

ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ С ИЗБЫТОЧНЫМИ СВЯЗЯМИ

К.Г. Степанян, К.Е. Асатрян

Национальный политехнический университет Армении

Рассмотрены задачи динамического анализа механизмов с избыточными связями. На основании свойств якобиана системы функций кинематических связей и уравнений Лагранжа первого рода разработана общая методика динамического моделирования механизмов с избыточными связями, которая применима для механизмов и манипуляционных систем любой структуры. Составлены уравнения движения, на базе которых разработаны алгоритмы решения прямой и обратной задач динамики механизмов с избыточными связями.

Ключевые слова: динамический анализ, избыточные связи, уравнения Лагранжа, неопределённые множители, якобиан.

Введение. В различных отраслях машиностроения, приборостроения и в робототехнике с целью улучшения условий работы механизмов, повышения их прочности и жёсткости в их состав вводятся пассивные связи, ограничивающие нефункциональные движения механизмов и в то же время превращающие их в динамически неопределимые системы, для исследования которых общепринятые методы теоретической механики становятся неприемлемыми. Для решения данного класса задач в последние годы авторами [1, 2] разработаны методы динамического исследования механизмов с избыточными связями, которые, в основном, посвящены вопросам выявления избыточных связей и силовому анализу этих механизмов. В [2] рассматривается задача выявления избыточных связей в кинематических схемах произвольной структуры и размерности с использованием компьютерных методов численного моделирования. Для решения поставленной задачи используются уравнения движения в форме Лагранжа первого рода. В [3] предложен метод выявления и устранения избыточных связей в многоконтурных механизмах. В данном случае решение сводится к исследованию простых незамкнутых кинематических цепей рассматриваемого механизма. В [4] изучены особенности численного интегрирования уравнений движения механических систем, в которых уравнения связей записаны через вторые производные от абсолютных координат, что позволяет использовать явные схемы численного интегрирования.

Несмотря на наличие большого количества методов динамического анализа механизмов с избыточными связями, их анализ показывает, что рассмотренные задачи и методы их решения носят частный характер и зависят от конкретной структуры исследуемых механических систем. В связи с этим возникает необходимость развития как теоретических основ, так и численных методов динамического моделирования механизмов с избыточными связями.

Ниже на основании свойств якобиана системы функций кинематических связей и уравнений Лагранжа первого рода разработана общая методика динамического моделирования механизмов с избыточными связями, которая применима для механизмов и манипуляционных систем любой структуры.

Уравнения кинематических связей. Механизмы с избыточными связями отличаются тем, что в них количество m уравнений кинематических связей

$$\varphi_i = (P, q_1, q_2, \dots, q_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1)$$

наложенных на движения звеньев, превосходит количество n обобщённых координат q_j ($j = 1, 2, \dots, n$) механизма. Однако практика показывает, что при определённых значениях параметров $P = (P_1, P_2, \dots, P_K)$ механизма ранг r матрицы якобиана функций (1) меньше n . Это указывает на то, что часть уравнений (1) является следствием остальных и может быть исключена из общего числа уравнений. После исключения таких связей оставшиеся независимые связи представим в неявном виде

$$\varphi_i = (q, P) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (2)$$

где $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ – вектор-функция обобщённых координат механизма, а $P = (P_1, P_2, \dots, P_K)$ – вектор постоянных геометрических и инерционных параметров механизма.

В данном случае предполагается, что имеет место неравенство $n > r$, которое обеспечивает подвижность механизмов с избыточными связями с числом степеней свободы $w = n - r$.

Дифференцируя дважды обе части уравнений (1) по времени, получим уравнения связей обобщённых скоростей и ускорений:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j = 0; \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j} \cdot \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j \dot{q}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (4)$$

Уравнения движения. Поскольку при составлении уравнений движения механизмов с избыточными связями невозможно использовать обычные уравнения Лагранжа второго рода, то применим уравнения Лагранжа с неопределёнными множителями:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{\mu=1}^r \lambda_{\mu} \frac{\partial \varphi_{\mu}}{\partial q_j}, j = 1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

где T – кинетическая энергия механизма, а $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ – неопределённые множители Лагранжа. Полученные уравнения (5) часто называются уравнениями Рауса-Феррера.

Преобразуя уравнения (2)-(5), получим

$$\varphi_i(P, q) = 0; i = 1, 2, \dots, r; \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(P, q) \dot{q}_j = 0; i = 1, 2, \dots, r; \quad (7)$$

$$\sum a_{ij}(P, q) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ijl}(P, q) \dot{q}_j \dot{q}_l = 0; i = 1, 2, \dots, r; \quad (8)$$

$$\sum_{l=1}^n b_{ij}(P, q) \ddot{q}_l + C_j(P, q) = \sum_{v=1}^{n-r} d_{j\mu}(P, q) Q_v + \sum_{\mu=1}^r e_{j\mu}(P, q) \lambda_{\mu}; j = 1, r, \dots, n; \quad (9)$$

где $a_{ij}(P, q) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j}$, $a_{ijl}(P, q) = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial q_j \partial q_l}$; $b_{ij}(P, q) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right)$; $C_j(P, q)$; $d_{j\mu}(P, q)$ и $e_{j\mu}(P, q) = \frac{\partial \varphi_{\mu}}{\partial q_j}$ – известные функции указанных параметров.

Общее число уравнений (6)-(9) равно $3n+r$. Они составляют совместную систему уравнений для решения задач динамического моделирования, оптимального проектирования и управления механизмов с избыточными связями.

Прямая задача динамики. При решении прямой задачи динамики механизмов с избыточными связями предполагаем, что заданы постоянные геометрические и инерционные параметры $P_1, P_r, \dots, P_K$ механизма, а также законы изменения независимых обобщённых координат, скоростей и ускорений. Не нарушая общности, в дальнейшем допускаем, что независимыми являются первые $n-r$ обобщённые координаты, т.е. заданы законы изменения $q_j = q_j(t)$, $\dot{q}_j = \dot{q}_j(t)$ и $\ddot{q}_j = \ddot{q}_j(t)$ ($j = 1, r, \dots, n-r$). Требуется определить неопределённые множители $\lambda_{\mu} (\mu = 1, 2, \dots, r)$ и те движущие силы $Q_v (v = 1, 2, \dots, n-r)$, которые обеспечивают заданные законы изменения независимых обобщённых координат, скоростей и ускорений.

Задача решается численным методом по следующему алгоритму.

1. На временном отрезке $[0; \tau]$ движения механизма строим равномерно распределённую сетку $t_0 = 0; t_1, t_2, \dots, t_N = \tau; t_l = \Delta t \cdot l, \Delta t = \frac{\tau}{N}; l = 0, 1, 2, \dots, N$.
2. Для каждого момента времени $t = t_l (l = 0, 1, 2, \dots, N)$ определяем значения $q_j^l = q_j(t_l), \dot{q}_j^l = \dot{q}_j(t_l)$ и $\ddot{q}_j^l = \ddot{q}_j(t_l)$ ($j = 1, 2, \dots, n-r$) независимых обобщённых координат, скоростей и ускорений.

3. Подставляя значения q_j^l ($j = 1, 2, \dots, n - r$) независимых обобщённых координат в систему уравнений (6) и решая её относительно зависимых обобщённых координат, получим их значения q_j^l ($j = n - r + 1, \dots, n$) в моменты времени $t = t_l$ ($l = 0, 1, 2, \dots, N$).
4. Подставляя все обобщённые координаты вместе с известными обобщёнными скоростями $\dot{q}_j^l$ ($j = 1, 2, \dots, n - r$) в систему уравнений (7) и решая её относительно зависимых обобщённых скоростей, определяем их значения $\dot{q}_j^l$ ($j = n - r + 1, \dots, n$) в моменты времени $t = t_l$ ($l = 0, 1, 2, \dots, N$).
5. Подставляя все обобщённые координаты, скорости и известные независимые обобщённые ускорения в систему уравнений (8) и решая её относительно зависимых обобщённых ускорений, определяем их значения $\ddot{q}_j^l$ ($j = n - r + 1, \dots, n$) в моменты времени $t = t_l$ ($l = 0, 1, 2, \dots, N$).
6. Подставляя все обобщённые координаты, скорости и ускорения в систему уравнений (9) и решая её относительно множителей λ_μ ($\mu = 1, 2, \dots, r$) и движущих сил Q_v ($v = 1, 2, \dots, n - r$), определяем их значения λ_μ^l ($\mu = 1, 2, \dots, r$) и Q_j^l ($j = 1, 2, \dots, n - r$) в моменты времени $t = t_l$ ($l = 0, 1, 2, \dots, N$). Этим и завершается процесс решения задачи.

Обратная задача динамики. Для обратной задачи предполагаем, что заданы постоянные геометрические и инерционные параметры $P_1, P_2, \dots, P_k$ механизма, законы изменения $Q_v(t)$ ($v = 1, r, \dots, n - r$) движущих сил, а также начальные значения q_j^0 и $\dot{q}_j^0$ ($j = 1, 2, \dots, n - r$) независимых обобщённых координат и скоростей в момент времени $t=0$. Требуется определить законы изменения $q_j(t)$ и $\dot{q}_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, n - r$) независимых обобщённых координат и скоростей.

Процесс численного решения этой задачи включает следующие операции. На временном отрезке движения механизма строим равномерно распределённую сетку $t_0 = 0; t_1, t_2, \dots, t_N = \tau; t_l = \Delta t \cdot l, \Delta t = \frac{\tau}{N}; l = 0, 1, 2, \dots, N$.

Далее предполагаем, что уже найдены значения $q_j^l = q_j(t_l)$ и $\dot{q}_j^l = \dot{q}_j(t_l)$ ($j = 1, 2, \dots, n - r$) искомых параметров в момент времени $t = t_l$.

Теперь определим искомые их значения $q_j^{l+1} = q_j(t_{l+1})$ и $\dot{q}_j^{l+1} = \dot{q}_j(t_{l+1})$ ($j = 1, 2, \dots, n - r$) в момент времени $t = t_{l+1}$ по следующему алгоритму:

1. Подставляя значения q_j^l ($j = 1, 2, \dots, n - r$) независимых обобщённых координат в систему уравнений (6) и решая её относительно зависимых

обобщённых координат, получим значения q_j^l ($j = n - r + 1, \dots, n$) в момент времени $t = t_l$.

2. Подставляя все обобщённые координаты вместе с известными обобщёнными скоростями $\dot{q}_j^l$ ($j = 1, 2, \dots, n - r$) в систему уравнений (7) и решая её относительно зависимых обобщённых скоростей, определяем значения $\dot{q}_j^l$ ($j = n - r + 1, \dots, n$) в момент времени $t = t_l$.
3. Подставляя все обобщённые координаты и скорости в системы уравнений (8) и (9) и совместно решая их относительно множителей λ_μ ($\mu = 1, 2, \dots, r$) и обобщённых ускорений, определяем значения λ_μ^l ($\mu = 1, 2, \dots, r$), $\ddot{q}_j^l$ ($j = 1, 2, \dots, n$) в момент времени $t = t_l$.
4. В промежутке времени $[t_l, t_{l+1}]$, принимая постоянными независимые обобщённые ускорения $\ddot{q}_j$ ($j = 1, 2, \dots, n - r$), равные $\ddot{q}_j^l$, путём повторного интегрирования выражения

$$\frac{d^2 q_j}{dt^2} = \ddot{q}_j^l \quad (j = 1, 2, \dots, n - r),$$

определяем значения искомых параметров в момент времени $t = t_{l+1}$:

$$\begin{aligned} \dot{q}_j^{l+1} &= \dot{q}_j^l + \ddot{q}_j^l \Delta t \quad (j = 1, 2, \dots, n - r), \\ q_j^{l+1} &= q_j^l + \dot{q}_j^l \Delta t + 0.5 \ddot{q}_j^l \Delta t^2 \quad (j = 1, 2, \dots, n - r). \end{aligned}$$

Последовательно реализуя предложенный алгоритм для $l = 1, 2, \dots, N$, получим приближенные значения искомых параметров во всех узловых точках построенной выше сетки, что и представляет собой искомые численные решения задачи.

Заключение. Составлена динамическая модель механизмов с избыточными связями. На основании уравнений Лагранжа первого рода разработаны численные методы решения прямой и обратной задач динамики рассматриваемых механизмов.

Литература

1. Амбарцумян Р.В., Чиж А.А. Силовое исследование плоских механизмов с пассивными связями // "Праці Одеського політехнічного університету". – 2011. – Вып. 2(36). – С. 98-103.
2. Горобцов А.С., Мирошниченко Д.А., Солоденков С.В. Анализ динамических систем с избыточными связями различной степени статической неопределимости // Известия высших учебных заведений, Технические науки, Машиностроение и машиноведение. – 2009. – №3(11). – С. 133-141.

3. **Ермак В.Н.** Новый метод выявления и устранения избыточных связей в многоконтурных механизмах // Известия высших учебных заведений, Машиностроение и машиноведение. – 2012. – №1. – С. 18-23.
4. **Горобцов А.С., Солоденков С.В.** Алгоритм численного интегрирования уравнений движения систем тел с множителями Лагранжа // Машиностроение и инженерное образование. – 2005. – № 3. – С. 20-27.

*Поступила в редакцию 07.12.2015.
Принята к опубликованию 15.12.2015.*

ԱՎԵԼՑՈՒԿԱՅԻՆ ԿԱՊԵՐՈՎ ՄԵԽԱՆԻԶՄԻ ԴԻՆԱՄԻԿ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆ

Կ.Գ. Ստեփանյան, Բ.Ե. Ասատրյան

Դիտարկված են ավելցուկային կապերով մեխանիզմի դինամիկ վերլուծության խնդիրները: Կինեմատիկ կապերի ֆունկցիաների համակարգի յակոբիանի հատկությունների և Լագրանժի առաջին սեռի հավասարումների հիման վրա մշակվել է ավելցուկային կապերով մեխանիզմների դինամիկ մոդելավորման մեթոդիկա, որը կիրառելի է ցանկացած կառուցվածքով մեխանիզմների և մանիպուլյացիոն համակարգերի դեպքերում: Կազմվել են շարժման հավասարումները, որոնց հիման վրա մշակվել են ավելցուկային կապերով մեխանիզմների դինամիկայի ուղիղ և հակադարձ խնդիրների լուծման ալգորիթմները:

Առանցքային բառեր. դինամիկ վերլուծություն, ավելցուկային կապեր, Լագրանժի հավասարումներ, անորոշ բազմապատկիչներ, յակոբիան:

DYNAMIC ANALYSIS OF MECHANISMS WITH REDUNDANT CONSTRAINTS

K.G. Stepanyan, Q.Y. Asatryan

The problems of dynamic analysis of mechanisms with redundant links are considered. Based on the jacobian properties of the functions of the kinematic relations and the Lagrange equations of the first kind, a general method for dynamic modeling of mechanisms with redundant links applicable for mechanisms and handling systems of any structure is developed. Equations of motion are worked out on the basis of which algorithms for solving direct and inverse problems of dynamics of machines with redundant links are developed.

Keywords: dynamic analysis, redundant links, Lagrange equations, uncertain factors, jacobian.