

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ

Л.А. Шекян¹, М.С. Григорян²

¹Национальный политехнический университет Армении

²Национальный университет архитектуры и строительства Армении

Рассмотрены две тесно связанные между собой трехмерные граничные задачи теории установившейся фильтрации для пористого грунтового слоя конечной или бесконечной мощности, т.е. для слоя конечной высоты или полупространства, когда на верхней поверхности слоя заданы скорости или давления, а нижняя поверхность слоя водонепроницаема. Исходя из закона Дарси и уравнения неразрывности при установившейся фильтрации, эти задачи сформулированы в виде граничных задач для потенциала скоростей или для пьезометрического давления. При помощи интегрального преобразования Фурье путем сочетания с преобразованием Ханкеля получены явные выражения потенциала скоростей, определены поля скоростей и давлений.

Ключевые слова: фильтрация, трехмерная задача, скорость, давление, потенциал скоростей.

Введение. В настоящей работе рассматриваются два важных частных случая трехмерных граничных задач теории установившейся фильтрации, когда жидкость через прямоугольное отверстие в жестком экране с постоянной скоростью впрыскивается в пористое полупространство или же поступает через прямоугольную область под постоянным давлением в грунтовое основание в виде полупространства. В этих частных случаях потенциал скоростей можно выразить через элементарные функции, на основании которых сильно упрощаются инженерные расчеты основных фильтрационных характеристик: скоростей, давлений, расходов жидкости через определенные сечения основания. Такие задачи по своим постановкам тесно примыкают к известной смешанной граничной задаче Ламба из гидромеханики [1], когда жидкость через круговое отверстие в жестком экране впрыскивается в полупространство. При этом на круге заданы потенциал скоростей или давление, а на остальной граничной поверхности заданы нулевые скорости. Такие задачи встречаются при впрыскивании различных жидкостей, в том числе жидких удобрений, специальными приборами в почву.

Постановка задачи. Сначала, как в [2], приведем основные уравнения теории трехмерной установившейся фильтрации в пористых средах и изложим постановку задач. Пусть отнесенное к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$ пористое грунтовое полупространство занимает область $\Omega = \{-\infty < x, y < \infty; -\infty < z < 0\}$ (рис. 1).

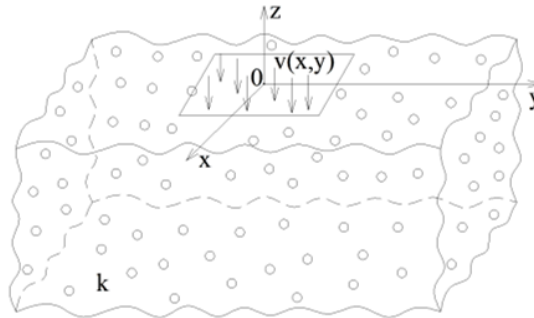


Рис. 1

Если при фильтрации идеальной несжимаемой жидкости в грунтовом слое пренебречь конвективными составляющими ускорения, т.е. считать силы инерции пренебрежимо малыми по сравнению с силами сопротивления, что соответствует малым рейнольдским числам, и, кроме того, фильтрационное течение считать установившимся, то основные уравнения теории фильтрации при отсутствии объемных сил будут состоять [3, 4] из закона Дарси:

$$v_x = -k \frac{\partial h}{\partial x}, \quad v_y = -k \frac{\partial h}{\partial y}, \quad v_z = -k \frac{\partial h}{\partial z}; \quad h(x, y, z) = \frac{1}{\gamma} p(x, y, z) + z \quad (1)$$

и уравнения неразрывности:

$$\operatorname{div} \bar{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

Здесь $p = p(x, y, z)$ – давление в жидкости; $h = h(x, y, z)$ – пьезометрическое давление или напор; γ – удельный вес жидкости; k – коэффициент фильтрации, а v_x, v_y, v_z – компоненты скорости фильтрации в правой прямоугольной системе координат $Oxyz$.

Подставляя (1) в (2), обнаружим, что напор $h(x, y, z)$ является гармонической функцией:

$$\Delta h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (x, y, z \in \Omega),$$

и можно ввести потенциал скоростей [3, 4]:

$$\varphi(x, y, z) = -k h(x, y, z); \quad v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (3)$$

причем потенциал скоростей φ – также гармоническая в Ω функция.

Методы исследования. Сформулированные ниже граничные задачи решаются при помощи интегральных преобразований Фурье и Ханкеля. Предположим, что в первой граничной задаче для полупространства Ω , где характерные величины отметим индексом 1, через прямоугольную область $D = \{z = 0; -a < x < a; -b < y < b\}$ в жестком экране, расположенную в граничной полуплоскости полупространства $z = 0$, жидкость с постоянной вертикальной скоростью V впрыскивается в пористое полупространство, а на остальной части граничной плоскости эта скорость равна нулю, т.е.

$$-v_z^{(1)} \Big|_{z=0} = v(x, y) = \begin{cases} v = \text{const} & (x, y) \in D, \\ 0 & (x, y) \in \Pi \setminus D, \end{cases}$$

где $\Pi = \{z = 0; -\infty < x, y < \infty\}$ – граничная плоскость полупространства $z \leq 0$.

Эта задача близко примыкает к указанной выше задаче Ламба [1]. Данная граничная задача математически формулируется следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = 0 & (x, y, z \in \Omega), \\ v_z^{(1)} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = -v(x, y) = \begin{cases} v = \text{const} & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \in \Pi \setminus D \end{cases} & (-\infty < x, y < \infty), \\ \varphi_1(x, y, z) \rightarrow 0 & \text{при } x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (4)$$

Теперь предположим, что во второй граничной задаче, где характерные величины отметим индексом 2, через прямоугольное отверстие $D = \{z = 0; -a < x < a; -b < y < b\}$ жидкость под заданным постоянным давлением p впрыскивается в полупространство (рис. 2), причем давление вне прямоугольника D на граничной плоскости Π равно нулю.

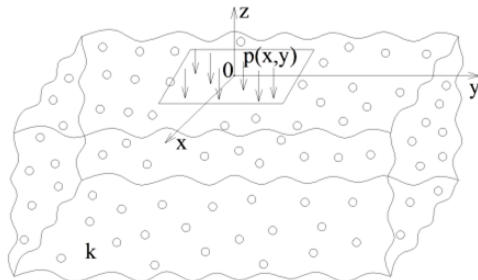


Рис. 2

В результате приходим к следующей граничной задаче для пористого полупространства:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} = 0 & (x, y, z \in \Omega), \\ \varphi_2(x, y, z)|_{z=0} = -\frac{k}{\gamma} \begin{cases} p & (x, y) \in D, \\ 0 & (x, y) \in \Pi \setminus D, \end{cases} \\ \varphi_2(x, y, z) \rightarrow 0 & \text{при } x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (5)$$

Определение потенциалов скоростей. Исходя из приведенного в [2] решения общей граничной задачи, в рассматриваемом частном случае граничной задачи (4) для потенциала скоростей будем иметь

$$\varphi_1(x, y, z) = -\frac{v}{2\pi} \int_{-a}^a d\xi \int_{-b}^b \frac{d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}}. \quad (6)$$

Таким же образом из приведенного в [2] решения общей граничной задачи в рассматриваемой частной граничной задаче (5) имеем

$$\varphi_2(x, y, z) = \frac{kpz}{2\pi\gamma} \iint_D \frac{d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}} = \frac{kpz}{2\pi\gamma} \int_{-a}^a d\xi \int_{-b}^b \frac{d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}}. \quad (7)$$

Приступим к вычислению интегралов (6) и (7), останавливаясь на этом вопросе несколько подробнее. При вычислении внутреннего интеграла в (6) имеем

$$M(x, y, z; \xi) = \int_{-b}^b \frac{d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}}.$$

Положим $c^2 = (x-\xi)^2 + z^2$, $t = y-\eta$, в результате чего

$$M(x, y, z; \xi) = \int_{y-b}^{y+b} \frac{dt}{\sqrt{t^2 + c^2}} = \ln \left(t + \sqrt{t^2 + c^2} \right) \Big|_{t=y-b}^{t=y+b} = \ln \frac{y+b + \sqrt{(x-\xi)^2 + (y+b)^2 + z^2}}{y-b + \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-b)^2 + z^2}}$$

и, следовательно,

$$\varphi_1(x, y, z) = -\frac{v}{2\pi} \int_{-a}^a \ln \frac{y+b + \sqrt{(x-\xi)^2 + (y+b)^2 + z^2}}{y-b + \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-b)^2 + z^2}} d\xi. \quad (8)$$

Далее положим

$$M_{\pm}(x, y, z; \xi) = \int_{-a}^a \ln \left[y \pm b + \sqrt{(x-\xi)^2 + (y \pm b)^2 + z^2} \right] d\xi. \quad (9)$$

Для этого сначала вычислим интеграл

$$M_+(x, y, z; \xi) = \int_{-a}^a \ln \left(y + b + \sqrt{(x - \xi)^2 + (y + b)^2 + z^2} \right) d\xi,$$

для чего введем обозначения $s = x - \xi$, $m^2 = (y + b)^2 + z^2$, $n = y + b$. Тогда

$$M_+ = \int_{x-a}^{x+a} \ln \left(n + \sqrt{m^2 + s^2} \right) ds.$$

После интегрирования по частям получим

$$M_+ = (x + a) \ln \left[\sqrt{(x + a)^2 + m^2} + n \right] - (x - a) \ln \left[\sqrt{(x - a)^2 + m^2} + n \right] - \int_{x-a}^{x+a} \frac{s^2 ds}{\sqrt{s^2 + m^2} \left(n + \sqrt{s^2 + m^2} \right)}. \quad (10)$$

Последний интеграл

$$N = N(x, m, n, a) = \int_{x-a}^{x+a} \frac{s^2 ds}{\sqrt{s^2 + m^2} \left(n + \sqrt{s^2 + m^2} \right)}$$

можно вычислить при помощи подстановки Эйлера [5]:

$$u - s = \sqrt{s^2 + m^2},$$

что позволяет освободиться от корней и представить этот интеграл в виде

$$N = \frac{1}{2} \left\{ u_2 - u_1 - n \ln \frac{(u_2 + n)^2 + m^2 - n^2}{(u_1 + n)^2 + m^2 - n^2} - \frac{2(m^2 - n^2) + m^2}{\sqrt{m^2 - n^2}} \times \right. \\ \left. \times \left[\arctg \left(\frac{u_2 + n}{\sqrt{m^2 - n^2}} \right) - \arctg \left(\frac{u_1 + n}{\sqrt{m^2 - n^2}} \right) \right] + m^4 \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{u^2 (u^2 + 2nu + m^2)} \right\} \quad (m^2 - n^2 = z^2 \geq 0), \\ u_1 = x - a + \sqrt{(x - a)^2 + m^2}, \quad u_2 = x + a + \sqrt{(x + a)^2 + m^2}.$$

Наконец, последний интеграл легко вычисляется методом неопределенных коэффициентов [5], приводящим к представлению

$$\frac{m^4}{u^2 (u^2 + 2nu + m^2)} = \frac{m^2 - 2nu}{u^2} + \frac{2nu + 4n^2 - m^2}{u^2 + 2nu + m^2}.$$

В результате после простых преобразований получим

$$N = \frac{u_2 - u_1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{m^2}{u_1} - \frac{m^2}{u_2} \right) - n \ln \frac{u_2}{u_1} - 2\sqrt{m^2 - n^2} \left[\arctg \left(\frac{u_2 + n}{\sqrt{m^2 - n^2}} \right) - \arctg \left(\frac{u_1 + n}{\sqrt{m^2 - n^2}} \right) \right]. \quad (11)$$

Возвращаясь к прежним переменным, путем несложных преобразований из (10) и (11) будем иметь

$$\begin{aligned}
M_+ = & (x+a)\ln\left[y+b+\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}\right] - (x-a)\ln\left[y+b+\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}\right] - \\
& - \frac{1}{2}\left[2a+\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}-\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}\right] - \\
& - \frac{[(y+b)^2+z^2]\left[2a+\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}-\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}\right]}{2\left[x-a+\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}\right]\left[x+a+\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}\right]} + \\
& + 2z\left\{\arctg\left[\frac{x+y+a+b+\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}{z}\right] - \right. \\
& \left. - \arctg\left[\frac{x+y-a+b+\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}}{z}\right]\right\} + \\
& + (y+b)\ln\frac{(x+a)+\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}{(x-a)+\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}}.
\end{aligned}$$

Очевидно, что интеграл M_- из (12) сразу получится из интеграла M_+ формальной заменой в нем b на $-b$.

В итоге имеем

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x, y, z) = & -\frac{v}{2\pi}\left\{(x+a)\ln\left[\frac{y+b+R(a,b)}{y-b+R(a,-b)}\right] - (x-a)\ln\left[\frac{y+b+R(-a,b)}{y-b+R(-a,-b)}\right] + \right. \\
& + (y+b)\ln\left[\frac{x+a+R(a,b)}{x-a+R(-a,b)}\right] - (y-b)\ln\left[\frac{x+a+R(a,-b)}{x-a+R(-a,-b)}\right] - \\
& - \frac{1}{2}[R(a,b) - R(-a,b) - R(a,-b) + R(-a,-b)] - \\
& - \frac{[(y+b)^2+z^2][2a+R(a,b)-R(-a,b)]}{2[x-a+R(-a,b)][x+a+R(a,b)]} + \frac{[(y-b)^2+z^2][2a+R(a,b)-R(-a,-b)]}{2[x-a+R(-a,-b)][x+a+R(a,-b)]} + \\
& + 2z\times\left[\arctg\left(\frac{x+y+a+b+R(a,b)}{z}\right) - \arctg\left(\frac{x+y-a+b+R(-a,b)}{z}\right) - \right. \\
& - \arctg\left(\frac{x+y+a+b+R(a,-b)}{z}\right) + \\
& \left. + \arctg\left(\frac{x+y-a-b+R(-a,-b)}{z}\right)\right]\left.\right\} \quad (-\infty < x, y < \infty; z < 0), \quad (12)
\end{aligned}$$

$$R(a,b)=R(x,y,z;a,b)=\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}.$$

Итак, в разбираемом частном случае потенциал скорости можно представить при помощи элементарных функций в виде (12).

Перейдем к вычислению интегралов в (7). Сначала вычислим внутренний интеграл

$$L=L(x,y,z;\xi)=\int_{-b}^b \frac{d\eta}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\right]^{3/2}},$$

полагая в нем $t=y-\eta$; $c^2=(x-\xi)^2+z^2$. В результате будем иметь

$$L=\int_{y-b}^{y+b} \frac{dt}{(t^2+c^2)\sqrt{t^2+c^2}}.$$

Далее, вводя подстановку Эйлера [5]:

$$u-t=\sqrt{t^2+c^2} \Rightarrow t=\frac{u^2-c^2}{2u}; \quad dt=\frac{u^2+c^2}{2u^2} du,$$

получим

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \int_{u_1}^{u_2} \frac{u^2+c^2}{u^2} \frac{du}{\left[\left(\frac{u^2-c^2}{2u}\right)^2+c^2\right] \sqrt{\left(\frac{u^2-c^2}{2u}\right)^2+c^2}} = \\ &= 4 \int_{u_1}^{u_2} \frac{u du}{(u^2+c^2)^2} = 2 \int_{u_1}^{u_2} \frac{d(u^2+c^2)}{(u^2+c^2)^2} - \frac{2}{u^2+c^2} \Big|_{u=u_1}^{u=u_2} = \\ &= \frac{2}{\left[y-b+\sqrt{(y-b)^2+c^2}\right]^2+c^2} - \frac{2}{\left[y+b+\sqrt{(y+b)^2+c^2}\right]^2+c^2}, \\ &u_1=y-b+\sqrt{(y-b)^2+c^2}; u_2=y+b+\sqrt{(y+b)^2+c^2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi_2(x,y,z) &= \frac{kpz}{\pi\gamma} \left\{ \int_{-a}^a \frac{d\xi}{(x-\xi)^2+z^2 + \left[y-b+\sqrt{(x-\xi)^2+(y-b)^2+z^2}\right]^2} - \right. \\ &\quad \left. - \int_{-a}^a \frac{d\xi}{(x-\xi)^2+z^2 + \left[y+b+\sqrt{(x-\xi)^2+(y+b)^2+z^2}\right]^2} \right\} \quad (-\infty < x, y < \infty; \quad z < 0). \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$L_{\pm} = L_{\pm}(x, y, z) = \int_{-a}^a \frac{d\xi}{(x - \xi)^2 + z^2 + \left[y \pm b + \sqrt{(x - \xi)^2 + (y \pm b)^2 + z^2} \right]^2}.$$

Тогда

$$\varphi_2(x, y, z) = \frac{kpz}{\pi\gamma} (L_+ - L_-). \quad (13)$$

После подстановки $s = x - \xi \Rightarrow d\xi = -ds$ будем иметь

$$L_+ = \frac{1}{2} \int_{x-a}^{x+a} \frac{ds}{s^2 + z^2 + (y+b)^2 + (y+b)\sqrt{s^2 + (y+b)^2 + z^2}}.$$

Далее, вводя подстановку Эйлера:

$$\sqrt{s^2 + m^2} = v - s \Rightarrow s = \frac{v^2 - m^2}{2v}; \quad ds = \frac{v^2 + m^2}{2v^2} dv; \quad v = s + \sqrt{s^2 + m^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1 = x - a + \sqrt{(x-a)^2 + m^2}, \quad v_2 = x + a + \sqrt{(x+a)^2 + m^2},$$

где $m^2 = (y+b)^2 + z^2$; $n = y+b$; $m^2 = n^2 + z^2$ ($m^2 \geq n^2$), получим

$$\begin{aligned} L_+ &= \frac{1}{4} \int_{v_1}^{v_2} \frac{v^2 + m^2}{v^2} \frac{dv}{\left(\frac{v^2 - m^2}{2v} \right)^2 + m^2 + n \sqrt{\left(\frac{v^2 - m^2}{2v} \right)^2 + m^2}} = \int_{v_1}^{v_2} \frac{(v^2 + m^2) dv}{v^4 + 2m^2 v^2 + m^4 + 2nv^3 + 2nm^2 v} = \\ &= \int_{v_1}^{v_2} \frac{(v^2 + m^2) dv}{(v^2 + m^2)^2 + 2nv(v^2 + m^2)} = \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v^2 + m^2 + 2nv} = \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{(v+n)^2 + m^2 - n^2} = \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{(v+n)^2 + z^2} = \\ &= \frac{1}{|z|} \operatorname{arctg} \left(\frac{v+n}{|z|} \right) \Big|_{v_1}^{v_2} = \frac{1}{|z|} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{v_2+n}{|z|} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{v_1+n}{|z|} \right) \right] \quad (z^2 = m^2 - n^2). \end{aligned}$$

Возвращаясь к прежним переменным, можем записать

$$\begin{aligned} L_+ &= \frac{1}{|z|} \left\{ \operatorname{arctg} \left[\frac{x + y + a + b + \sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2 + z^2}}{|z|} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{arctg} \left[\frac{x + y - a + b + \sqrt{(x-a)^2 + (y+b)^2 + z^2}}{|z|} \right] \right\} \quad (-\infty < x, y < \infty; \quad z < 0). \end{aligned}$$

Отсюда, заменив b на $-b$, сразу находим

$$L_- = \frac{1}{|z|} \left\{ \operatorname{arctg} \left[\frac{x+y+a-b+\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}}{|z|} \right] - \right. \\ \left. - \operatorname{arctg} \left[\frac{x+y-a-b+\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}}{|z|} \right] \right\}.$$

Теперь по формуле (13) имеем

$$\varphi_2(x,y,z) = \frac{kp}{\pi\gamma} \left\{ \operatorname{arctg} \left[\frac{x+y+a-b+\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}}{z} \right] - \right. \\ - \operatorname{arctg} \left[\frac{x+y-a-b+\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}}{z} \right] - \\ - \operatorname{arctg} \left[\frac{x+y+a+b+\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}{z} \right] + \\ \left. + \operatorname{arctg} \left[\frac{x+y-a+b+\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}}{z} \right] \right\} \quad (-\infty < x, y < \infty; z < 0). \quad (14)$$

Итак, в разбираемом частном случае потенциал скорости выражается через элементарные функции.

Отметим, что потенциалы скоростей $\varphi_1(x,y,z)$ и $\varphi_2(x,y,z)$ в первой и второй задачах, соответственно, в случае полупространства, выражающиеся формулами (10) и (7), связаны между собой соотношением

$$\varphi_2(x,y,z) = \frac{k}{\gamma} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}.$$

В заключение отметим, что для получения числовых результатов для компонент скоростей и давления в обсуждаемых выше частных случаях соответствующие формулы должны быть записаны в безразмерных формах.

Чтобы более упростить расчетные формулы (12) и (14), вместо прямоугольника D рассмотрим частный случай квадрата. С этой целью положим $b = a$ и введем безразмерные величины:

$$\bar{x} = x/a, \quad \bar{y} = y/a, \quad \bar{z} = z/a; \quad \bar{\varphi}_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \varphi_1(a\bar{x}, a\bar{y}, a\bar{z})/av; \\ \bar{\varphi}_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \gamma \varphi_2(a\bar{x}, a\bar{y}, a\bar{z})/kp.$$

Тогда после простых преобразований формулы (12), (14) принимают вид

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = & -\frac{1}{2\pi} \left\{ (\bar{x}+1) \ln \left[\frac{\bar{y}+1+\bar{R}(1,1)}{\bar{y}-1+\bar{R}(1,-1)} \right] - (\bar{x}-1) \ln \left[\frac{\bar{y}+1+\bar{R}(-1,1)}{\bar{y}-1+\bar{R}(-1,-1)} \right] + \right. \\ & + (\bar{y}+1) \ln \left[\frac{\bar{x}+1+\bar{R}(1,1)}{\bar{x}-1+\bar{R}(-1,1)} \right] - (\bar{y}-1) \ln \left[\frac{\bar{x}+1+\bar{R}(1,-1)}{\bar{x}-1+\bar{R}(-1,-1)} \right] - \frac{1}{2} [\bar{R}(1,1) - \bar{R}(-1,1) - \bar{R}(1,-1) + \\ & + \bar{R}(-1,-1)] - \frac{[(\bar{y}+1)^2 + \bar{z}^2][2 + \bar{R}(1,1) - \bar{R}(-1,1)]}{2[\bar{x}-1+\bar{R}(-1,1)][\bar{x}+1+\bar{R}(1,1)]} + \\ & + \frac{[(\bar{y}-1)^2 + \bar{z}^2][2 + \bar{R}(1,-1) - \bar{R}(-1,-1)]}{2[(\bar{x}-1)+\bar{R}(-1,-1)][\bar{x}+1+\bar{R}(1,-1)]} + 2\bar{z} \times \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{\bar{x}+\bar{y}+2+\bar{R}(1,1)}{\bar{z}} \right) - \right. \\ & \left. \left. - \operatorname{arctg} \left(\frac{\bar{x}+\bar{y}+\bar{R}(-1,1)}{\bar{z}} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{\bar{x}+\bar{y}+\bar{R}(1,-1)}{\bar{z}} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{\bar{x}+\bar{y}-2+\bar{R}(-1,-1)}{\bar{z}} \right) \right] \right\}, \quad (15) \end{aligned}$$

$$\bar{R}(\pm 1, \pm 1) = \bar{R}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \pm 1, \pm 1) = \sqrt{(\bar{x}+1)^2 + (\bar{y}+1)^2 + \bar{z}^2},$$

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = & \frac{1}{\pi} \left\{ \operatorname{arctg} \left[\frac{\bar{x}+\bar{y}+\bar{z} + \sqrt{(\bar{x}+1)^2 + (\bar{y}-1)^2 + \bar{z}^2}}{\bar{z}} \right] - \right. \\ & - \operatorname{arctg} \left[\frac{\bar{x}+\bar{y}+\bar{z} - 2 + \sqrt{(\bar{x}-1)^2 + (\bar{y}-1)^2 + \bar{z}^2}}{\bar{z}} \right] - \operatorname{arctg} \left[\frac{\bar{x}+\bar{y}+\bar{z} + 2 + \sqrt{(\bar{x}+1)^2 + (\bar{y}+1)^2 + \bar{z}^2}}{\bar{z}} \right] + \\ & \left. + \operatorname{arctg} \left[\frac{\bar{x}+\bar{y}+\bar{z} + \sqrt{(\bar{x}-1)^2 + (\bar{y}+1)^2 + \bar{z}^2}}{\bar{z}} \right] \right\} \quad (-\infty < \bar{x}, \bar{y} < \infty; \bar{z} < 0). \quad (16) \end{aligned}$$

Формулы (15), (16) в безразмерных величинах удобны для их численной реализации и конкретных расчетов фильтрационных характеристик.

Заключение. Построены точные решения граничных задач типа Ламба трехмерной теории установившейся фильтрации жидкости в пористом полупространстве, когда жидкость через граничную плоскость основания с заданной вертикальной скоростью или под заданным давлением впрыскивается в основание. В частном случае, когда жидкость поступает в полупространство через жесткий экран с прямоугольным отверстием, потенциалы скоростей выражены через элементарные функции. Последние представлены в безразмерных величинах.

Литература

1. Ламб Г. Гидродинамика. – М.-Л.: ОГИЗ, 1947. – 928 с.
2. Мхитарян С.М., Токмаджян О.В., Григорян М.С., Шемян Л.А. О двух пространственных задачах теории установившейся фильтрации жидкости в пористом грунтовом слое конечной или бесконечной мощности // Известия ЕРГУАС. – 2013. – №2. – С. 46-57.

3. **Аравин В.И., Нумеров С.Н.** Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. – М.: Гос. изд. техн.-теор. лит-ры, 1953. – 616 с.
4. **Полубаринова-Кочина П.Я.** Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977. – 664 с.
5. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Физматлит, 2001. – Т.2. – 810 с.

*Поступила в редакцию 02.12.2015.
Принята к опубликованию 15.12.2015.*

ՀԵՂՈՒԿԻ ԿԱՅՈՒՆԱՑԱԾ ՖԻԼՏՐԱՄԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՍԻ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻԻ ՄԱՍԻՆ

Լ.Ա. Շեկյան, Մ.Ս. Գրիգորյան

Դիտարկվում են վերջավոր կամ անվերջ հզորությամբ ծակոտկեն գրունտային շերտում հեղուկի կայունացած ֆիլտրման տեսության երկու հարակից տարածական եզրային խնդիրներ, երբ շերտի մի եզրում տրված է արագության ուղղաձիգ բաղադրիչը կամ ճնշումը, իսկ մյուս եզրը անջրաթափանց է: Ելնելով Դարսիի օրենքից և անխզելիության հավասարումից՝ կայունացած ֆիլտրման պայմաններում այս խնդիրները բերվում են արագությունների պոտենցիալի կամ պիեզոմետրիկ ճնշման եզրային խնդիրներին: Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխության միջոցով Խանկելի ձևափոխության համադրության եղանակով ստացված են արագությունների պոտենցիալի պարզ արտահայտություններ, որոշված են դաշտի արագությունը և ճնշումը:

Առանցքային բառեր. ֆիլտրում, տարածական խնդիրներ, արագություն, ճնշում, արագությունների պոտենցիալ:

A BOUNDARY PROBLEM IN THE THEORY OF THE STEADY LIQUID FILTRATION

L.A. Shekyan, M.S. Grigoryan

Two adjacent spatial boundary problems of the steady filtration theory fluids in porous subgrade layer of finite or infinite capacity, where on the one surface of the layer, vertical velocity or pressure is given, i.e. for a layer of final height or a semi-space, when on the upper surface of a layer, the speeds or pressures are set are considered, and the lower surface of the layer is non water-permeable are considered. Based on Darcy's law and the continuity equation at steady filtering, these tasks are formulated in the form of boundary value problems for the velocity potential or piezometric pressure. Using the Fourier integrated transformation combined with Hankel's transform, the explicit expressions of the velocity potential are obtained and the velocity and pressure fields are defined.

Keywords. filtration, spatial problems, velocity, pressure, velocity potential.