

ПРОЕКТИРОВАНИЕ СЖАТОЙ СТУПЕНЧАТОЙ ПЛАСТИНКИ МИНИМАЛЬНОГО ВЕСА

Т.К. Григорян

Национальный политехнический университет Армении

В настоящее время отрасли авиационной, самолетостроения, машиностроения, строительства и многие другие нуждаются в проектировании таких конструкций, которые при заданных прочностных, жесткостных и других характеристиках позволяют получать по возможности большую экономию материала. Рассматривается изотропная прямоугольная пластинка кусочно-постоянной толщины, шарнирно опертая по двум противоположным продольным сторонам и свободная, свободно опертая или заделанная по торцевым краям. Исследуются собственные колебания пластинки при действии сжимающих сил, равномерно распределенных по продольным краям пластинки. При заданных значениях сжимающей нагрузки и низшей частоты колебаний определяются оптимальные геометрические параметры конструкции, обеспечивающие минимальное значение веса конструкции.

Ключевые слова: оптимизация, изотропный материал, колебания, пластинка.

Введение. Оптимальное проектирование тонкостенных элементов конструкций является одним из ведущих направлений механики твердого деформируемого тела. При их проектировании важной проблемой является увеличение прочностных и жесткостных характеристик конструкции с обеспечением максимальной экономии материала. Одним из способов достижения этой цели является оптимальное распределение материала конструкции по ее объему.

Постановка задачи. Рассматриваются свободные колебания прямоугольной пластинки кусочно-постоянной толщины размерами $2L \times b$, шарнирно опертой по сторонам $y = 0$, $y = b$ и свободной, свободно опертой или заделанной по краям $x = \pm L$, при действии сжимающей нагрузки σ , равномерно распределенной по краям $y = 0$ и $y = b$.

Предполагается, что пластинка изготовлена из изотропного материала, причем на участке $-a \leq x \leq a$ она имеет толщину h_2 , а на участках $-L \leq x \leq -a$ и $a \leq x \leq L$ - толщину h_1 (см. рис.).

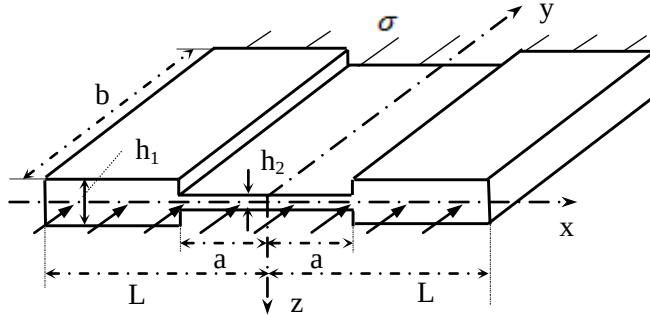


Рис. Расчетная схема пластинки

Ставится задача определения оптимальных геометрических параметров конструкции a , h_1 , h_2 , обеспечивающих при заданных габаритных размерах $\xi = 2L/b$, значениях нагрузки σ и частоте колебаний Ω минимальный вес (объем) конструкции $V = [2ah_2 + 2(L-a)h_1]b$.

Решение задачи. Задачи оптимального проектирования пластинки кусочно-постоянной толщины при поперечных колебаниях изучались в работах [1, 2].

Рассматриваемая задача нагруженных колебаний пластинки решается для каждой из областей пластинки ($p=1,2$), соответствующих толщинам h_1 и h_2 , с удовлетворением условий сопряжения на линии их раздела. При этом ввиду симметрии рассматривается половина пластинки ($x \geq 0$) с исследованием случаев симметричной и антисимметричной форм колебаний.

Уравнения собственных колебаний пластинки, нагруженной сжимающей нагрузкой, записываются в виде

$$D^{(p)} \Delta^2 w_p + \sigma h_p \frac{\partial^2 w_p}{\partial y^2} + \rho h_p \frac{\partial^2 w_p}{\partial t^2} = 0 \quad (p=1,2), \quad (1)$$

где w_p – прогибы; $D^{(p)} = \frac{E h_p^3}{12(1-\nu^2)}$ – жесткости составляющих участков пластинки ($p=1,2$); ρ , E , ν – плотность и упругие характеристики материала пластинки; t – время.

Граничные условия задачи имеют вид:

- шарнирного опирания:

$$w_p = 0, \quad \frac{\partial^2 w_p}{\partial y^2} = 0 \quad (p=1,2) \quad \text{при } y=0, y=b; \quad (2)$$

- симметрии (в случае симметричной формы колебаний):

$$\frac{\partial w_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} = 0 \quad \text{при } x = 0; \quad (3)$$

- асимметрии (в случае асимметричной формы колебаний):

$$w_2 = 0, \quad \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0; \quad (4)$$

- свободного края (в случае, когда край $x = L$ свободен):

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w_1}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad \text{при } x = L; \quad (5)$$

- свободного опирания (в случае, когда край $x = L$ свободно оперт):

$$w_1 = 0, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = L; \quad (6)$$

- жесткой заделки (в случае жесткой заделки края $x = L$):

$$w_1 = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = L, \quad (7)$$

- сопряжения на линии $x = a$:

$$\begin{aligned} w_1 &= w_2, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial x}; \\ D^{(1)} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right) &= D^{(2)} \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} \right), \\ D^{(1)} \left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w_1}{\partial x \partial y^2} \right) &= D^{(2)} \left(\frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w_2}{\partial x \partial y^2} \right) \quad \text{при } x = a. \end{aligned} \quad (8)$$

Решения уравнений (1), удовлетворяющие условиям (2), принимаются в виде

$$w_p = \left(C_{1m}^{(p)} ch \mu_{1m}^{(p)} \lambda_m x + C_{2m}^{(p)} sh \mu_{1m}^{(p)} \lambda_m x + \right. \\ \left. + C_{3m}^{(p)} \cos \mu_{2m}^{(p)} \lambda_m x + C_{4m}^{(p)} \sin \mu_{2m}^{(p)} \lambda_m x \right) \sin \lambda_m y \sin \Omega_m t, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \mu_{1m}^{(p)} &= \sqrt{1 + k_{pm}}, \quad \mu_{2m}^{(p)} = \sqrt{1 - k_{pm}}, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{b}, \\ k_{1m}^2 &= k_{2m}^2 \frac{h_2^2}{h_1^2}, \quad k_{2m}^2 = \frac{h_2^2}{D^{(2)} \lambda_m^2} \left(\sigma + \frac{\rho}{\lambda_m^2} \Omega_m^2 \right), \end{aligned}$$

Ω_m – частота собственных колебаний пластинки; m – число полуволн по оси y .

В случае свободного края $x = L$ пластинки удовлетворение граничных условий (3), (5) и (8), соответствующих симметричной форме колебаний, приводит к однородной системе линейных уравнений относительно

коэффициентов $C_{im}^{(p)}$ ($i = 1, 2, 3, 4, p = 1, 2$). Удовлетворение граничных условий (4), (5) и (8) приводит к аналогичной системе для асимметричной формы. Из условий существования нетривиального решения этих систем для каждой из форм получаются трансцендентные уравнения относительно коэффициента $k_{2m}(m, a, h_p)$. Определение оптимальных параметров a, h_1, h_2 , обеспечивающих минимальное значение веса конструкции, при заданных значениях размеров $\xi = 2L/b$, усилий σ и низшей частоты колебаний Ω сводится к следующей задаче нелинейного программирования:

Найти:

$$\min_x [2ah_2 + 2(L-a)h_1]b, \quad \bar{x} = \{a, h_1, h_2\} \quad (10)$$

при ограничениях:

$$\xi = \xi^*, \quad \sigma = \sigma^*, \quad \min_x \Omega_m = \Omega^*, \quad (11)$$

$$0,01\delta_1 \leq h_1 \leq 0,2\delta_1, \quad 0,01\delta_2 \leq h_2 \leq 0,2\delta_2. \quad (12)$$

Ограничения (12) обусловлены пределами применимости классической теории пластин. Здесь принимается: $\delta_1 = L - a$ при $L - a \leq b$; $\delta_1 = b$ при $L - a \geq b$; $\delta_2 = 2a$ при $2a \leq b$; $\delta_2 = b$ при $2a \geq b$.

При заданном значении сжимающих усилий σ путем подстановки в полученные уравнения выражений (10) получаем трансцендентные уравнения относительно $\Omega_m(m, a, h_p)$, откуда определяется низшая частота собственных колебаний $\min_x \Omega_m(m, a, h_p)$.

Аналогично, удовлетворяя граничным условиям (3), (6), (8) и (4), (6), (8), а также (3), (7), (8) и (4), (7), (8), определяются частоты для случаев свободно опертого и заделанного краев пластинки.

Задача решается методом Нелдера-Мида [3, 4] в сочетании с методом прямого поиска. Численные расчеты произведены для случаев свободного, шарнирно опертого и заделанного краев $x = L$ пластинки при $\xi^* = 1$ для различных значений $\bar{\Omega}^* = \Omega^* \sqrt{\rho b^2 / E} = 0,1; 0,15; 0,2$, $\bar{\sigma}^* = \sigma^* / E = (0,1; 0,25; 0,5) \cdot 10^{-3}$.

Для случая свободного края $x = L$ пластинки оптимальные значения параметров $\bar{a} = a/2L$, $\bar{h}_1 = h_1/b$, $\bar{h}_2 = h_2/b$, а также соответствующие значения наименьших объемов $\bar{V} = V/2Lb^2 = 2\bar{a}\bar{h}_2 + 2(0,5 - \bar{a})\bar{h}_1$ приведены в таблице.

Там же, для сравнения, приведены соответствующие значения объемов $\bar{V}_0$ пластинки постоянного сечения.

Таблица

Оптимальные параметры и соответствующие значения наименьших
объемов пластинки

$\bar{\Omega}^*$	$\bar{\sigma}^* \cdot 10^{-3}$	$\bar{a}$	$\bar{h}_1$	$\bar{h}_2$	$\bar{V}$	$\bar{V}_0$
0,1	0,1	0,250	0,01	0,0251	0,0175	0,0351
	0,25	0,259	0,01	0,0262	0,0184	0,0374
	0,5	0,261	0,01	0,0286	0,0197	0,0409
0,15	0,1	0,288	0,01	0,0337	0,0236	0,0513
	0,25	0,292	0,01	0,0344	0,0242	0,0529
	0,5	0,296	0,01	0,0357	0,0252	0,0555
0,2	0,1	0,315	0,01	0,0417	0,0299	0,0678
	0,25	0,315	0,01	0,0425	0,0305	0,0690
	0,5	0,319	0,01	0,0433	0,0312	0,0709

В случае свободно опертого края $x = L$ пластинки при $\bar{\sigma}^* = 0,5 \cdot 10^{-3}$ и $\bar{\Omega}^* = 0,2$ оптимальный проект получается при значениях $\bar{a} = 0,24$, $\bar{h}_1 = 0,0433$, $\bar{h}_2 = 0,01$, $\bar{V} = 0,0274$, $\bar{V}_0 = 0,0337$.

В случае заделанного края $x = L$ пластинки при $\bar{\sigma}^* = 0,5 \cdot 10^{-3}$ и $\bar{\Omega}^* = 0,2$ оптимальный проект получается при значениях $\bar{a} = 0,237$, $\bar{h}_1 = 0,027$, $\bar{h}_2 = 0,01$, $\bar{V} = 0,01897$, $\bar{V}_0 = 0,0241$.

Выводы. Как следует из расчетов, изготовление пластинки кусочно-постоянной толщины приводит к существенному уменьшению ее веса по сравнению с пластинкой постоянной толщины. При этом в случае свободного края пластинки оптимальным является проект, где в средней части пластинка имеет меньшую толщину, чем по краям ($\bar{h}_1 > \bar{h}_2$), а в случаях свободно опертого и заделанного краев толщина пластинки получается больше в ее средней части ($\bar{h}_1 < \bar{h}_2$).

Литература

1. Аветисян Г.Р. Оптимизация изотропной прямоугольной пластинки кусочно-постоянной толщины при нагруженных колебаниях // Вестник Инженерной академии наук Армении. – 2013. – Т.10, №1. – С. 113-117.
2. Аветисян Г.Р., Косян Н.А., Погосян А.Г. Оптимизация по устойчивости прямоугольной пластинки кусочно-постоянной толщины // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред: Сборник научных трудов. – Саратов, 2010. – С. 86-91.
3. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975. – 532 с.

4. **Погосян А.Г.** Применение метода деформируемого многогранника к решению задачи оптимальной сжатой пластинки, усиленной по краям ребрами жесткости, при заданном значении первой частоты собственных колебаний // Механика. – 1998. – Т.51, № 3. – С. 28-33.

*Поступила в редакцию 16.02.2015.
Принята к опубликованию 26.05.2015.*

ՄԵՂՄՎԱԾ ԱՍՏԻՃԱՆԱԶԵՎ ՄԱԼԻ ՆԱԽԱԳԾՈՒՄԸ ԸՍՏ ՆՎԱԶԱԳՈՒՑՆ ՔԱՇԻ

Տ.Կ. Գրիգորյան

Ներկայումս ավիացիան, օդանավաշինությունը, մեքենաշինությունը, շինարարությունը և տնտեսության մի շարք բնագավառներ կարիք ունեն այնպիսի կոնստրուկցիաների նախագծերի, որոնք տրված կոշտության, ամրության և այլ բնութագրերի դեպքում հնարավորին չափով թույլ են տալիս ստանալ նյութի մեծ խնայողություն: Դիտարկվում է իզոտրոպ նյութից պատրաստված կտոր առ կտոր հաստատուն հաստությամբ ուղղանկյուն սալ, երբ այն ազատ հենված է երկու հանդիպակաց կողմերով, իսկ ճակատային կողմերն ազատ են, հողակապով կամ կոշտ ամրացված: Սեղմող ուժի և սեփական տատանումների ստորին հաճախության տրված արժեքների դեպքում որոշվում են սալի երկրաչափական պարամետրերի օպտիմալ արժեքները, որոնք ապահովում են նրա նվազագույն քաշը:

Առանցքային բառեր. լավարկում, իզոտրոպ նյութ, տատանումներ, սալ:

DESIGN OF COMPRESSED STEP PLATE WITH MINIMUM WEIGHT

T.K. Grigoryan

At present, aeronautics, aircraft engineering, mechanical engineering construction and many other spheres require such structures which at the given strength, hardness and other characteristics allow to maximally economize on materials. The problem of natural oscillation of the piecewise constant thickness rectangular plate prepared from the isotropic material, hinge supported on two opposite longitudinal sides and free, hinge or clamped supported on the end edges under the action of compressive forces uniformly distributed along the longitudinal edges of the plate is examined. The optimum values of the geometric parameters of the plate which minimize the weight construction for the given values of the compressive load and the lowest frequency of the natural oscillation are determined.

Keywords: optimization, isotropic material, oscillation, plate.