

АППРОКСИМАЦИОННЫЙ ДИНАМИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ МАНИПУЛЯТОРОВ С УПРУГИМИ ШАРНИРАМИ

М.Г. Мкртчян, К.Г. Степанян, М.Г. Арутюнян, Ю.Л. Саркисян

Национальный политехнический университет Армении

Рассматриваются аппроксимационные задачи динамического синтеза параллельных манипуляторов с упругими шарнирами, где семейство аппроксимирующих функций формируется в процессе решения смешанных систем дифференциальных и алгебраических уравнений движения манипуляторов. Показано, что при поиске переменных параметров в виде полиномов в состав аппроксимирующих функций можно включить уравнения движения, что намного упрощает и унифицирует алгоритмы решения различных по характеру задач синтеза.

Ключевые слова: параллельные манипуляторы, динамический синтез, приближение функций, среднеквадратическое приближение, чебышевское приближение.

Введение. Прецизионные манипуляторы предназначены для осуществления требуемых перемещений с высокой точностью или угловой ориентации манипулируемых объектов. Они широко используются в медицине, в оптико-механических системах и в других областях, где основными критериями синтеза являются высокая точность позиционирования и быстродействие. Анализ исследований показывает, что одним из основных направлений структурного синтеза прецизионных манипуляторов является применение упругих шарниров, наличие которых и обуславливает особенности моделирования и проектирования соответствующих манипуляционных систем.

Прецизионные манипуляторы с упругими элементами, несмотря на возрастающую с каждым днем потребность, до настоящего времени мало исследованы, что приводит к необходимости развития теоретических основ их кинематического и динамического моделирования, оптимального проектирования и управления. В настоящей работе рассматриваются задачи динамического моделирования и аппроксимационного динамического синтеза разработанного авторами трёхподвижного микроманипулятора с упругими шарнирами (рис. 1). Изучению кинематических и динамических характеристик этого манипулятора, новизна которого подтверждена авторским свидетельством [1], посвящены предшествующие статьи авторов [2, 3]. Хотя предлагаемые здесь методы представлены на примере конкретного манипулятора, они достаточно

универсальны и могут быть применены и к другим структурным разновидностям параллельных манипуляторов с упругими кинематическими парами.

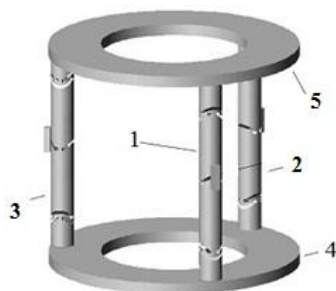


Рис. 1. Параллельный микроманипулятор с упругими шарнирами

В известных методах синтеза динамических систем [4] после их дискретизации методом конечных разностей дифференциальные уравнения движения преобразуются в алгебраические уравнения, что позволяет свести задачи синтеза к задачам минимизации функции многих переменных с ограничениями, решения которых осуществляются методами нелинейного программирования. При этом количество искомых параметров существенно увеличивается, что приводит к определённым трудностям вычислительного характера.

Для преодоления этих трудностей в работах [5, 6] путём развития метода Галёркина [7] авторами разработан унифицированный метод решения задач динамического синтеза. В настоящей работе на основе развития этих методов предлагается унифицированный метод решения аппроксимационных задач динамического синтеза параллельных манипуляторов с упругими шарнирами, позволяющий намного сократить количество искомых параметров и использовать общие алгоритмы при вычислении как среднеквадратических, так и чебышевских приближений.

Уравнения движения. В связи со сложностью уравнений кинематических связей при моделировании платформенных манипуляторов с упругими шарнирами (рис. 1) не представляется возможным явно выразить их “лишние” координаты через обобщённые координаты, что, в свою очередь, не позволяет применять метод Лагранжа для формирования уравнений движения этих систем. В данном случае необходимо использовать другие методы, которые основаны на методах Ньютона-Эйлера [8]. В настоящей работе будет использован разработанный нами модифицированный метод Ньютона-Эйлера, который позволяет уменьшить количество уравнений и сохранить в них параметры всех упругих шарниров. Метод иллюстрируется на примере параллельного манипулятора, представленного на рис. 1. Согласно этому методу, платформу 5

разбиваем на три части, каждая из которых входит только в состав одной из полученных трех открытых кинематических цепей ног манипулятора (рис. 2). На каждую из этих частей прикладываем реакции уничтоженных связей, главные векторы и моменты которых, приведённые к началу O жёстко связанной с платформой 5 подвижной системы координат $Ox_{\mu 5}$, обозначим соответственно через $\bar{R}_{21}^1$, $\bar{R}_{31}^1$, $\bar{R}_{12}^1 = -\bar{R}_{21}^1$, $\bar{R}_{13}^1 = -\bar{R}_{31}^1$, $\bar{M}_{21}$, $\bar{M}_{31}$, $\bar{M}_{12} = -\bar{M}_{21}$, $\bar{M}_{13} = -\bar{M}_{31}$.

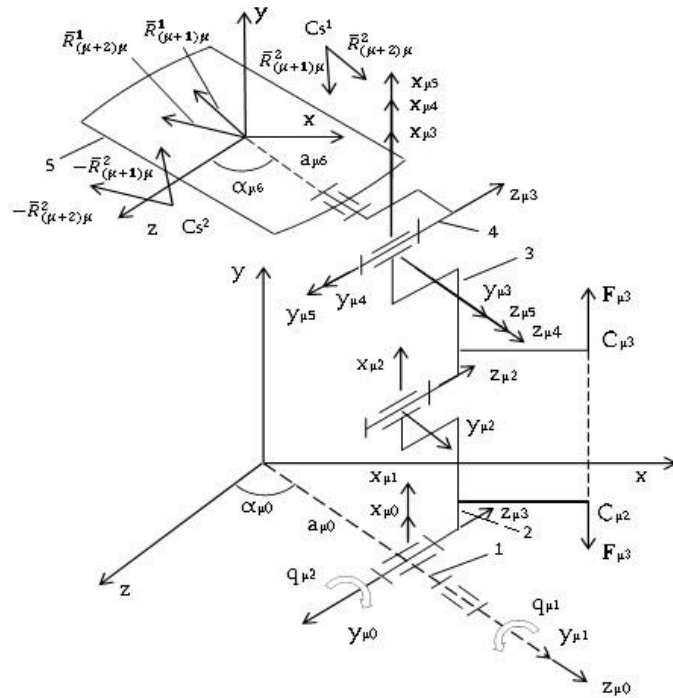


Рис. 2. Расчётная схема кинематической цепи ноги микроманипулятора

Для удобства представим в дальнейшем главные моменты в виде пар сил $(\bar{R}_{21}^2; -\bar{R}_{21}^2)$, $(\bar{R}_{31}^2; -\bar{R}_{31}^2)$, $(\bar{R}_{12}^2; -\bar{R}_{12}^2)$ и $(\bar{R}_{13}^2; -\bar{R}_{13}^2)$, приложенных в точках $C_5^1(x_5, y_5, z_5)$ и $C_5^2(-x_5, -y_5, -z_5)$ подвижной системы $Ox_{\mu 5}$.

Управление данным манипулятором осуществляется пьезоприводами, либо полимерметаллическими приводами. В обоих случаях их воздействия могут быть представлены посредством двух равных по величине и противоположных по направлению сил $F_{\mu 3}$ ($\mu = 1, 2, 3$), приложенных в точках $C_{\mu 3}(x_{\mu 3}, y_{\mu 3}, z_{\mu 3})$ и $C_{\mu 2}(x_{\mu 2}, y_{\mu 2}, z_{\mu 2})$ ($\mu = 1, 2, 3$) звеньев 3 и 2 полученных кинематических цепей.

С учётом сказанного можем для полученных цепей составить уравнения Лагранжа второго рода, которые сводятся к следующим дифференциальным уравнениям:

$$\sum_{j=1}^5 a_{\mu k}^j \ddot{q}_{\mu j} + \sum_{j=1}^5 \sum_{i=j}^5 a_{\mu k}^{ji} \dot{q}_{\mu j} \dot{q}_{\mu i} + C_{\mu k} q_{\mu k} + \sum_{j=1}^{12} a_{\mu k j} R_j + a_{\mu k} F_{\mu 3} + \bar{a}_{\mu k} = 0, \quad (1)$$

$$\mu = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5,$$

где

$$\begin{aligned} a_{\mu k}^j &= \sum_{l=\max(j,k)}^5 \text{tr}(B_{\mu l}^j H_{\mu l} B_{\mu l}^{kt}), & a_{\mu k}^{ji} &= \sigma_{ji} \sum_{l=\max(i,k,j)}^5 \text{tr}(B_{\mu l}^{ji} H_{\mu l} B_{\mu l}^{kt}), \\ &\mu = 1, 2, 3, & k &= 1, 2, 3, 4, 5; \\ a_{\mu k j} &= \delta_{\mu} \text{tr}(\lambda_{\mu k j} A_{\mu k}^t \theta^t B_{\mu k-1}^t), & \mu &= 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5; \\ \lambda_{\mu 5 j} &= \phi_{\mu 5 j}, \quad \lambda_{\mu k j} = \lambda_{\mu k+1 j} A_{\mu k+1}^t + \phi_{\mu k j}, & k &= 1, 2, 3, 4; \\ a_{\mu k} &= \delta_{\mu} \text{tr}(\lambda_{\mu k} (C_k) A_{\mu k}^t \theta^t B_{\mu k-1}^t), & \mu &= 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5; \\ \lambda_{\mu 5} (C_5) &= \phi_{\mu 5} (C_5), \quad \lambda_{\mu k} (C_k) = \lambda_{\mu k+1} (C_{k+1}) A_{\mu k+1}^t + \phi_{\mu k} (C_k), \\ & & k &= 1, 2, 3, 4; \\ \bar{a}_{\mu k} &= -\text{tr}(\lambda_{\mu k} A_{\mu k}^t \theta^t B_{\mu k-1}^t), & \mu &= 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5; \\ \lambda_{\mu 5} &= \phi_{\mu 5}, \quad \lambda_{\mu k} = \lambda_{\mu k+1} A_{\mu k+1}^t + \phi_{\mu k}, & k &= 1, 2, 3, 4; \\ \delta_{\mu} &= \begin{cases} -1 & \text{при } \mu = 1, \\ 1 & \text{при } \mu = 2, 3; \end{cases} & \sigma_{ji} &= \begin{cases} 1 & \text{при } j = i, \\ 2 & \text{при } j \neq i. \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

В формулах (1) и (2) приняты следующие обозначения: $A_{\mu k}$ – матрицы преобразования однородных координат; $H_{\mu l}$ – тензоры инерции звеньев манипулятора; $B_{\mu k}$ – матрицы положений звеньев манипулятора; θ – проектирующая матрица; $\phi_{\mu k j}$, $\phi_{\mu k} (C_k)$ и $\phi_{\mu k}$ – матрицы сил; R_j ($j=1, 2, \dots, 12$) – проекции сил реакций на оси основной системы координат охуyz: $R_1 = R_{21x}^1$, $R_2 = R_{31x}^1$, $R_3 = R_{21x}^2$, $R_4 = R_{31x}^2$, $R_5 = R_{21y}^1$, $R_6 = R_{31y}^1$, $R_7 = R_{21x}^2$, $R_8 = R_{31y}^2$, $R_9 = R_{21z}^1$, $R_{10} = R_{31z}^1$, $R_{11} = R_{21z}^2$, $R_{12} = R_{31z}^2$.

Эти матрицы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} A_{\mu k} &= \begin{pmatrix} \cos q_{\mu k} & -\sin q_{\mu k} \cos \alpha_{\mu k} & \sin q_{\mu k} \sin \alpha_{\mu k} & a_{\mu k} \cos q_{\mu k} \\ \sin q_{\mu k} & \cos q_{\mu k} \cos \alpha_{\mu k} & -\cos q_{\mu k} \sin \alpha_{\mu k} & a_{\mu k} \sin q_{\mu k} \\ 0 & \sin \alpha_{\mu k} & \cos \alpha_{\mu k} & S_{\mu k} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ &\mu = 1, 2, 3; \quad k = 1, 2, 3, 4, 5. \\ A_{\mu 0} &= \begin{pmatrix} 0 & -\cos \alpha_{\mu 0} & \sin \alpha_{\mu 0} & a_{\mu 0} \sin \alpha_{\mu 0} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \alpha_{\mu 0} & \cos \alpha_{\mu 0} & a_{\mu 0} \cos \alpha_{\mu 0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ A_{\mu 6} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\cos \alpha_{\mu 6} & 0 & \sin \alpha_{\mu 6} & 0 \\ \sin \alpha_{\mu 6} & 0 & \cos \alpha_{\mu 6} & -a_{\mu 6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\alpha_{\mu 1} = 90^\circ, \quad a_{\mu 1} = 0, \quad S_{\mu 1} = 0; \quad \alpha_{\mu 2} = \alpha_{\mu 3} = 0^\circ, \quad S_{\mu 2} = S_{\mu 3} = 0; \quad \alpha_{\mu 4} = -90^\circ, \\ a_{\mu 4} = 0, \quad S_{\mu 4} = 0; \quad \alpha_{\mu 5} = 0^\circ, \quad a_{\mu 5} = 0, \quad S_{\mu 5} = 0;$$

$$B_{\mu l} = \begin{pmatrix} b_{11}^{\mu l} & b_{12}^{\mu l} & b_{13}^{\mu l} & b_{14}^{\mu l} \\ b_{21}^{\mu l} & b_{22}^{\mu l} & b_{23}^{\mu l} & b_{24}^{\mu l} \\ b_{31}^{\mu l} & b_{32}^{\mu l} & b_{33}^{\mu l} & b_{34}^{\mu l} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{\mu 0} A_{\mu 1} A_{\mu 2} \dots A_{\mu l};$$

$$B_{\mu l}^j = \begin{pmatrix} b_{11}^{\mu l j} & b_{12}^{\mu l j} & b_{13}^{\mu l j} & b_{14}^{\mu l j} \\ b_{21}^{\mu l j} & b_{22}^{\mu l j} & b_{23}^{\mu l j} & b_{24}^{\mu l j} \\ b_{31}^{\mu l j} & b_{32}^{\mu l j} & b_{33}^{\mu l j} & b_{34}^{\mu l j} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{\mu 0} A_{\mu 1} \dots \theta A_{\mu j} \dots A_{\mu l}; \quad (4)$$

$$B_{\mu l}^{ji} = \begin{pmatrix} b_{11}^{\mu l} & b_{12}^{\mu l} & b_{13}^{\mu l} & b_{14}^{\mu l} \\ b_{21}^{\mu l} & b_{22}^{\mu l} & b_{23}^{\mu l} & b_{24}^{\mu l} \\ b_{31}^{\mu l} & b_{32}^{\mu l} & b_{33}^{\mu l} & b_{34}^{\mu l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{\mu 0} A_{\mu 1} \dots \theta A_{\mu j} \dots \theta A_{\mu i} \dots A_{\mu l};$$

$$\mu = 1, 2, 3; \quad l = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Инерционные свойства каждого звена, как твёрдого тела, определяются 4x4 – матрицами $H_{\mu l}$ ($\mu = 1, 2, 3; l = 1, 2, 3, 4, 5$). Эти матрицы являются симметричными и имеют следующую структуру:

$$H_{\mu l} = \begin{pmatrix} I_{xx}^{\mu l} & I_{xy}^{\mu l} & I_{xz}^{\mu l} & S_x^{\mu l} \\ I_{yx}^{\mu l} & I_{yy}^{\mu l} & I_{yz}^{\mu l} & S_y^{\mu l} \\ I_{zx}^{\mu l} & I_{zy}^{\mu l} & I_{zz}^{\mu l} & S_z^{\mu l} \\ S_x^{\mu l} & S_y^{\mu l} & S_z^{\mu l} & m^{\mu l} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Элементы матриц представляют собой три момента инерции относительно координатных плоскостей, три центробежных момента инерции, три статических момента, а также массу твёрдого тела. Поскольку все пары рассматриваемого манипулятора вращательные, то в данном случае проектирующая матрица θ имеет вид

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

$\Phi_{\mu k j}$, $\Phi_{\mu k}(C_k)$ и $\Phi_{\mu k}$ – матрицы 4x4, имеющие следующую структуру:

$$\Phi_{\mu kj} = \begin{pmatrix} e_{\mu kj}^{11} & e_{\mu kj}^{12} & e_{\mu kj}^{13} & e_{\mu kj}^{14} \\ e_{\mu kj}^{21} & e_{\mu kj}^{22} & e_{\mu kj}^{23} & e_{\mu kj}^{24} \\ e_{\mu kj}^{31} & e_{\mu kj}^{32} & e_{\mu kj}^{33} & e_{\mu kj}^{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_{\mu k}(C_k) = \begin{pmatrix} e_{\mu k C_k}^{11} & e_{\mu k C_k}^{12} & e_{\mu k C_k}^{13} & e_{\mu k C_k}^{14} \\ e_{\mu k C_k}^{21} & e_{\mu k C_k}^{22} & e_{\mu k C_k}^{23} & e_{\mu k C_k}^{24} \\ e_{\mu k C_k}^{31} & e_{\mu k C_k}^{32} & e_{\mu k C_k}^{33} & e_{\mu k C_k}^{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\Phi_{\mu k} = \begin{pmatrix} \sum_v F_{\mu kx}^v x_{\mu k}^v & \sum_v F_{\mu ky}^v y_{\mu k}^v & \sum_v F_{\mu kz}^v z_{\mu k}^v & \sum_v F_{\mu kx}^v \\ \sum_v F_{\mu ky}^v x_{\mu k}^v & \sum_v F_{\mu ky}^v y_{\mu k}^v & \sum_v F_{\mu ky}^v z_{\mu k}^v & \sum_v F_{\mu ky}^v \\ \sum_v F_{\mu kz}^v x_{\mu k}^v & \sum_v F_{\mu kz}^v y_{\mu k}^v & \sum_v F_{\mu kz}^v z_{\mu k}^v & \sum_v F_{\mu kz}^v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} e_{\mu kj}^{vl} &= 0 \quad (\mu = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, \dots, 12; v = 1, 2, 3; l = 1, 2, 3, 4); \\ e_{\mu kj}^{vl} &= 0 \quad (\mu = 2; k = 5; j = 2, 4, 6, 8, 10, 12; v = 1, 2, 3; l = 1, 2, 3, 4); \\ e_{\mu kj}^{vl} &= 0 \quad (\mu = 3; k = 5; j = 1, 3, 5, 7, 9, 11; v = 1, 2, 3; l = 1, 2, 3, 4); \\ e_{\mu kj}^{v1} &= 0; \quad e_{\mu kj}^{v2} = 0; \quad e_{\mu kj}^{v3} = -a_{\mu 6}; \quad e_{\mu kj}^{v4} = 1; \quad e_{\mu kj}^{\beta l} = 0 \\ &(\mu = 1, 2, 3; k = 5; j = 1, 2, 5, 6, 9, 10; \beta \neq v; l = 1, 2, 3, 4, \\ &v = 1 \text{ при } j = 1, 2; v = 2 \text{ при } j = 5, 6; v = 3 \text{ при } j = 9, 10); \\ e_{\mu kj}^{v1} &= 2\gamma_5; \quad e_{\mu kj}^{v2} = 2(-x_5 \cos \alpha_{\mu 6} + z_5 \sin \alpha_{\mu 6}); \\ e_{\mu kj}^{v3} &= 2(x_5 \sin \alpha_{\mu 6} + z_5 \cos \alpha_{\mu 6} - a_{\mu 6}); \quad a_{\mu kj}^{v4} = 0; \\ a_{\mu kj}^{\beta l} &= 0 \quad (\mu = 1, 2, 3; k = 5; j = 3, 4, 7, 8, 11, 12; \beta \neq v; l = 1, 2, 3, 4); \\ &v = 1 \text{ при } j = 3, 4; v = 2 \text{ при } j = 7, 8; v = 3 \text{ при } j = 11, 12); \\ e_{\mu k C_k}^{vl} &= 0 \quad (\mu = 1, 2, 3; k = 1, 4, 5; v = 1, 2, 3; l = 1, 2, 3, 4); \\ e_{\mu k C_k}^{v1} &= x_{\mu C_k} \cos \gamma_{\mu v}; \quad e_{\mu k C_k}^{v2} = y_{\mu C_k} \cos \gamma_{\mu v}; \quad e_{\mu k C_k}^{v3} = z_{\mu C_k} \cos \gamma_{\mu v}; \\ e_{\mu k C_k}^{v4} &= \cos \gamma_{\mu v} \quad (\mu = 1, 2, 3; k = 2, 3; v = 1, 2, 3); \\ \cos \gamma_{\mu 1} &= \frac{X_{\mu C_3} - X_{\mu C_2}}{l_{\mu C_2 C_3}}; \quad \cos \gamma_{\mu 2} = \frac{Y_{\mu C_3} - Y_{\mu C_2}}{l_{\mu C_2 C_3}}; \quad \cos \gamma_{\mu 3} = \frac{Z_{\mu C_3} - Z_{\mu C_2}}{l_{\mu C_2 C_3}}; \\ l_{\mu C_2 C_3} &= \sqrt{(X_{\mu C_3} - X_{\mu C_2})^2 + (Y_{\mu C_3} - Y_{\mu C_2})^2 + (Z_{\mu C_3} - Z_{\mu C_2})^2}, \\ (X_{\mu C_k}, Y_{\mu C_k}, Z_{\mu C_k}, 1)^t &= A_{\mu 0} A_{\mu 1} \dots A_{\mu k} (x_{\mu C_k}, y_{\mu C_k}, z_{\mu C_k}, 1)^t, \quad k = 2, 3, \end{aligned} \quad (8)$$

где $x_{\mu C_k}$, $y_{\mu C_k}$, $z_{\mu C_k}$ и $X_{\mu C_k}$, $Y_{\mu C_k}$, $Z_{\mu C_k}$ — координаты точек C_k ($k = 2, 3$) соответственно в подвижных и основной системах координат. В матрице $\Phi_{\mu k}$

через $F_{\mu kX}^v$, $F_{\mu kY}^v$ и $F_{\mu kZ}^v$ обозначены проекции заданных внешних сил на оси основной системы координат OXYZ, а через $x_{\mu k}^v$, $y_{\mu k}^v$ и $z_{\mu k}^v$ – координаты точек приложения сил $F_{\mu k}^v$ в подвижных системах координат, жёстко связанных со звеньями манипулятора.

Для того чтобы уравнения (1) моделировали динамику рассматриваемого манипулятора (рис. 1), необходимо к ним присоединить уравнения, восстанавливающие уничтоженные кинематические связи. Эти уравнения должны описать воссоединение трёх частей платформы 5, исключаяющее их относительные движения, что обеспечивает целостность платформы 5 при совместном функционировании трёх цепей ног (рис. 2), соединяющих платформу со стойкой. В математическом смысле эти требования приводят к равенству матриц положений, скоростей и ускорений отдельных частей платформы 5, откуда получаем следующие уравнения кинематических связей:

$$\begin{aligned} b_{v4}^{16}(q) - b_{v4}^{\mu 6}(q) &= 0, \quad v = 1, 2, 3; \mu = 2, 3; \\ b_{vl}^{16}(q) - b_{vl}^{\mu 6}(q) &= 0, \quad v = 1, 2; l = 1, 2; \mu = 2, 3 \text{ (если } v = 2, \text{ то } l \neq 2); \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^5 (b_{v4}^{16j}(q) \dot{q}_{1j} - b_{v4}^{\mu 6j}(q) \dot{q}_{\mu j}) &= 0, \quad v = 1, 2, 3; \mu = 2, 3; \\ \sum_{j=1}^5 (b_{v3}^{1j}(q) \dot{q}_{1j} - b_{v3}^{\mu j}(q) \dot{q}_{\mu j}) &= 0, \quad v = 1, 2, 3; \mu = 2, 3; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^5 (b_{v4}^{16j}(q) \ddot{q}_{1j} - b_{v4}^{\mu 6j}(q) \ddot{q}_{\mu j}) + \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \sigma_{ji} (b_{v4}^{16ji}(q) \dot{q}_{1j} \dot{q}_{1i} - \\ - b_{v4}^{\mu 6ji}(q) \dot{q}_{\mu j} \dot{q}_{\mu i}) &= 0, \quad v = 1, 2, 3; \mu = 2, 3; \\ \sum_{j=1}^5 (b_{v3}^{1j}(q) \ddot{q}_{1j} - b_{v3}^{\mu j}(q) \ddot{q}_{\mu j}) + \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 (b_{v3}^{1ji}(q) \dot{q}_{1j} \dot{q}_{1i} - \\ - b_{v3}^{\mu ji}(q) \dot{q}_{\mu j} \dot{q}_{\mu i}) &= 0, \quad v = 1, 2, 3; \mu = 2, 3. \end{aligned} \quad (11)$$

Для удобства в дальнейшем левые части уравнений (1) и (9)-(11) соответственно обозначим через $\varphi_{\mu j}(q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t), R(t), F(t), P)$ ($\mu = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4, 5$); $\varphi_j(q(t), P)$; $\dot{\varphi}_j(q(t), \dot{q}(t), P)$; $\ddot{\varphi}_j(q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t), P)$ ($j = 1, 2, \dots, 12$), где $q(t)$, $\dot{q}(t)$ и $\ddot{q}(t)$ – вектор-функции совокупности соответственно всех “лишних” и обобщённых координат, скоростей и ускорений; $R(t)$ – вектор-функция совокупности всех сил реакций связей; $F(t)$ – вектор-функция совокупности всех управляющих сил, а P – вектор всех постоянных параметров манипулятора.

Постановка задачи синтеза. Пусть на отрезке $[0; \tau]$ времени t заданы множество функций $\{f_0(q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t), R(t), F(t), P)\}$ и функция $f(t)$, которые соответственно характеризуют одинаковые фактические и требуемые свойства

манипулятора, причём семейство фактических функций $\{f_0\}$ формируется посредством решения уравнений (1)-(11) движения манипулятора. Тогда задача динамического синтеза манипулятора формулируется следующим образом: требуется найти такую функцию f_0^* семейства $\{f_0\}$, для которой расстояние от заданной функции $f(t)$ было бы минимальным, т.е. имело место соотношение

$$\rho = \|f_0^* - f(t)\| = \min_{\{f_0\}} \|f_0 - f(t)\|. \quad (12)$$

Методы решения поставленной задачи существенно зависят от способа задания нормы $\|f_0 - f(t)\|$, которая в различных функциональных пространствах определяется по-разному и приводит к различным задачам приближения функций. Например, в функциональном пространстве L_2 норма $\|f_0 - f(t)\|$ определяется по формуле

$$\rho = \|f_0 - f(t)\| = \int_0^\tau (f_0 - f(t))^2 dt, \quad (13)$$

а в пространстве непрерывных функций $C[a, b]$ – по формуле

$$\rho = \|f_0 - f(t)\| = \max_{t \in [0, \tau]} |f_0 - f(t)|. \quad (14)$$

В обоих случаях задача синтеза сводится к определению таких переменных вектор-функций $q^*(t)$, $\dot{q}^*(t)$, $\ddot{q}^*(t)$, $R^*(t)$, $F^*(t)$ и вектора P^* постоянных параметров, которые, удовлетворяя уравнениям (1)-(11) движения манипулятора, минимизируют функционалы качества (13) или (14), т.е. удовлетворяют условиям

$$\int_0^\tau (f_0^* - f(t))^2 dt = \min_{\{f_0\}} \int_0^\tau (f_0 - f(t))^2 dt \quad (15)$$

или

$$\max_{t \in [0, \tau]} |f_0^* - f(t)| = \min_{\{f_0\}} \max_{t \in [0, \tau]} |f_0 - f(t)|. \quad (16)$$

В первом случае задача сводится к вычислению среднеквадратического приближения функций, а во втором случае – чебышевского.

В общем случае искомые переменные и постоянные параметры $q(t)$, $\dot{q}(t)$, $\ddot{q}(t)$, $R(t)$, $F(t)$ и P не могут принимать произвольных значений. Поэтому на области их изменения накладываются ограничения в виде неравенств

$$G_j(q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t), R(t), F(t), P) \leq 0; \quad t \in [0, \tau]; \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (17)$$

которые необходимо учитывать при решении задач (15) и (16).

Для компьютеризации вычислений поставленные выше задачи должны быть дискретизированы. Для этого значения компонентов искомых вектор-функций $q(t)$, $\dot{q}(t)$, $\ddot{q}(t)$, $R(t)$ и $F(t)$ рассматривают лишь в конечном числе точек $t_r (r=1, 2, \dots, N)$ временного промежутка $[0; \tau]$. В этом случае соотношения (15), (16) принимают вид

$$\sum_{r=1}^N (f_{0r}^* - f(t_r))^2 = \min_{\{f_{0r}\}} \sum_{r=1}^N (f_{0r} - f(t_r))^2 \quad (18)$$

или

$$\max_{r \in [1, N]} |f_{0r}^* - f(t_r)| = \min_{\{f_{0r}\}} \max_{r \in [1, N]} |f_{0r} - f(t_r)|, \quad (19)$$

а ограничения (1)-(11) и (17) принимают вид

$$\varphi_{\mu jr}(q(t_r), \dot{q}(t_r), \ddot{q}(t_r), R(t_r), F(t_r), P) = 0, \mu = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, 5; r = 1, 2, \dots, N; \quad (20)$$

$$\varphi_{jr}(q(t_r), P) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 12; \quad r = 1, 2, \dots, N; \quad (21)$$

$$\dot{\varphi}_{jr}(q(t_r), \dot{q}(t_r), P) = 0; \quad j = 1, 2, \dots, 12; \quad r = 1, 2, \dots, N; \quad (22)$$

$$\ddot{\varphi}_{jr}(q(t_r), \dot{q}(t_r), \ddot{q}(t_r), P) = 0; \quad j = 1, 2, \dots, 12; \quad r = 1, 2, \dots, N; \quad (23)$$

$$G_j(q(t_r), \dot{q}(t_r), \ddot{q}(t_r), R(t_r), F(t_r), P) \leq 0; \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad r = 1, 2, \dots, N. \quad (24)$$

При такой дискретизации решение поставленных выше задач сводится к определению таких дискретных значений компонентов вектор-функций $q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t), R(t), F(t)$ и вектора постоянных параметров P , которые удовлетворяют условиям (18)-(24). Известны различные численные методы решения этих задач. Однако в рассматриваемом случае из-за большого количества искомых параметров их использование малоэффективно и приводит к громоздким и трудоёмким вычислениям. В этой связи ниже предлагается унифицированный упрощённый алгоритм, который одинаково приемлем при решении обеих задач (18) и (19). Он, по существу, является прямым методом минимизации функционалов, позволяющим значительно сократить количество искомых параметров и избавиться от трудоёмких вычислительных процедур определения градиентов сложных функций и численного интегрирования нелинейных уравнений движения манипулятора.

Алгоритм решения задачи синтеза. Для достижения поставленной выше цели все искомые переменные параметры ищем в виде полиномов

$$\begin{aligned} q_{\mu i} &= P_{\mu i0} + P_{\mu i1}t + P_{\mu i2}t^2 + P_{\mu i3}t^3 + \dots + P_{\mu in}t^n; \\ \dot{q}_{\mu i} &= P_{\mu i1} + 2P_{\mu i2}t + 3P_{\mu i3}t^2 + \dots + nP_{\mu in}t^{n-1}; \\ \ddot{q}_{\mu i} &= 2P_{\mu i2} + 6P_{\mu i3}t + \dots + n(n-1)P_{\mu in}t^{n-2}, \quad \mu = 1, 2, 3; \quad i = 1, 2, \dots, 5; \\ R_j &= P_{j0} + P_{j1}t + \dots + P_{jn}t^n, \quad j = 1, 2, \dots, 12; \\ F_{\mu 3} &= P_{\mu 30} + P_{\mu 31}t + \dots + P_{\mu 3n}t^n, \quad \mu = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (25)$$

На временном отрезке $[0; \tau]$ строим равномерно распределённую сетку $t_r = \Delta t \cdot r$, $\Delta t = \tau/N$; $r = 0, 1, 2, \dots, N$ и во всех узловых точках t_r ($r = 0, 1, 2, \dots, n$) по формулам (25) определяем дискретные значения $q_{\mu i}^r$, $\dot{q}_{\mu i}^r$, $\ddot{q}_{\mu i}^r$, R_j^r и $F_{\mu 3}^r$ ($r = 0, 1, 2, \dots, N$) искомых переменных параметров, выражая их через коэффициенты полиномов (25). Подставляя эти значения в уравнения (20)-(24), с их помощью строим новые целевые функции динамического синтеза, включая их в состав аппроксимирующих функций:

$$\rho(P) = \sum_{r=0}^N (f_{0r}(P) - f(t_r))^2 + \sum_{\mu=1}^3 \sum_{j=1}^5 \sum_{r=0}^N \varphi_{\mu jr}^2(P) + \sum_{j=1}^{12} \sum_{r=0}^N \varphi_{jr}^2(P) + \sum_{j=1}^{12} \sum_{r=0}^N \dot{\varphi}_{jr}^2(P) + \sum_{j=1}^{12} \sum_{r=0}^N \ddot{\varphi}_{jr}^2(P) \quad (26)$$

или

$$\rho(P) = \max\{ \max_{i \in [0, N]} |f_{0r}(P) - f(t_r)|; \max_{\mu \in [1, 3]} \max_{j \in [1, 5]} \max_{r \in [0, N]} |\varphi_{\mu jr}(P)|; \max_{j \in [1, 12]} \max_{r \in [0, N]} |\varphi_{jr}(P)|; \max_{j \in [1, 12]} \max_{r \in [0, N]} |\dot{\varphi}_{jr}(P)|; \max_{j \in [1, 12]} \max_{r \in [0, N]} |\ddot{\varphi}_{jr}(P)| \}. \quad (27)$$

Подставив указанные выше дискретные значения в (17), ограничения G_j также выражаем через P :

$$G_j(P) \leq 0; j = 1, 2, \dots, m; r = 0, 1, \dots, N, \quad (28)$$

где через $P = (P_1, P_2, \dots, P_k)$ обозначен вектор искомых постоянных параметров, компоненты которого получаются объединением всех коэффициентов полиномов (25) и постоянных параметров манипулятора.

Нетрудно заметить, что в этом случае задача синтеза сводится к определению такого вектора P^* , который доставляет минимум функций (26) или (27), удовлетворяя ограничениям (28).

Поставленная задача решается по следующему алгоритму:

1. В k -мерном пространстве искомых параметров выбираем произвольную начальную точку $P^0 = (P_1^0, P_2^0, \dots, P_k^0)$ и вокруг этой точки строим гиперкуб со стороной 2δ .
2. С помощью датчика случайных чисел в построенном гиперкубе вырабатываем N_1 равномерно распределённых точек $P^v = (P_1^v, P_2^v, \dots, P_k^v)$, ($v = 1, 2, \dots, N_1$).
3. Для каждой точки P^v ($v \in [1; N_1]$) по формулам (25) определяем значения $q_{\mu i}^r$, $\dot{q}_{\mu i}^r$, $\ddot{q}_{\mu i}^r$, $R_{\mu j l}^{kr}$ и $F_{\mu 3 l}^r$ искомых переменных параметров во всех узловых точках tr . Проверяем ограничения (28) и из точек P^v выбираем те, для которых они выполняются.
4. Для допустимых точек P^v с учетом (2)-(8) определяем значение $\rho(P^v)$ целевой функции (26) или (27) и среди них выбираем ту точку P^{v*} , для которой

$$\rho(P^{v*}) = \min_{\{v\}} \rho(P^v).$$

5. Проверяем условие $\rho(P^{v*}) \leq \rho(P^0)$, где $\rho(P^0)$ – значение целевой функции в точке P^0 . Если оно выполняется, то точку P^0 заменяем точкой P^{v*} , и переходим к пункту 1 алгоритма. В противном случае, размеры построенного выше гиперкуба уменьшаем в два раза, после чего переходим к пункту 2 алгоритма. Вычислительный процесс прекращается, когда выполняется условие $\delta \leq \varepsilon$, где ε – заданная точность вычислений.

Остаётся открытым вопрос о разумном выборе количества чисел n в полиномах (25) и узловых точек t_r на временном отрезке $[0; \tau]$. Для этого рекомендуется в качестве критерия выбрать точность выполнения условий (20)-(24). Поэтому после решения задачи для выбранных n и N проверяем эти условия. Если точность их выполнения находится в допустимых пределах, то считаем задачу решённой. В противном случае, выбираем новые значения n и N и вновь решаем задачу. При этом для увеличения точности, как следует из теоремы Вейерштрасса, необходимо увеличить n и N .

Заключение. Составлена динамическая модель параллельного микроманипулятора с упругими шарнирами и на её базе сформулированы и решены аппроксимационные задачи его динамического синтеза. Поиск искомых переменных параметров в виде степенных полиномов и включение уравнений движения манипулятора в состав аппроксимирующих функций позволяют значительно уменьшить количество искомых параметров и унифицировать методы решения полученных среднеквадратических и чебышевских приближений функций. Ограничение на объём текста статьи не позволило представить результаты вычислений по конкретным приложениям разработанных алгоритмов. Анализ численных результатов будет представлен в последующих публикациях авторов.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № 13-2-D181.

Литература

1. ՀՀ գյուղի արտոնագիր AM 20130025: Հուշահեռ միկրոմանիպուլատոր / Մ. Հարությունյան, Մ. Մկրտչյան, Ս. Սարգսյան, Լ. Հաջարյան: – Երևան, 2013:
2. Мкртчян М.Г., Верлинский С.В., Арутюнян М.Г. Исследование кинематических и жёсткостных характеристик параллельного манипулятора с упругими шарнирами // Сборник трудов XX Международной научно-технической конференции. – Севастополь, 2013. – С. 185-188.
3. Мкртчян М.Г., Степанян К.Г., Арутюнян М.Г., Саркисян Ю.Л. К динамическому моделированию параллельного манипулятора с упругими шарнирами // Сборник трудов XX Международной научно-технической конференции. – Севастополь, 2013. – С. 181-184.
4. Хог Э., Арора Я. Прикладное оптимальное проектирование. – М.: Мир, 1983. – 479 с.
5. Степанян К.Г., Арзуманян К.С., Джзмаян А.Ю., Оганджян А.Ж. Динамический синтез манипуляционных роботов // Вестник Инженерной академии Армении. – 2004. – Т.1, №2. – С. 226-229.

6. Даниелян А.Л., Степанян К.Г., Арутюнян М.Г., Саркисян Ю.Л. Оптимальное управление с подвижными концами робототехнических устройств конечности человека // Вестник ГИУА (Политехник). Серия “Механика, машиноведение, машиностроение”. – Ереван, 2012. – Вып. 15, №1. – С. 34-41.
7. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближённые методы высшего анализа. – М.: Гос. изд-во физ-мат. лит-ры, 1962. – 708 с.
8. Бухгольц Н.Н. Основы курса теоретической механики. Часть 2. – М.: Наука, 1966. – 332 с.

*Поступила в редакцию 04.05.2015.
Принята к опубликованию 26.05.2015.*

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՀՈՂԱԿԱՊԵՐՈՎ ԶՈՒԳԱՇԵՌ ՄԱՆԻՊՈՒԼՅԱՏՈՐՆԵՐԻ ՄՈՏԱՐԿՈՒՄԱՅԻՆ ԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ՍԻՆԹԵԶ

Մ.Հ. Մկրտչյան, Կ.Գ. Ստեփանյան, Մ.Գ. Հարությունյան, Յու.Լ. Սարգսյան

Դիտարկված են առաձգական հողակապերով զուգահեռ միկրոմանիպուլյատորների դինամիկական մոդելավորման և մոտարկումային դինամիկական սինթեզի խնդիրները, որոնցում մոտարկող ֆունկցիաները ձևավորվում են մանիպուլյատորի շարժման դիֆերենցիալ և հանրահաշվական հավասարումների խառը համակարգերի լուծումների միջոցով: Ցույց է տրվում, որ որոնելի փոփոխական պարամետրերը բազմանդամների տեսքով փնտրելու դեպքում շարժման հավասարումները կարելի է ընդգրկել մոտարկող ֆունկցիաների կազմում, ինչն էապես պարզեցնում և ընդհանրացնում է սինթեզի տարաբնույթ խնդիրների լուծման ալգորիթմները:

Առանցքային բառեր. զուգահեռ մանիպուլյատորներ, դինամիկական սինթեզ, ֆունկցիաների մոտարկում, միջին քառակուսային մոտարկում, չեբիշևյան մոտարկում:

APPROXIMATION-BASED DYNAMIC SYNTHESIS OF PARALLEL MANIPULATORS WITH ELASTIC JOINTS

M.H. Mkrtchyan, K.G. Stepanyan, M.G. Harutyunyan, Y.L. Sarkissyan

Approximation problems of dynamic synthesis of parallel manipulators with elastic joints are considered where the family of approximating functions is formed through the solution of mixed systems of differential and algebraic motion equations of manipulators. It is shown that at the search of variable parameters in the polynomial form, the motion equations can be included in approximating functions significantly to simplifying and unifying the algorithms for the solution of various synthesis problems.

Keywords: parallel manipulators, dynamic synthesis, approximation of functions, mean square approximation, Chebishev approximation.