только коэффициентами Пуассона, показано:

- локализованные волны на стыке частей могут существовать только в тех пластинах, относительная длина частей которых превышает критическую величину, равную 46,6583;
- для каждого значения α_1, ν_1 коэффициент Пуассона второй части имеет одно либо два значения в зависимости от принадлежности коэффициента Пуассона областям; аналогичное заключение можно сделать и по коэффициенту Пуассона первой части пластины.

Литература

1. **Коненков Ю.К.** Об изгибных волнах релеевского типа // Акустический журнал. – 1960. – Т.6, вып. 1. – С. 124-126.
2. **Белубекян М.В.** Поверхностные волны в упругих средах // Проблемы механики деформируемого твердого тела / Институт механики НАН РА. – 1997. – С. 79-96.
3. **Белубекян М.В.** Учет поперечных сдвигов в задаче изгибных колебаний пластинки, локализованных вдоль свободной кромки // Сб.: “Оптимальное управление и прочность механических систем”. – Ереван, 2002. – С. 130-133.
4. **Зильберглейт А.С., Суслова И.Б.** Контактные волны в тонких пластинах // Акустический журнал. – 1983. – Т. 29, вып. 2. – С. 186–191.
5. **Каплунов Ю.Д., Косович Е.Л., Мухомодьяров Р.Р., Сорокина О.В.** Явные модели распространения изгибных краевых и интерфейсных волн в тонких изотропных пластинах // Изв. Саратовского университета. – 2013. – Т.13. Сер. Математика. Механика. Информатика. – Вып. 1, ч. 1. – С. 56-63.
6. **Вильде М.В., Каплунов Ю.Д., Коссович Л.Ю.** Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. – М.: Физматгиз, 2010. – 380 с.

*Поступила в редакцию 29.09.2016.
Принята к опубликованию 05.12.2016.*

**ԱՁԱՏ ՀԵՆՎԱԾ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ՍԱԼԵՐՈՒՄ
ՏԵՂԱՅՆԱՑՎԱԾ ԾՈՄԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ**

Մ.Վ. Բելուբեկյան, Յու.Գ. Սանոյան, Վ.Գ. Գարակով

Հետազոտվել են երկու մասից բաղկացած բաղադրյալ ուղղանկյուն սալի տեղայնացված ծոման տատանումները: Սալի եզրերը ազատ հենված են: Հետազոտված են սալի տեղայնացված ծոման տատանումների առկայության պայմանները մասնավոր դեպքում, երբ սալի մասերը տարբերվում են միայն Պուասսոնի գործակիցի արժեքներով՝ հաշվի առած դրանց չափսերը: Ցույց է տված, որ. ա) տեղային ալիքներ գոյություն ունեն սալերի միայն այնպիսի մասերի կցվանքի դեպքում, երբ դրանց հարաբերական երկարությունը գերազանցում է 46,6583-ին հավասար կրիտիկական երկարությունը, բ) սալի մի մասի՝ Պուասսոնի գործակցի յուրաքանչյուր արժեքին կարող է համապատասխանել սալի մյուս մասի՝ Պուասսոնի գործակցի մեկ կամ երկու արժեքներով տատանումների տիրույթ: Այդ տիրույթների չափսերը կախված են սալի մասերի հարաբերական երկարություններից:

Առանցքային բառեր. սալ, տեղայնացված ծոման տատանումներ, Պուասսոնի գործակից:

**ON THE EXISTENCE OF LOCALIZED BENDING VIBRATIONS IN COMPOSITE
FREELY SUPPORTED PLATES**

M.V. Belubekyan, Yu.G. Sanoyan, V.G. Garakov

Localized (interface) bending vibrations, of a composite rectangular plates consisting of two parts are investigated. The plate edges are freely supported. For the special case, when the parts of the plates differ by Poisson's ratio, the conditions of existence of localized vibrations, taking into account the lengths of the plate parts are studied. It is shown that: a) the localized waves at the joints of the parts can exist only in the plates, the length of whose parts exceeds the critical values equal to 46,6583; b) for each value of α_1 the Poisson's ratio of the second part has one or two values, depending on the belonging of the ratio to the sections (14); a similar conclusion can be made concerning the Poisson's ratio of the first part of the plate.

Keywords: plate, localized bending, vibrations, Poisson's ratio.