ВЕСТНИК НПУА. МЕХАНИКА, МАШИНОВЕДЕНИЕ, МАШИНОСТРОЕНИЕ. 2015. №1
УДК 539.1

МЕХАНИКА

ИССЛЕДОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ ПРИ ПРОНИКАНИИ ТЕЛ В СРЕДЫ

А.Г. Аракелян[1], А.А. Ванцян[2]

[1]*ЗАО "Акустический научный центр" МЗ РА*
[2] *Институт механики НАН РА*

Проведено исследование стохастических пространственных процессов механики разрушения при проникании тел в среды. Рассмотрены различные феноменологические модели с применением методов нелинейной волновой динамики в сочетании с современными методами изучения стохастических процессов в задачах фазовых переходов от движения пор на микро-мезоуровне к магистральным разломам. Для известной модели Гарсона–Твергарда–Нидельмана, описывающей динамику микропор, в уравнение для скорости изменения пористости вместо гауссова распределения для плотности вероятности вводится его нелинейное обобщение, которое нетрудно рассчитать для разных значений коэффициента нелинейности. Рассматривается задача проникания тонких заостренных тел в полупространство с учетом наличия пористости на основе двухкомпонентной нелинейной среды Био.

***Ключевые слова*:** нелинейная волновая динамика, стохастические пространственные процессы, фазовые переходы, микро-, мезо-, макропроцессы разрушения, проникание.

Введение. На основе современных исследований процессов механики разрушения, где показывается универсальность характера этих процессов в отношении различных материалов и нагрузок, проводится аналогия между: 1) процессом неустойчивости Ганна в полупроводниках, описанным одним нелинейным диффузионным уравнением для электрического поля с учетом релаксационных членов, дополненным дельта-флуктуациями, при наличии экспериментальной зависимости скорости электронов от напряженности электрического поля, решенной Хакеном и Накамурой методом разложения на плоские волны и определением эффективных формул для конечного стационарного устойчивого состояния после фазового перехода; 2) процессом движения транспорта на насыщенных линиях, изученным Лайтхиллом и Уиземом с применением простого метода кинематических волн, где газодинамическое уравнение сохранения плотности машин дополняется качественно так же, как в работах крупных физиков по изучению задачи движения транспорта, вплоть до фазового перехода и образования заторов, с добавлением к этому нелинейному волновому уравнению диффузии, релаксации и флуктуации в полном соответствии с уравнением для полупроводников. Все указанные решения дополнены изучением исходных нестационарных пространственных уравнений, где стационарное решение есть уже функция координаты.

1. ***Исследование различных вариантов разрушения среды в задаче проникания тонких тел в первоначально упругую среду.*** Вопросы проникания твердых инденторов в различные деформируемые среды представляют большой теоретический и практический интерес. С ними связаны задачи защиты элементов летательных аппаратов и наземных конструкций от соударения с высокоскоростными ударниками (проникающими телами) с выяснением вероятности их пробития (внедрение, проникание), разрушения и нарушения нормального функционирования [1]; многие практические задачи защиты брони [2], в том числе для ракет с твердым наполнителем и самолетов; важные задачи биологии и медицины.

Исследуем процесс проникания тонких заостренных тел в первоначально упругое полупространство с учетом наличия фронта разрушения среды около тела [2]. С этой целью учитывается разрушение среды при наличии пористости, а именно - твердого нелинейно-пластического каркаса и большого количества микропор с жидкостью в них.

В [3] рассмотрена задача разрушения на основе двухкомпонентной нелинейной среды Био. Здесь, следуя методу плоских сечений [2, 4, 5] вблизи тела и для пористой среды, мы оставляем в уравнениях только производные по радиальной координате r, отбрасывая малые производные по осевой координате x и времени t. Тогда, как и в [6, 7], можно ввести средние плотности для каркаса $\rho_1\left(1-f\right)$ и жидкости в порах $\rho_2 f$, где f - пористость, затем записать для них отдельные уравнения неразрывности и получить уравнение

$$\frac{\partial}{\partial r} r\left\{\left(1-f\right)\mathrm{v}_r + f\,\dot{\mathrm{v}}\right\} = 0, \tag{1.1}$$

где v_r, $\dot{\mathrm{v}}$ – радиальные компоненты частицы для каркаса и жидкости:

$$\mathrm{v}_r = \frac{du_r}{dt} = \frac{\partial u_r}{\partial t} + \mathrm{v}_r \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \dot{\mathrm{v}} = \frac{d\,\mathrm{v}}{dt} = \frac{\partial\,\mathrm{v}}{\partial t} + \dot{\mathrm{v}}\frac{\partial\,\mathrm{v}}{\partial r}, \tag{1.2}$$

u_r, v – радиальные перемещения каркаса и жидкости.

Решение (1.1), удовлетворяющее граничному условию на теле $r = r_k\left(x,t\right)$, $V = \dfrac{\partial r_k}{\partial t}$, $V = \left(1-f\right)\mathrm{v}_r + f\,\dot{\mathrm{v}}$, как и для однокомпонентной пластической среды [8], имеет вид

$$V = \frac{r_k}{r}\frac{\partial r_k}{\partial t}. \tag{1.3}$$

Полагая $V = \dfrac{dU_r}{dt}$, где V и U_r – средняя скорость и перемещения частицы среды, из (1.3) для перемещения U_r получим $U_r\left(r,x,t\right) = r - F\left(r^2 - r_k^2\right)$, где F – произвольная функция, в частности [2],

$$U_r\left(r,x,t\right) = r - \sqrt{r^2 - r_k^2}. \tag{1.4}$$

Как и в [9], запишем уравнение для кинетики процесса зарождения и роста пор:

$$\frac{df}{dt} = \frac{df_{gr}}{dt} + \frac{dfnucl}{dt}, \tag{1.5}$$

где f_{gr} характеризует дальнейший рост пористости;

$$\frac{df_{gr}}{dt} = \left(1-f\right)\dot{\varepsilon}_{kk}. \tag{1.6}$$

Для частного случая отсутствия жидкости в порах $\dot{\mathrm{v}}=0$ получим

$$\frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial r} + \frac{\mathrm{v}_r}{r} = \frac{\mathrm{v}_r}{1-f}\frac{\partial f}{\partial r}. \tag{1.7}$$

Поскольку для рассмотренной асимптотики вблизи тела в квазиодномерной задаче по r $\dot{\varepsilon_x} = 0$, $\dot{\varepsilon}_{kk} = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r}$, то для интенсивности скоростей деформаций $\dot{\bar{\varepsilon}}$ получим

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3}\left\{\left(\dot{\varepsilon}_r - \frac{1}{3}\dot{\varepsilon}_{kk}\right)^2 + \left(\dot{\varepsilon}_\theta - \frac{1}{3}\dot{\varepsilon}_{kk}\right)^2 + \left(\dot{\varepsilon}_x - \frac{1}{3}\dot{\varepsilon}_{kk}\right)^2\right\}},\ \dot{\bar{\varepsilon}} = \frac{2}{3}\frac{\mathrm{v}_r}{r}\sqrt{2 + \left(\frac{r}{1-f}\frac{\partial f}{\partial r} - 1\right)^2 - \frac{r}{1-f}\frac{\partial f}{\partial r}}. \tag{1.8}$$

Для простоты можно рассмотреть экстремальный случай вблизи макроскопического разрушения, т.е. малых $1-f$ и больших изменений по r от f, $\frac{r}{1-f}\frac{\partial f}{\partial r} \gg 1$, тогда

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \frac{2}{r}\mathrm{v}_r\frac{\partial f}{\partial r},\quad \dot{\varepsilon}_{kk} = \mathrm{v}_r\frac{\partial f}{\partial r},\quad \dot{\varepsilon}_{kk} = \frac{3}{2}\dot{\bar{\varepsilon}}\,. \tag{1.9}$$

При этом в уравнении нуклеации пор [9] можно записать

$$\frac{df_{nucl}}{dt} = p\dot{\bar{\varepsilon}},\quad p\left(\bar{\varepsilon}\right) = \frac{f_N}{s_N\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{\varepsilon}-\varepsilon_N}{s_N}\right)^2}, \tag{1.10}$$

где $\dot{\bar{\varepsilon}}$ согласно (1.8) можно выразить через f, v_r, которое в области больших изменений f по r дает (1.9). В (1.10) $\bar{\varepsilon}$ есть интенсивность пластических деформаций для рассматриваемой задачи, ε_N – ее среднее значение, s_N – дисперсия; $p\left(\bar{\varepsilon}\right)$ в (1.10) – нормальное гауссово распределение для плотности вероятности $P\left(\bar{\varepsilon}\right) = \int_{-\infty}^{\bar{\varepsilon}} p\left(\bar{\varepsilon}\right)d\bar{\varepsilon}$. При этом (1.5), (1.6), (1.10) с учетом (1.9) запишем в виде

$$\frac{df}{dt} = \frac{3}{2}\left(1-f\right)\dot{\bar{\varepsilon}} + p\left(\varepsilon\right)\dot{\bar{\varepsilon}},\qquad \frac{df}{d\bar{\varepsilon}} = \frac{3}{2}\left(1-f\right) + p\left(\bar{\varepsilon}\right), \tag{1.11}$$

интегрирование которого дает

$$f = 1 + \left(f_0 - 1\right)e^{-\frac{3}{2}\bar{\varepsilon}} + e^{-\frac{3}{2}\bar{\varepsilon}}\int_0^{\bar{\varepsilon}} p\left(\bar{\varepsilon}\right)e^{-\frac{3}{2}\bar{\varepsilon}}d\bar{\varepsilon}\,, \tag{1.12}$$

$f_0 = const$ – начальное значение f, когда $\bar{\varepsilon} = 0$.

Второе слагаемое $p\left(\bar{\varepsilon}\right) = \frac{dP}{d\bar{\varepsilon}}$ в правой части (1.11), соответствующее процессу создания пор [10], показывает, что f есть аналог вероятности процесса создания пор P. Тогда, следуя методу нелинейной волновой динамики [11, 12], можно в экстремальном процессе нуклеации [9], как было сделано для информационных сетей в [12], просто заменить гауссово распределение $p\left(\bar{\varepsilon}\right)$, представляющее линейный процесс блуждания [12], описываемый линейным уравнением (3) [12] Фоккера–Планка для плотности вероятности $p(\bar{\varepsilon}, t)$, где $x = \bar{\varepsilon}$ – значение интенсивности деформации в случайном процессе вблизи средней кривой процесса $x = A(t), A(t) = \varepsilon_N$ с дисперсией вокруг нее $B(t) = s_N^2$, на соответствующее более общее нелинейное распределение. Следуя [6], используется более общее нелинейное уравнение (3) [12] Фоккера–Планка для $p(x,t), x = \bar{\varepsilon}$, и решение задачи блуждания с начальным условием $p(x,0) = \delta(x)$, которое обобщает линейное гауссово распределение для $p(x,t) = \mathrm{v}(t,x)$, даваемое формулой (1) из [12], берется в окончательном виде:

$$p(\bar{\varepsilon}) = \frac{f_N e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{\varepsilon}-\varepsilon_N}{s_N}\right)^2}}{s_N\sqrt{2\pi} + \int\limits_{-\infty}^{0}\left(e^{\frac{\gamma Y}{s_N^2}} - 1\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{\varepsilon}-\varepsilon_N - Y}{s_N}\right)^2} dY}. \tag{1.13}$$

Необходимость пересмотра гауссова распределения плотности вероятности отмечалась также во многих современных работах по статистике, для задачи сейсмики эта необходимость была указана в [13].

2. ***Изучение аналогичными методами задачи встречи потоков транспорта на перекрестке.*** Указанное в (1.13) исправление нормального гауссова распределения для плотности вероятности в процессе нуклеации пор можно использовать [3] также применительно к задачам движения транспорта [9, 13] в одномерном подходе движения машин на двух дорогах при изучении возможной конфликтной ситуации на их перекрестке для двух независимых потоков на пересекающихся линиях. Тогда, следуя методу, подробно описанному в [9], распределение вероятности отсутствия конфликта может быть описано нормальным распределением

$$P(z,s) = \frac{1}{2}\{1 + \phi(\xi)\}, \quad \xi = \frac{z - m(s)}{\sqrt{\beta(s)}}, \quad \phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{\xi} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda. \tag{2.1}$$

Поскольку конфликтная ситуация происходит в экстремальных условиях процесса движения, то согласно методу нелинейной волновой динамики [11, 12], а также используя замену линейной формулы теории для $P(x,t)$ [7] на формулу нелинейной теории для $P(x,t)$ из [4], можно при определении вероятности конфликта $1 - P(z,s)$ вместо формулы линейной теории (2.1), которая в обозначениях формулы (1) из [3] будет

$$P(t,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\frac{X}{\sqrt{B(t)}}}^{\infty} e^{-\frac{x'^2}{2}}dx', \tag{2.2}$$

использовать нелинейную теорию, даваемую формулой (4) из [3]:

$$P(t,x)=\frac{\int\limits_{-\infty}^{0}\exp\left\{-\frac{(X-Y)^2}{2B(t)}\right\}dY}{\sqrt{2\pi B(t)}++\int\limits_{-\infty}^{0}\left(e^{\frac{y}{c_1}}-1\exp\right)\left\{-\frac{(X-Y)^2}{2B(t)}\right\}dY}, \tag{2.3}$$

где

$$X=x-A(t),\ A(t)=\int\limits_0^t a(t)dt,\ B(t)=\int\limits_0^t b(t)dt. \tag{2.4}$$

Для общности математическое ожидание $a(t)=m(s)$ и дисперсия $B(t)=B(s)$ приняты в (2.4) $c_1=\frac{\gamma(t)}{B(t)}$, где γ – нелинейный коэффициент, который следует при расчетах задавать. Теперь взамен (2.1) в соответствии с (2.2) следует использовать нелинейную формулу (2.3), в которой нужно произвести указанные замены. Тогда

$$P(z,s)=\frac{\int\limits_{-\xi}^{\infty}e^{-\frac{x'^2}{2}}dx'}{\sqrt{2\pi}+\int\limits_{-\xi}^{\infty}\left(e^{\frac{\sqrt{B(s)}}{c_1}(-\xi-x')}-1\right)e^{-\frac{x'^2}{2}}dx'}, \tag{2.5}$$

$$p(z,s)=\frac{e^{-\frac{(z-m)^2}{2B(s)}}}{\sqrt{2\pi B(s)}+\sqrt{B(s)}\int\limits_{-\xi}^{\infty}\left(e^{\frac{\sqrt{B(s)}}{c_1}(-\xi-x')}-1\right)e^{-\frac{x'^2}{2}}dx'},$$

где $c_1=\frac{\gamma(s)}{b(s)}$; $P(z,s)$ – вероятность отсутствия конфликта; $p(z,s)$ – плотность вероятности.

Формулу для $P(z,s)$ получаем из формулы (2.3) подстановкой в нее $\frac{X-Y}{\sqrt{B(s)}}=x'$. Следует отметить, что в теории волн [5] X – расстояние от волны $x=A(t)$ (эйконал), причем используется и определение эйконала $t-A^{-1}(x)$, которое близко к [9], что не мешает проводить указанную аналогию решений (2.3) из [5] и (2.5) из [9] в линейном случае при $\gamma=0$, $c_1=0$. При этом в (2.2), (2.3) надо заменить $\frac{X}{\sqrt{B(s)}}$ на ξ, $\xi=\frac{z-m(s)}{\sqrt{B(s)}}$. В [11] нами дается подробное изучение процессов движения транспорта на одной линии и на пересекающихся линиях. Там же дается обобщение метода кинематических нелинейных волн Лайтхилла и Уизема [10] в задаче движения транспорта на насыщенных линиях с учетом релаксации, диффузии и флуктуаций с применением методов синергетики [1, 2]. При этом явление образования затора описывается фазовым переходом первого рода. В [3] аналогичными методами изучена пространственная стохастическая задача о встрече потоков на перекрестке. Указанные синергетические подходы [1, 2, 11], где также используются универсальная экспериментальная кривая зависимости скорости частиц от напряженности поля для полупроводников и аналогичная ей кривая зависимости потока частиц от их плотности [10], позволяют решение [1, 2], дополненное нами с учетом нелинейности в уравнении Фоккера-Планка и средних членов в разложении по гармоникам, распространить на большое число аналогичных кинематических подходов в разных задачах движения частиц, в том числе в задаче о распространении вирусов для большой совокупности компьютеров, в информатике, в механике разрушения [14].

Выводы. Для модели Гарсона–Твергарда–Нидельмана в уравнении скорости изменения пористости вместо гауссова распределения плотности вероятности можно применить его нелинейное обобщение.

Авторы выражают признательность за постановку задачи и ценные советы д.ф-м.н., профессору Института механики НАН РА Багдоеву Александру Георгиевичу.

Литература

1. **Хакен Г.** Синергетика. – М.: Мир, 1980. – 405 с.
2. **Nakamura Ki–ichi**. Statistical Dynamics of the Gunn Instability near Threshold // Journal of the Physical Society of Japan. – 1975. – Vol. 38, N1. – P. 46–50.
3. **Bagdoev A.G., Safaryan Yu.S.** The application of nonlinear wave dynamics methods to examination of stochastic processes of Benar in horizontal layers of fluid, of semiconductors, of traffic flow and micro–macro transition in fracture mechanics // Collection. Problems of Mechanics of deformable body. – Yerevan, 2012. – P. 101–120.
4. **Ванцян А.А.** Определение глубины проникания тонкого тела в металлы // ДАН АрмССР. – 1981. – Т. 72, N2. – С. 95 – 102.
5. **Багдоев А.Г., Ванцян А.А.** Проникание тонкого тела в трансверсально-изотропную среду с вращением // Изв. АН СССР, МТТ. – 1989. – С. 187 – 189.
6. **Рахматулин Х.А.** Основы газодинамики взаимопроникающих сплошных сред // ПММ. – 1956. – Т. XX, №2. – С.184–195.
7. **Нигматулин Р.И.** Проблемы механики гетерогенных сред. – М.: Наука, 1978. – 336 с.
8. **Ванцян А.А.** Влияние электромагнитных полей и анизотропных свойств сред на динамические процессы в сплошных средах / НАН Армении, Институт Механики. – Ереван: Гитутюн, 2004. – 224 с.
9. **Chu C., Needleman A**. Void nucleation effects in biaxial stretched sheets // J. Eng. Mater. Techn. – 1980. – V. 102. – P. 249–256.
10. **Браиловский Н.О., Грановский В.И.** Моделирование транспортных систем. – М.: Транспорт, 1978. – 124 с.
11. Аналитические и численные исследования динамических процессов в экономике методами нелинейной волновой динамики / **А.Г. Багдоев, С.В. Варданян, А.В. Варданян и др.** // Прикладная эконометрика. – 2009. – Т. 13, №1. – С. 50–69.
12. **Bagdoev A.G., Manukyan G.A., Manukyan N.K., Kasparyan S.G.** The discussion of possibilities of application of methods of linear and nonlinear wave dynamics to probabilities determination in wandering problems // Int. Conf. of ATA and MANEB. – 2001. – P. 31–37.
13. **Рикитаке Т.** Предсказание землетрясений. – М.: Мир, 1979. – 388 с.
14. **Герасимов А.В., Коняев А.А., Пашков С.В.** Удар высокоскоростных элементов по оболочке с заполнителем // Материалы XVII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС). – Алушта, 2011. – С. 740-741.

Поступила в редакцию 31.12.2014.
Принята к опубликованию 26.05.2015.

ՍՏՈԽԱՍՏԻԿ ՏԱՐԱԾԱԿԱՆ ԳՈՐԾԸՆԹԱՑՆԵՐՈՒՄ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ՝ ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐ ՄԽՐՃՎԵԼՈՒ ԴԵՊՔՈՒՄ ՔԱՅՔԱՅՄԱՆ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա.Գ. Առաքելյան, Ա.Ա. Վանցյան

Հետազոտված են քայքայման մեխանիկայի ստոխաստիկ տարածական գործընթացները մարմինների՝ միջավայրեր մխրճվելու դեպքում: Դիտարկված են տարբեր ֆենոմենոլոգիական մեթոդներ, որոնք ժամանակակից մեթոդների հետ համատեղ կիրառվում են ալիքային դինամիկայի խնդիրներում ստոխաստիկ երևույթների ուսումնասիրման համար, ծակոտկեն միջավայրում՝ մագիստրալ ճաքերի դեպքում, միկրո-մեզո մակարդակով ֆազային խնդիրներում: Միկրոճաքերի դինամիկան նկարագրող Գարսոն–Թվերգարդ–Նիդելման հայտնի մոդելի դեպքում ծակոտկենության փոփոխման արագության հավասարման մեջ, հավանականության խտության գաուսյան բաշխման փոխարեն, ներմուծվում է նրա գծային ընդհանրացումը, որը դժվար չէ հաշվել ոչ գծայնության գործակցի տարբեր արժեքների դեպքում և համեմատել փորձերի հետ: Դիտարկվում է բարակ սրածայր մարմինների՝ կիսատարածության մեջ մխրճման խնդիրը՝ հաշվի առնելով ծակոտկենության առկայությունը Բիոյի երկկոմպոնենտ ոչ գծային միջավայրի հիման վրա:

Առանցքային բառեր. ոչ գծային ալիքային դինամիկա, ստոխաստիկ տարածական պրոցեսներ, ֆազային անցումներ, միկրո–, մեզո–, մակրոքայքայման պրոցեսներ, ներթափանցում:

INVESTIGATING THE STOCHASTIC SPATIAL PROCESSES OF DESTRUCTION MECHANICS AT PENETRATION OF BODIES INTO MEDIA

A.G. Arakelyan, A.A. Vantsyan

Stochastic spatial processes of destruction mechanics at penetration of bodies into media are investigated. Various phenomenological models by applying the methods of nonlinear wave dynamics combined with modern methods of studying the stochastic processes in problems of phase transitions from the pore motion at the micro–mezzo level to macro fractures are considered. For the known model of Garson–Tvergard–Nidelman describing the dynamics of micropores, in the equation for the velocity of the porosity change instead of the Gauss distribution for the probability density, its nonlinear generalization is introduced, which is easy to calculate for different values of the nonlinearity coefficient. The problem of penetration of thin sharpened bodies into the half-space, taking into account the presence of porosity, on the basis of the two component nonlinear media of Bio is considered.

Keywords: nonlinear wave dynamics, stochastic spatial processes, phase transitions, traffic flows, micro–mezzo–macro processes of destruction, penetration.