

РАСЧЕТ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ КУСОЧНО-ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

А.Г. Погосян

Национальный политехнический университет Армении

На основе уточненной теории анизотропных оболочек, учитывающей влияние поперечных сдвигов на напряженно-деформированное состояние оболочки, определяются оптимальные значения геометрических и физических параметров ступенчатой цилиндрической оболочки, изготовленной из композиционного материала. Полученные в результате расчетов оптимальные значения указанных параметров позволяют обеспечить наибольшую несущую способность оболочки при заданных ее габаритных размерах и весе.

Ключевые слова: оптимизация, оболочка, композиционный материал, ортотропия, прочность.

Введение. Оболочки как тонкостенные элементы современных конструкций широко применяются в различных областях техники и строительства. Они предназначены для работы под воздействием механических нагрузок, которые могут быть как статическими, так и динамическими.

С целью повышения жёсткости и несущей способности тонкостенных конструкций, в зависимости от вида закрепления и действующей нагрузки, оболочки могут быть подкреплены дискретно расположенными рёбрами или иметь переменную толщину. Наиболее широкие возможности для увеличения жесткостных и прочностных характеристик оболочечных конструкций имеют композиционные материалы (КМ). В связи с этим особую актуальность приобретают вопросы оптимального проектирования таких конструкций.

При расчетах тонкостенных элементов конструкций, изготовленных из КМ, существенное значение при определении напряженно-деформированного состояния имеют факторы, которыми пренебрегают в классической теории оболочек. В связи с этим зачастую бывает необходимым использование уточненных моделей теории оболочек, учитывающих влияние поперечных сдвигов.

Расчёты на жесткость и прочность оболочечных конструкций играют важную роль при проектировании современных аппаратов, машин и

сооружений. Особый интерес представляют рассматриваемые здесь вопросы определения напряженно-деформированного состояния и оптимального проектирования цилиндрической оболочки ступенчато-переменной толщины, изготовленной из КМ, с учетом поперечных сдвигов.

Постановка задачи. Рассматривается цилиндрическая оболочка радиуса R , длины $2L$, толщины h_0 с жестко закрепленными свободно смещающимися вдоль оси цилиндра торцевыми краями $x = \pm L$ под действием внутреннего равномерного давления q . Предполагается, что оболочка изготовлена из КМ путем поочередной укладки его монослоев под углом $\pm\varphi$ к оси x оболочки.

Метод исследования. На основе уточненной теории анизотропных оболочек [1], учитывающей влияние поперечных сдвигов на напряженно-деформированное состояние оболочки, решается задача оптимального перераспределения толщины оболочки путем ее усиления в зоне краевого эффекта, а также выбора угла φ . При этом предполагается, что на участке $-a \leq x \leq a$ она будет иметь толщину h_2 , а на участках $-L \leq x \leq -a$ и $a \leq x \leq L$ - толщину h_1 (см. рис.) при условии сохранения ее общего веса:

$$L(h_1 - h_0) = a(h_1 - h_2). \quad (1)$$

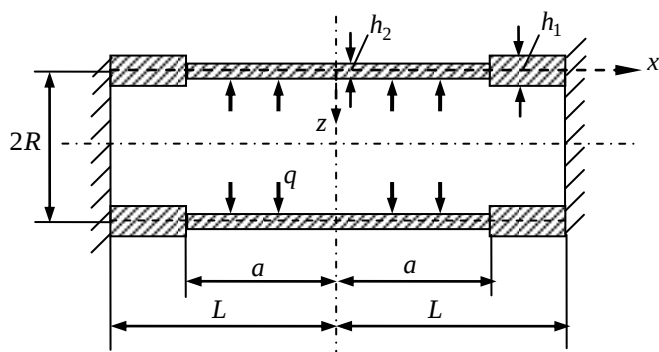


Рис. Расчетная схема оболочки

Таким образом, поставленная задача оптимального проектирования заключается в определении оптимальных значений геометрических a , h_1 , h_2 и физического φ параметров оболочки, обеспечивающих наибольшее значение допускаемой из условия прочности нагрузки q при ее неизменном весе и заданных габаритных размерах $\xi = L/R$.

Аналогичная задача на основе классической теории оболочек рассматривалась в работе [2].

На основе уточненной теории определяется напряженно-деформированное состояние оболочки для каждой из ее областей ($p=1, 2$), соответствующих толщинам h_1 и h_2 , с удовлетворением условий сопряжения на линии их раздела. При этом ввиду симметрии рассматривается половина оболочки ($x \geq 0$).

Результаты исследования. Разрешающие дифференциальные уравнения уточненной теории осесимметрично нагруженной цилиндрической оболочки для ее составляющих областей запишутся в виде [1]

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{d^2 F_p}{dx^2} - \frac{h_p^3}{12} \frac{d\varphi_p}{dx} &= q, \\ \frac{C_{11}^{(p)}}{\Omega_p} \frac{d^4 F_p}{dx^4} - \frac{1}{R} \frac{d^2 w_p}{dx^2} &= 0, \\ D_{11}^{(p)} \frac{d^3 w_p}{dx^3} - \frac{h_p^2}{10} D_{11}^{(p)} a_{55} \frac{d^2 \varphi_p}{dx^2} + \frac{h_p^3}{12} \varphi_p &= 0 \quad (p=1, 2). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $w_p(x)$, $F_p(x)$, $\varphi_p(x)$ – искомые функции; $\Omega_p = C_{11}^{(p)} C_{22}^{(p)} - (C_{12}^{(p)})^2$;

$$C_{ik}^{(p)} = B_{ik} h_p, \quad D_{ik}^{(p)} = \frac{B_{ik} h_p^3}{12} \quad (i, k=1, 2; \quad p=1, 2); \quad a_{55} = \frac{1}{G_{13}}; \quad B_{ik} - \text{упругие}$$

характеристики КМ в главных геометрических направлениях оболочки, определяемые через его характеристики в главных физических направлениях B_{ik}^0 по известным формулам поворота [1]; G_{13} – модуль сдвига КМ, характеризующий изменение углов между осями x, z .

Внутренние силы и изгибающие моменты определяются по формулам

$$T_x^{(p)} = C_{11}^{(p)} \frac{du_p}{dx} + C_{12}^{(p)} \frac{w_p}{R} = 0, \quad T_y^{(p)} = \frac{d^2 F_p}{dx^2} = C_{22}^{(p)} \frac{w_p}{R} + C_{12}^{(p)} \frac{du_p}{dx}, \quad (3)$$

$$Q_x^{(p)} = \frac{h^3}{12} \varphi, \quad M_x^{(p)} = -D_{11}^{(p)} \frac{d^2 w_p}{dx^2} + \frac{h_p^2}{10} D_{11}^{(p)} a_{55} \frac{d\varphi}{dx}, \quad M_y^{(p)} = \frac{D_{12}^{(p)}}{D_{11}^{(p)}} M_x^{(p)}, \quad (4)$$

где $u_p(x)$ – продольные перемещения точек срединной поверхности оболочки.

Из уравнений (3) следует

$$\frac{w_p}{R} = \frac{C_{11}^{(p)}}{\Omega_p} \frac{d^2 F_p}{dx^2}, \quad \frac{du_p}{dx} = -\frac{C_{12}^{(p)}}{\Omega_p} \frac{d^2 F_p}{dx^2}. \quad (5)$$

Выражения искомых функций, удовлетворяющие уравнениям (2) и первому из условий (5), представляются в виде [1]

$$\begin{aligned} \varphi_p = & \frac{12}{h^3 R (\alpha_p^2 + \beta_p^2)^2} \left[\left(C_1^{(p)} (\alpha_p^2 - \beta_p^2) - 2C_2^{(p)} \alpha_p \beta_p \right) e^{\alpha_p x} \cos \beta_p x + \right. \\ & + \left(C_2^{(p)} (\alpha_p^2 - \beta_p^2) + 2C_1^{(p)} \alpha_p \beta_p \right) e^{\alpha_p x} \sin \beta_p x + \left(\frac{C_3^{(p)} (\alpha_p^2 - \beta_p^2) +}{2C_4^{(p)} \alpha_p \beta_p} \right) e^{-\alpha_p x} \cos \beta_p x + \\ & \left. + \left(C_4^{(p)} (\alpha_p^2 - \beta_p^2) - 2C_3^{(p)} \alpha_p \beta_p \right) e^{-\alpha_p x} \sin \beta_p x \right] \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} w_p = & \frac{C_{11}^{(p)} R}{\Omega_p (\alpha_p^2 + \beta_p^2)} \left[\left(C_1^{(p)} (\alpha_p \cos \beta_p x + \beta_p \sin \beta_p x) + \right. \right. \\ & \left. \left. + C_2^{(p)} (\alpha_p \sin \beta_p x - \beta_p \cos \beta_p x) \right) e^{\alpha_p x} + \right. \\ & \left. + \left(C_3^{(p)} (\beta_p \sin \beta_p x - \alpha_p \cos \beta_p x) - \right. \right. \\ & \left. \left. - C_4^{(p)} (\beta_p \cos \beta_p x + \alpha_p \sin \beta_p x) \right) e^{-\alpha_p x} \right] + \frac{C_{11}^{(p)}}{\Omega_p} q R^2, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F_p}{dx^2} = & \frac{1}{\alpha_p^2 + \beta_p^2} \left[\left(C_1^{(p)} (\alpha_p \cos \beta_p x + \beta_p \sin \beta_p x) + \right. \right. \\ & \left. \left. + C_2^{(p)} (\alpha_p \sin \beta_p x - \beta_p \cos \beta_p x) \right) e^{\alpha_p x} + \right. \\ & \left. + \left(C_3^{(p)} (\beta_p \sin \beta_p x - \alpha_p \cos \beta_p x) - C_4^{(p)} (\beta_p \cos \beta_p x + \alpha_p \sin \beta_p x) \right) e^{-\alpha_p x} \right] + q R. \end{aligned} \quad (8)$$

Коэффициенты $C_j^{(p)}$ ($j=1, 2, 3, 4$; $p=1, 2$) определяются из условий

- симметрии:

$$\text{при } x=0 - \quad \varphi_2 = 0, \quad \frac{dw_2}{dx} = 0; \quad (9)$$

- жесткой заделки:

$$\text{при } z = \pm h_2, \quad x = L - \quad w_1 = 0, \quad -\frac{dw_1}{dx} + \frac{a_{55}}{2} \left(\frac{h_1^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \varphi_1 = 0; \quad (10)$$

- сопряжения:

$$\begin{aligned} \text{при } z = \pm h_2, \quad x = a - \quad w_1 = w_2, \\ -\frac{dw_1}{dx} + \frac{a_{55}}{2} \left(\frac{h_1^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \varphi_1 = -\frac{dw_2}{dx} + \frac{a_{55}}{2} \left(\frac{h_2^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \varphi_2, \quad (11) \\ M_x^{(1)} = M_x^{(2)}, \quad Q_x^{(1)} = Q_x^{(2)}. \end{aligned}$$

$C_j^{(p)}$ ($j=1, 2, 3, 4$; $p=1, 2$) – постоянные интегрирования, которые определяются из граничных условий (4) - (6).

Компоненты деформации в произвольных точках оболочки в направлении оси x и окружном направлении y будут

$$e_x^{(p)} = \frac{du_p}{dx} - z \frac{d^2 w_p}{dx^2} + z \frac{a_{55}}{2} \left(\frac{h_p^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \frac{d\varphi_p}{dx} \quad \left(-\frac{h_p}{2} \leq z \leq \frac{h_p}{2} \right),$$

$$e_y^{(p)} = \frac{w_p}{R} \quad (p=1, 2). \quad (12)$$

Деформации по главным физическим направлениям оболочки (в направлениях укладки монослоев КМ) определяются по формулам

$$e_{11}^{(p)} = e_x^{(p)} \cos^2 \varphi + e_y^{(p)} \sin^2 \varphi,$$

$$e_{22}^{(p)} = e_x^{(p)} \sin^2 \varphi + e_y^{(p)} \cos^2 \varphi,$$

$$e_{12}^{(p)} = (e_x^{(p)} - e_y^{(p)}) \sin 2\varphi, \quad (13)$$

а напряжения в тех же направлениях будут

$$\sigma_{11}^{(p)} = B_{11}^0 e_{11}^{(p)} + B_{12}^0 e_{22}^{(p)}, \quad \sigma_{22}^{(p)} = B_{12}^0 e_{11}^{(p)} + B_{22}^0 e_{22}^{(p)}, \quad \sigma_{12}^{(p)} = B_{66}^0 e_{12}^{(p)}. \quad (14)$$

Условия прочности для каждой из областей оболочки ($p=1, 2$) принимаются в виде [3]

$$\left(\frac{\sigma_{11}^{(p)}}{R_1} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{22}^{(p)}}{R_2} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}^{(p)}}{T_0} \right)^2 - \frac{\sigma_{11}^{(p)} \sigma_{22}^{(p)}}{R_1^2} - 1 \leq 0, \quad (15)$$

где R_1, R_2, T_0 – прочностные характеристики КМ.

В каждой из областей оболочки $0 \leq x \leq a$ и $a \leq x \leq L-a$ допустимые значения давления q_1 и q_2 определяются из условий прочности (15), записанных в виде равенств для наиболее опасных точек соответствующих областей:

$$\max_{x,z} \left[\left(\frac{\sigma_{11}^{(p)}}{R_1} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{22}^{(p)}}{R_2} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}^{(p)}}{T_0} \right)^2 - \frac{\sigma_{11}^{(p)} \sigma_{22}^{(p)}}{R_1^2} \right] = 1 \quad (p=1, 2). \quad (16)$$

Очевидно, что по толщине оболочки наиболее опасными будут точки $z = \pm h_p/2$.

Допускаемое значение внутреннего давления для всей оболочки определится из условия

$$q = \min(q_1, q_2). \quad (17)$$

Поставленная задача оптимального проектирования заключается в определении оптимальных значений параметров оболочки a, h_1, h_2 и φ , обеспечивающих наибольшее значение допускаемой из условия (16) нагрузки q при ее неизменном весе, соответствующем условию (1), и заданных габаритных

размерах $\xi = L/R$. Решение этой задачи сводится к следующей задаче нелинейного программирования.

Найти:

$$q_0 = \max_x q, \quad \bar{x} = \{a, h_1, h_2, \varphi\} \quad (18)$$

при ограничениях

$$h_2 = \frac{L}{a} \left[h_0 - h_1 \left(1 - \frac{a}{L} \right) \right], \quad (19)$$

$$10^{-3}R \leq h_2 \leq h_0, \quad h_0 \leq h_1 \leq R/5, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2. \quad (20)$$

Здесь q - целевая функция, определяемая из (16); $\bar{x}$ - вектор управления. Ограничение (19) следует из условия постоянства веса конструкции (1), первые два из ограничений (20) обусловлены пределами применимости уточненной теории тонких оболочек.

Задача решается методом деформируемого многогранника [4].

Численные расчеты произведены для различных значений толщины оболочки $\bar{h}_0 = h_0/R = 0,0025; 0,005; 0,01; 0,02; 0,05; 0,075; 0,10$ при $\xi = 0,5; 1,0; 2,0$.

В качестве материала принят КМ со следующими характеристиками:

$$\bar{B}_{22}^0 = B_{22}^0/B_{11}^0 = 0,6164; \quad \bar{B}_{12}^0 = B_{12}^0/B_{11}^0 = 0,12; \quad \bar{B}_{66}^0 = B_{66}^0/B_{11}^0 = 0,1572$$

$$R_2 = 0,403R_1; \quad T_0 = 0,264R_1; \quad \bar{G}_{13} = G_{13}/B_{11}^0 = 0,1572.$$

В таблице приведены оптимальные значения параметров оболочки: $\bar{a} = a/L$, $\bar{h}_1 = h_1/R$, $\bar{h}_2 = h_2/R$, φ и соответствующие значения приведенной нагрузки: $\bar{q}_0 = q_0/R$; $\bar{q}_0^*$, полученные по уточненной теории для оболочки постоянной толщины $\bar{h}_0$; $\bar{q}_{cl}$, полученные по классической теории для ступенчатой оболочки [2].

Результаты расчетов показывают, что, как и в случае применения классической теории [2], оптимальное перераспределение материала оболочки в сторону увеличения ее толщины в зоне краевого эффекта приводит к значительному увеличению ее несущей способности.

При этом, согласно таблице, уточненная теория по сравнению с классической дает существенные поправки для оболочек сравнительно большей толщины. Так, при $\bar{h}_0 = h_0/R = 0,0025; 0,005; 0,01; 0,02$ разница значений допускаемой нагрузки, полученных на основе уточненной и классической теорий, составляет 6...9%, а при $\bar{h}_0 = 0,05; 0,075; 0,10$ – от 14 до 50%.

Таблица

Оптимальные параметры оболочки

ξ	$\bar{h}_0$	$\bar{a}$	$\bar{h}_1$	$\bar{h}_2$	φ	$\bar{q}_0 \cdot 10^2$	$\bar{q}_0^* \cdot 10^2$	$\bar{q}_{cl} \cdot 10^2$
0,5	0,0025	0,77	0,00465	0,00186	90°	0,1485	0,0753	0,1523
	0,005	0,71	0,00880	0,00345		0,2741	0,1529	0,2771
	0,01	0,63	0,01620	0,00636		0,5016	0,3147	0,5031
	0,02	0,46	0,02690	0,01190		0,9607	0,6686	0,8910
	0,05	0,31	0,05790	0,03242		2,3915	2,0391	2,0866
	0,075	0,29	0,08155	0,05896		3,8975	3,6395	3,0001
	0,10	0,29	0,10190	0,09547		5,9995	5,9131	3,8623
1,0	0,0025	0,87	0,00515	0,00210	90°	0,1688	0,0753	0,1723
	0,005	0,83	0,0098	0,00402		0,3238	0,1529	0,3275
	0,01	0,8	0,0193	0,00767		0,6040	0,3147	0,6093
	0,02	0,69	0,03185	0,01468		1,1942	0,6686	1,1151
	0,05	0,60	0,0675	0,03833		3,0995	2,0391	2,4210
	0,075	0,53	0,08995	0,06174		5,0526	3,6395	3,3812
	0,10	0,58	0,10900	0,09348		7,2514	5,9131	4,2712
2,0	0,0025	0,93	0,00555	0,00227	90°	0,1839	0,0753	0,1854
	0,005	0,90	0,0105	0,00439		0,3591	0,1529	0,3631
	0,01	0,87	0,01965	0,00856		0,6993	0,3147	0,6929
	0,02	0,83	0,03555	0,01682		1,3764	0,6686	1,3101
	0,05	0,73	0,0713	0,04212		3,5618	2,0391	2,9658
	0,075	0,72	0,09480	0,06730		5,6967	3,6395	4,2218
	0,10	0,63	0,10900	0,09471		8,4054	5,9131	5,4060

Заключение. Таким образом, проведенные расчеты позволяют заключить, что классическая теория изгиба ортотропных оболочек дает практически достоверные результаты для тонких цилиндрических композитных оболочек переменной толщины. Для расчета сравнительно толстых конструкций следует использовать более точные теории, учитывающие влияние поперечных сдвигов.

Литература

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. - М.: Наука, 1974. - 448 с.
2. Belubekyan E.V., Poghosyan A.G., Khanikyan V.M. Optimization of acilindrical shell pieewise constant thickness, prepared from the composite material // Proceedings of the 4th international conference on comntemporary problems in architecture and construction sustainable building industry of the future, September 24-27, 2012. - Czestochowa, Poland, 2012.- V. 2. - P. 612-617.

3. Гольденблат И.И., Копнов В.А. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. - М.: Наука, 1988. – 135 с.
4. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. - М.: Мир, 1975. - 266 с.

*Поступила в редакцию 07.10.2015.
Принята к опубликованию 15.12.2015.*

**ԿՈՄՊՈԶԻՑԻՈՆ ՆՅՈՒԹԻՑ ՊԱՏՐԱՍՏՎԱԾ ԿՏՈՐ ԱՌ ԿՏՈՐ ՀԱՍՏԱՏՈՒՆ
ՀԱՍՏՈՒԹՅԱՄԲ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՀԱՇՎԱՐԿԸ՝ ՀԱՇՎԻ ԱՌՆԵԼՈՎ
ԸՆԴԱՅՆԱԿԱՆ ՍԱՀՔԸ**

Ա.Գ. Պողոսյան

Դիտարկվում է երկայնական ուղղությամբ կտոր առ կտոր հաստատուն հաստությամբ կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված գլանային թաղանթ, որն ազատ տեղաշարժվող եզրերով կոշտ ամրացված է և բեռնավորված է հավասարաչափ բաշխված ներքին ճնշմամբ: Հիմք ընդունելով օրթոտրոպ թաղանթների ճշգրտված տեսությունը, որը հաշվի է առնում ընդլայնական սահքի դեֆորմացումները, որոշվում են գլանային թաղանթի ֆիզիկական և երկրաչափական պարամետրերի լավարկային արժեքները, որոնք ընդհանուր չափերի և հաստատուն կշռի (հավասար հաստատուն հաստությամբ թաղանթի կշռի) դեպքում ապահովում են նրա ամենամեծ կրողունակությունը:

Առանցքային բառեր. լավարկում, թաղանթ, կոմպոզիցիոն նյութ, օրթոտրոպ, ամրություն:

**CALCULATING THE PIECEWISE CONSTANT THICKNESS CYLINDRICAL
SHELL MADE OF A COMPOSITE MATERIAL SUBJECT TO
TRANSVERSAL SHEARS**

A.G. Poghosyan

The cylindrical shell of stepped lengthwise section made of a composite material with rigidly fixed and freely displaced in longitudinal direction end edges, under the action of the internal uniformly distributed load is examined. The problem of the stress-strain state of orthotropic cylindrical shell in plan is studied in a refined statement. With the assigned overall dimensions of the shell and its constant weight equal to the weight of the shell of a constant thickness, the optimum values of its geometric and physical parameters are determined, ensuring the greatest bearing capacity of the shell.

Keywords: optimization, shell, composite material, orthotropy, strength.