

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ШЕСТНАДЦАТЬЮ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИЗГИБА ПЛАСТИН

Рассматривается метод конечных элементов прямоугольной формы с шестнадцатью степенями свободы для решения задач поперечного изгиба пластин, в котором выполняются геометрические и статические граничные условия для всех точек контура срединной плоскости пластины, условия непрерывности изгибающих и крутящих моментов, перерезывающих сил по всей линии контакта между смежными элементами.

Ключевые слова: конечные элементы, квадратичное программирование, перемещения, пластина, изгиб

Введение

Метод конечных элементов является широко распространенным и одним из наиболее эффективных методов решения сложных задач строительной механики, лежащий в основе всех современных программных комплексов, предназначенных для выполнения расчетов строительных конструкций на компьютере. Однако, при решении задач возникают некоторые трудности, связанные как с удовлетворением условий непрерывности перемещений и напряжений между конечными элементами, так и с учетом выполнения геометрических и статических граничных условий для всех точек, соответствующих линиям контура пластины и т.д.

Рассматривается модификация метода конечных элементов прямоугольной формы с шестнадцатью степенями свободы, при котором решения задач изгиба пластин сводятся к задачам квадратичного программирования. Данный подход дает возможность включить в ограничения квадратичного программирования все необходимые условия, такие как: условия выполнения геометрических и статических граничных условий для всех точек контура срединной плоскости пластины, условия непрерывности изгибающих и крутящих моментов, перерезывающих сил по всей линии контакта между смежными элементами [1-3].

Рассмотрены следующие тестовые задачи об определении напряженно-деформированного состояния пластины, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой: пластины, жестко заделанной по всем сторонам; свободно опертой по всем сторонам; свободно опертой по двум противоположным краям и свободной по двум другим.

Метод конечных элементов

Срединную плоскость пластины представим в виде совокупности \bar{n} конечных элементов прямоугольных форм. В каждой узловой точке S -го конечного элемента пластины введем по четыре обобщенных перемещения: w^s – перемещение в направлении оси z , два угла поворота $\theta^s = \partial w^s / \partial y$, $\omega^s = -\partial w^s / \partial x$ соответственно вокруг осей x , y и угол сдвига $\gamma^s = \partial^2 w^s / \partial x \partial y$. Узловые значения обобщенных перемещений $f_i^s = (w_i^s, \theta_i^s, \omega_i^s, \gamma_i^s)^T, i \in \{1, 2, 3, 4\}$ для s -го конечного элемента в

плоскости xu зададим вектором $w^s = (w_1^s, w_2^s, \dots, w_{16}^s)^T$. Схематическое изображение S -го конечного элемента в плоскости xu приведено на рис.1.

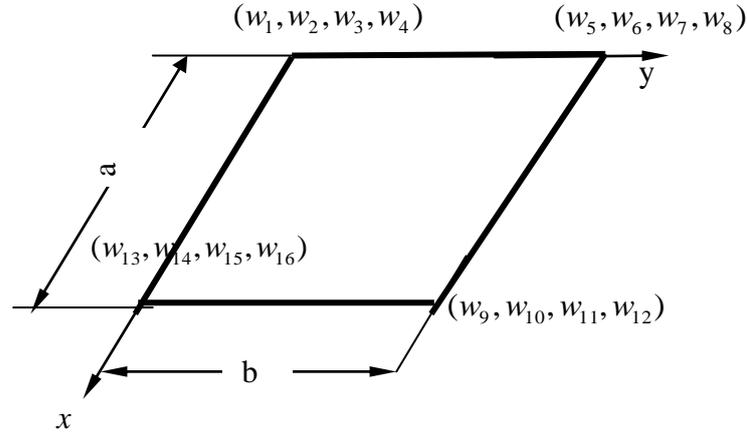


Рис. 1. Схематическое изображение прямоугольного конечного элемента пластины

Перемещения точек срединной поверхности s -го конечного элемента аппроксимируем бикубическим полиномом, содержащим 16 неизвестных параметров:

$$w^s(x, y) = \alpha_1^s + \alpha_2^s x + \alpha_3^s y + \alpha_4^s x^2 + \alpha_5^s xy + \alpha_6^s y^2 + \alpha_7^s x^3 + \alpha_8^s x^2 y + \alpha_9^s xy^2 + \alpha_{10}^s y^3 + \alpha_{11}^s x^3 y + \alpha_{12}^s xy^3 + \alpha_{13}^s x^2 y^2 + \alpha_{14}^s x^2 y^3 + \alpha_{15}^s x^3 y^2 + \alpha_{16}^s x^3 y^3, \quad (1)$$

который заменим следующим удобным для практического использования выражением:

$$w^s(x, y) = \sum_{i=1}^{16} w_i^s \Phi_i(x, y). \quad (2)$$

Здесь $w_i^s, i \in \{1, 2, \dots, 16\}$ – узловые значения обобщенных перемещений S -го конечного элемента, которые для прямоугольного конечного элемента определяются соотношениями

$$\begin{aligned} w_1^s &= w^s(0,0), & w_2^s &= \frac{\partial w^s}{\partial y}(0,0), & w_3^s &= -\frac{\partial w^s}{\partial x}(0,0), & w_4^s &= \frac{\partial^2 w^s}{\partial x \partial y}(0,0), \\ w_5^s &= w^s(0,b), & w_6^s &= \frac{\partial w^s}{\partial y}(0,b), & w_7^s &= -\frac{\partial w^s}{\partial x}(0,b), & w_8^s &= \frac{\partial^2 w^s}{\partial x \partial y}(0,b), \\ w_9^s &= w^s(a,b), & w_{10}^s &= \frac{\partial w^s}{\partial y}(a,b), & w_{11}^s &= -\frac{\partial w^s}{\partial x}(a,b), & w_{12}^s &= \frac{\partial^2 w^s}{\partial x \partial y}(a,b), \\ w_{13}^s &= w^s(a,0), & w_{14}^s &= \frac{\partial w^s}{\partial y}(a,0), & w_{15}^s &= -\frac{\partial w^s}{\partial x}(a,0), & w_{16}^s &= \frac{\partial^2 w^s}{\partial x \partial y}(a,0). \end{aligned} \quad (3)$$

$\Phi_i^s(x, y)$ – функции Эрмита, обладающие следующими свойствами:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_1^s(0,0) = 1, \\ \frac{\partial \Phi_1^s}{\partial y}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial \Phi_1^s}{\partial x}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi_1^s}{\partial x \partial y}(0,0) = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial^2 \Phi_1^s}{\partial x \partial y}(a,0) = 0, \\ \Phi_2^s(0,0) = 0, \\ \frac{\partial \Phi_2^s}{\partial y}(0,0) = 1, \quad \frac{\partial \Phi_2^s}{\partial x}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi_2^s}{\partial x \partial y}(0,0) = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial^2 \Phi_2^s}{\partial x \partial y}(a,0) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \Phi_{16}^s(0,0) = 0, \\ \frac{\partial \Phi_{16}^s}{\partial y}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial \Phi_{16}^s}{\partial x}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi_{16}^s}{\partial x \partial y}(0,0) = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial^2 \Phi_{16}^s}{\partial x \partial y}(a,0) = 1. \end{array} \right. \quad (4)$$

Исходя из связей (1), выражение для каждой j -й функции Эрмита $\Phi_j(x, y)$ ищем в виде

$$\Phi_j^s(x, y) = \alpha_{1j}^s + \alpha_{2j}^s x + \alpha_{3j}^s y + \alpha_{4j}^s x^2 + \alpha_{5j}^s xy + \alpha_{6j}^s y^2 + \alpha_{7j}^s x^3 + \alpha_{8j}^s x^2 y + \alpha_{9j}^s xy^2 + \alpha_{10j}^s y^3 + \alpha_{11j}^s x^3 y + \alpha_{12j}^s xy^3 + \alpha_{13j}^s x^2 y^2 + \alpha_{14j}^s x^2 y^3 + \alpha_{15j}^s x^3 y^2 + \alpha_{16j}^s x^3 y^3.$$

Подставляя его в условия (4) и решая полученную систему уравнений, находим α_{ji}^s , а, следовательно, и $\Phi_j^s(x, y)$. При $\xi = x/a$, $\eta = y/b$, для прямоугольного конечного элемента находим

$$\begin{aligned} \Phi_1^s(\xi, \eta) &= 1 - 3\xi^2 - 3\eta^2 + 2\xi^3 + 2\eta^3 + 9\xi^2\eta^2 - 6\xi^2\eta^3 - 6\xi^3\eta^2 + 4\xi^3\eta^3, \\ \Phi_2^s(\xi, \eta) &= b(\eta - 2\eta^2 - 3\xi^2\eta + \eta^3 + 2\xi^3\eta + 6\xi^2\eta^2 - 3\xi^2\eta^3 - 4\xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta^3), \\ \Phi_3^s(\xi, \eta) &= a(-\xi + 2\xi^2 - \xi^3 + 3\xi\eta^2 - 2\xi\eta^3 - 6\xi^2\eta^2 + 4\xi^2\eta^3 + 3\xi^3\eta^2 - 2\xi^3\eta^3), \\ \Phi_4^s(\xi, \eta) &= ab(\xi\eta - 2\xi^2\eta - 2\xi\eta^2 + \xi^3\eta + \xi\eta^3 + 4\xi^2\eta^2 - 2\xi^2\eta^3 - 2\xi^3\eta^2 + \xi^3\eta^3), \\ \Phi_5^s(\xi, \eta) &= 3\eta^2 - 2\eta^3 - 9\xi^2\eta^2 + 6\xi^2\eta^3 + 6\xi^3\eta^2 - 4\xi^3\eta^3, \\ \Phi_6^s(\xi, \eta) &= b(-\eta^2 + \eta^3 + 3\xi^2\eta^2 - 3\xi^2\eta^3 - 2\xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta^3), \\ \Phi_7^s(\xi, \eta) &= a(-3\xi\eta^2 + 2\xi\eta^3 + 6\xi^2\eta^2 - 4\xi^2\eta^3 - 3\xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta^3), \\ \Phi_8^s(\xi, \eta) &= ab(-\xi\eta^2 + \xi\eta^3 + 2\xi^2\eta^2 - 2\xi^2\eta^3 - \xi^3\eta^2 + \xi^3\eta^3), \\ \Phi_9^s(\xi, \eta) &= 9\xi^2\eta^2 - 6\xi^2\eta^3 - 6\xi^3\eta^2 + 4\xi^3\eta^3, \\ \Phi_{10}^s(\xi, \eta) &= b(-3\xi^2\eta^2 + 3\xi^2\eta^3 + 2\xi^3\eta^2 - 2\xi^3\eta^3), \\ \Phi_{11}^s(\xi, \eta) &= a(3\xi^2\eta^2 - 2\xi^2\eta^3 - 3\xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta^3), \\ \Phi_{12}^s(\xi, \eta) &= ab(\xi^2\eta^2 - \xi^2\eta^3 - \xi^3\eta^2 + \xi^3\eta^3), \\ \Phi_{13}^s(\xi, \eta) &= 3\xi^2 - 2\xi^3 - 9\xi^2\eta^2 + 6\xi^2\eta^3 + 6\xi^3\eta^2 - 4\xi^3\eta^3, \\ \Phi_{14}^s(\xi, \eta) &= b(3\xi^2\eta - 2\xi^3\eta - 6\xi^2\eta^2 + 3\xi^2\eta^3 + 4\xi^3\eta^2 - 2\xi^3\eta^3), \\ \Phi_{15}^s(\xi, \eta) &= a(\xi^2 - \xi^3 - 3\xi^2\eta^2 + 2\xi^2\eta^3 + 3\xi^3\eta^2 - 2\xi^3\eta^3), \\ \Phi_{16}^s(\xi, \eta) &= ab(-\xi^2\eta + \xi^3\eta + 2\xi^2\eta^2 - \xi^2\eta^3 - 2\xi^3\eta^2 + \xi^3\eta^3). \end{aligned} \quad (5)$$

Компоненты вектора перемещения $f_s = (w^s, \frac{\partial w^s}{\partial y}, -\frac{\partial w^s}{\partial x}, \frac{\partial^2 w^s}{\partial x \partial y})^T = (w^s, \theta^s, \omega^s, \gamma^s)^T$ внутри S -го конечного элемента определяются формулами (2) и, соответственно,

$$\theta^s(x, y) = \sum_{i=1}^{16} w_i^s \frac{\partial \Phi_i(x, y)}{\partial y}, \quad \omega^s(x, y) = -\sum_{i=1}^{16} w_i^s \frac{\partial \Phi_i(x, y)}{\partial x}, \quad \gamma^s(x, y) = \sum_{i=1}^{16} w_i^s \frac{\partial^2 \Phi_i(x, y)}{\partial x \partial y}. \quad (6)$$

Для потенциальной энергии деформации при изгибе пластин имеем [2]

$$\Omega = \frac{D}{2} \iint_F \left\{ [\nabla^2 w(x, y)]^2 + 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy, \quad (7)$$

где F - площадь срединной поверхности, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ - жесткость пластинки при изгибе,

h - толщина пластинки, E - модуль упругости, ν - коэффициент Пуассона.

Исходя из выражения (7), находим приведенное на рис.1 значение потенциальной энергии изгиба S -го прямоугольного элемента:

$$\Omega_s = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ [\nabla^2 w^s(x, y)]^2 + 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w^s}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w^s}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w^s}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy. \quad (8)$$

Подставляя значения $w^s(x, y)$ из выражения (2) в (8), потенциальную энергию изгиба s -го конечного элемента пластины представим в виде

$$\bar{\Omega}_s = 0,5(w^s)^T k^s w^s, \quad (9)$$

где $k^s = \frac{D}{ab} \|\bar{k}_{ij}^s\|$ - матрица жесткости, компоненты которой для приведенного на рис.1 прямоугольного конечного элемента определяются формулой

$$\bar{k}_{ij}^s = \int_0^a \int_0^b \left\{ \nabla^2 \Phi_i^s \nabla^2 \Phi_j^s + 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 \Phi_i^s}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi_j^s}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_i^s}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi_j^s}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_i^s}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi_j^s}{\partial x^2} \right] \right\} dx dy. \quad (10)$$

Обозначим через $P_s = (P_1^s, P_2^s, \dots, P_{16}^s)^T$ вектор узловых нагрузок, эквивалентный внешней нагрузке. Действие распределенной внешней нагрузки интенсивностью $q(x, y)$ на поверхность конечного элемента можно заменить совокупностью эквивалентных узловых сил [4]:

$$P^s = \int_F q(x, y) \Phi^s(x, y) dx dy. \quad (11)$$

Откуда, в случае равномерно распределенной нагрузки q , предположив, что в пределах площади конечного элемента $q(x, y) = q = const$, с учетом связей (5) для прямоугольного конечного элемента находим

$$P^s = \frac{qab}{4} \left(1, \frac{b}{6}, -\frac{a}{6}, \frac{ab}{36}, 1, -\frac{b}{6}, \frac{a}{6}, -\frac{ab}{36}, 1, -\frac{b}{6}, \frac{a}{6}, \frac{ab}{36}, 1, \frac{b}{6}, -\frac{a}{6}, -\frac{ab}{36} \right)^T. \quad (12)$$

В случае, если внешняя сила P приложена в центре прямоугольного элемента, имеем

$$P^s = \frac{P}{4} \left(1, \frac{b}{4}, -\frac{a}{4}, \frac{ab}{16}, 1, -\frac{b}{4}, \frac{a}{4}, -\frac{ab}{16}, 1, -\frac{b}{4}, \frac{a}{4}, \frac{ab}{16}, 1, \frac{b}{4}, -\frac{a}{4}, -\frac{ab}{16} \right)^T. \quad (13)$$

Работа узловых нагрузок s -го конечного элемента пластины задается формулой

$$\hat{\Omega}^s = (w^s)^T P^s. \quad (14)$$

Принимая во внимание формулы (9) и (14), находим потенциальную энергию системы для s -го конечного элемента [5]:

$$\Omega^s = \bar{\Omega}^s - \hat{\Omega}^s = 0,5(w^s)^T k_s w^s - (w^s)^T P^s. \quad (15)$$

Исходя из принципа минимума потенциальной энергии системы, для определения искомым векторов $w^s, s \in \{1, 2, \dots, \bar{n}\}$ получим следующую задачу квадратичного программирования:

Узловые значения изгибающих, крутящих моментов и перерезывающих сил $R_i^s = (M_{x,i}^s, M_{y,i}^s, M_{xy,i}^s, R_{x,i}^s, R_{y,i}^s)^T, i \in \{1,2,3,4\}$ для s -го прямоугольного конечного элемента обозначим вектором $M^s = (M_1^s, M_2^s, \dots, M_{20}^s)^T$. Принимая во внимание соотношения (2), (5), из формул изгибающих, крутящих моментов и перерезывающих сил (20) и (21), находим:

$$M^s = \delta^s w^s, \quad (22)$$

где δ^s - матрица изгибающих, крутящих моментов и перерезывающих сил. Она задается формулой

$$\delta^s = -D \begin{vmatrix} \delta_1^s & | & \delta_2^s \end{vmatrix},$$

где при $\bar{\nu} = 2 - \nu$, δ_1^s и δ_2^s задаются соотношениями (23) и (24).

$$\delta_1^s = \begin{vmatrix} \frac{6}{a^2} & \frac{6\nu}{b^2} & -\frac{4\nu}{b} & \frac{4}{a} & 0 & \frac{6\nu}{b^2} & -\frac{2\nu}{b} & 0 & 0 \\ \frac{6}{b^2} & \frac{6\nu}{a^2} & -\frac{4}{b} & \frac{4\nu}{a} & 0 & \frac{6}{b^2} & -\frac{2}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1-\nu) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{12}{a^3} & 0 & -\frac{6}{a^2} + \frac{6\bar{\nu}}{b^2} & -\frac{4\bar{\nu}}{b} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6\bar{\nu}}{b^2} & -\frac{2\bar{\nu}}{b} \\ \frac{12}{b^3} & \frac{6}{b^2} - \frac{6\bar{\nu}}{a^2} & 0 & -\frac{4\bar{\nu}}{a} & -\frac{12}{b^3} & \frac{6}{b^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6\nu}{b^2} & \frac{2\nu}{b} & 0 & 0 & -\frac{6}{a^2} - \frac{6\nu}{b^2} & \frac{4\nu}{b} & \frac{4}{a} & 0 & 0 \\ \frac{6}{b^2} & \frac{2}{b} & 0 & 0 & -\frac{6}{b^2} - \frac{6\nu}{a^2} & \frac{4}{b} & \frac{4\nu}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1-\nu) \\ 0 & 0 & -\frac{6\bar{\nu}}{b^2} & \frac{2\bar{\nu}}{b} & \frac{12}{a^3} & 0 & -\frac{6}{a^2} + \frac{6\bar{\nu}}{b^2} & \frac{4\bar{\nu}}{b} & 0 \\ \frac{12}{b^3} & \frac{6\nu}{b^2} & 0 & 0 & \frac{12}{b^3} & \frac{6}{b^2} - \frac{6\bar{\nu}}{a^2} & 0 & -\frac{4\bar{\nu}}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{a^2} & 0 & -\frac{2}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6\nu}{a^2} & 0 & -\frac{2\nu}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12}{a^3} & 0 & -\frac{6\nu}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6\bar{\nu}}{a^2} & 0 & -\frac{2\bar{\nu}}{a} & 0 \\ \frac{6}{a^2} & 0 & -\frac{2}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6\nu}{a^2} & 0 & -\frac{2\nu}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{12}{a^3} & 0 & -\frac{6}{a^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6\bar{\nu}}{a^2} & 0 & -\frac{2\bar{\nu}}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (23)$$

$$\delta_2^s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{a^2} & 0 & \frac{2}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6\nu}{a^2} & 0 & \frac{2\nu}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12}{a^3} & 0 & -\frac{6}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6\bar{\nu}}{a^2} & 0 & -\frac{2\bar{\nu}}{a} \\ \frac{6}{a^2} & 0 & \frac{2}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6\nu}{a^2} & 0 & \frac{2\nu}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{12}{a^3} & 0 & -\frac{6}{a^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6\bar{\nu}}{a^2} & 0 & -\frac{2\bar{\nu}}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{a^2} & \frac{6\nu}{b^2} & \frac{4\nu}{b} & -\frac{4}{a} & 0 & \frac{6\nu}{b^2} & \frac{2\nu}{b} & 0 \\ \frac{6}{b^2} & \frac{6\nu}{a^2} & \frac{4}{b} & -\frac{4\nu}{a} & 0 & \frac{6}{b^2} & \frac{2}{b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1-\nu) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{12}{a^3} & 0 & -\frac{6}{a^2} + \frac{6\bar{\nu}}{b^2} & \frac{4\bar{\nu}}{b} & 0 & 0 & -\frac{6\bar{\nu}}{b^2} & \frac{2\bar{\nu}}{b} \\ -\frac{12}{b^3} & \frac{6}{b^2} - \frac{6\bar{\nu}}{a^2} & 0 & \frac{4\bar{\nu}}{a} & \frac{12}{b^3} & \frac{6}{b^2} & 0 & 0 \\ \frac{6\nu}{b^2} & -\frac{2\nu}{b} & 0 & 0 & -\frac{6}{a^2} - \frac{6\nu}{b^2} & -\frac{4\nu}{b} & -\frac{4}{a} & 0 \\ \frac{6}{b^2} & -\frac{2}{b} & 0 & 0 & -\frac{6}{b^2} - \frac{6\nu}{a^2} & -\frac{4}{b} & -\frac{4\nu}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1-\nu) \\ 0 & 0 & -\frac{6\bar{\nu}}{b^2} & -\frac{2\bar{\nu}}{b} & -\frac{12}{a^3} & 0 & -\frac{6}{a^2} + \frac{6\bar{\nu}}{b^2} & -\frac{4\nu}{b} \\ -\frac{12}{b^3} & \frac{6}{b^2} & 0 & 0 & \frac{12}{b^3} & \frac{6}{b^2} - \frac{6\nu}{a^2} & 0 & \frac{4\bar{\nu}}{a} \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Граничные условия

Рассмотрим три случая граничных условий для прямоугольного конечного элемента пластины.

1. *Край пластинки защемлен.* В таком случае по этому краю равны нулю прогибы и соответствующие углы поворота вокруг контурной линии края. Если положить, что любая из сторон $x = 0$, $x = a$ или $y = 0$, $y = b$ s -го прямоугольного конечного элемента пластины может быть защемленным краем, то для этих сторон соответственно получим:

$$w^s = 0|_{y=0,b}, \quad w^s = 0|_{x=0,a}, \quad (25)$$

$$\theta^s = 0|_{y=0,b}, \quad \omega^s = 0|_{x=0,a}. \quad (26)$$

Для узловых точек контура срединной плоскости пластины условия (25) и (26) примут вид:

$$w^s(0,0) = 0, w^s(0,b) = 0, \text{ на линии } x=0; w^s(a,0) = 0, w^s(a,b) = 0, \text{ на линии } x=a; \quad (27)$$

$$w^s(0,0) = 0, w^s(a,0) = 0, \text{ на линии } y=0; w^s(0,b) = 0, w^s(a,b) = 0, \text{ на линии } y=b; \quad (28)$$

$$\omega^s(0,0) = 0, \omega^s(0,b) = 0, \text{ на линии } x=0; \omega^s(a,0) = 0, \omega^s(a,b) = 0, \text{ на линии } x=a; \quad (29)$$

$$\theta^s(0,0) = 0, \theta^s(a,0) = 0, \text{ на линии } y=0; \theta^s(0,b) = 0, \theta^s(a,b) = 0, \text{ на линии } y=b. \quad (30)$$

Принимая во внимание обозначение $w^s = (w_1^s, w_2^s, \dots, w_{16}^s)^T$ для вектора узловых перемещений, из соотношений (27) – (30) находим:

$$w_1^s = 0, w_5^s = 0, \text{ на линии } x=0; w_{13}^s = 0, w_9^s = 0, \text{ на линии } x=a; \quad (31)$$

$$w_1^s = 0, w_{13}^s = 0, \text{ на линии } y=0; w_5^s = 0, w_9^s = 0, \text{ на линии } y=b. \quad (32)$$

$$w_3^s = 0, w_7^s = 0, \text{ на линии } x=0; w_{15}^s = 0, w_{11}^s = 0, \text{ на линии } x=a; \quad (33)$$

$$w_2^s = 0, w_{14}^s = 0, \text{ на линии } y=0; w_6^s = 0, w_{10}^s = 0, \text{ на линии } y=b. \quad (34)$$

Исходя из того, что перемещения w^s и углы поворота θ^s, ω^s на сторонах s -го прямоугольного конечного элемента пластины изменяются кубической параболой, для выполнения условий (25) во всех точках, соответствующих линиям контура срединной плоскости пластины, предположим

$$\theta^s(0,0) = 0, \theta^s(0,b) = 0, \text{ на линии } x=0; \theta^s(a,0) = 0, \theta^s(a,b) = 0, \text{ на линии } x=a; \quad (35)$$

$$\omega^s(0,0) = 0, \omega^s(a,0) = 0, \text{ на линии } y=0; \omega^s(0,b) = 0, \omega^s(a,b) = 0, \text{ на линии } y=b. \quad (36)$$

Исходя из соотношений (35) и (36), находим:

$$w_2^s = 0, w_6^s = 0, \text{ на линии } x=0, w_{10}^s = 0, w_{14}^s = 0, \text{ на линии } x=a, \quad (37)$$

$$w_3^s = 0, w_{15}^s = 0, \text{ на линии } y=0, w_7^s = 0, w_{11}^s = 0, \text{ на линии } y=b, \quad (38)$$

Для выполнения условий (26) для всех точек, соответствующих линиям контура срединной плоскости пластины, предположим

$$\gamma^s(0,0) = 0, \gamma^s(0,b) = 0, \text{ на линии } x=0; \gamma^s(a,0) = 0, \gamma^s(a,b) = 0, \text{ на линии } x=a; \quad (39)$$

$$\gamma^s(0,0) = 0, \gamma^s(a,0) = 0, \text{ на линии } y=0; \gamma^s(0,b) = 0, \gamma^s(a,b) = 0, \text{ на линии } y=b. \quad (40)$$

Исходя из соотношений (39) и (40), находим

$$w_4^s = 0, w_8^s = 0, w_{12}^s = 0, w_{16}^s = 0. \quad (41)$$

2. *Край пластинки свободно оперт.* В таком случае по этому краю равны нулю прогибы и изгибающие моменты. Здесь вместе с условиями (25), должны иметь место и следующие граничные условия:

$$\frac{\partial^2 w^s}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w^s}{\partial y^2} = 0|_{x=0,a}, \quad \frac{\partial^2 w^s}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w^s}{\partial x^2} = 0|_{y=0,b}. \quad (42)$$

Для узловых точек контура срединной плоскости пластины условия (42) примут вид:

$$M_x^s(0,0) = 0, M_x^s(0,b) = 0, M_x^s(a,b) = 0, M_x^s(a,0) = 0, \quad (43)$$

$$M_y^s(0,0) = 0, M_y^s(0,b) = 0, M_y^s(a,b) = 0, M_y^s(a,0) = 0. \quad (44)$$

Принимая во внимание формулы (2), (5) и (20), из соотношений (43) и (44) находим

$$a^2(6w_1^s - 4aw_3^s - 6w_{13}^s - 2aw_{15}^s) + \nu b^2(6w_1^s + 4bw_2^s - 6w_5^s + 2bw_6^s) = 0, \quad (45)$$

$$a^2(6w_5^s - 4aw_7^s - 6w_9^s - 2aw_{11}^s) - \nu b^2(6w_1^s + 2bw_2^s - 6w_5^s + 4bw_6^s) = 0, \quad (46)$$

$$a^2(6w_5^s - 2aw_7^s - 6w_9^s - 4aw_{11}^s) - vb^2(6w_9^s - 4bw_{10}^s - 6w_{13}^s - 2bw_{14}^s) = 0, \quad (47)$$

$$a^2(6w_1^s - 2aw_3^s - 6w_{13}^s - 4aw_{15}^s) + vb^2(6w_9^s - 2bw_{10}^s - 6w_{13}^s - 4bw_{14}^s) = 0, \quad (48)$$

$$b^2(6w_1^s + 4bw_2^s - 6w_5^s + 2bw_6^s) + va^2(6w_1^s - 4aw_3^s - 6w_{13}^s - 2aw_{15}^s) = 0, \quad (49)$$

$$b^2(6w_1^s + 2bw_2^s - 6w_5^s + 4bw_6^s) - va^2(6w_5^s - 4aw_7^s - 6w_9^s - 2aw_{11}^s) = 0, \quad (50)$$

$$b^2(6w_9^s - 4bw_{10}^s - 6w_{13}^s - 2bw_{14}^s) - va^2(6w_5^s - 2aw_7^s - 6w_9^s - 4aw_{11}^s) = 0, \quad (51)$$

$$b^2(6w_9^s - 2bw_{10}^s - 6w_{13}^s - 4bw_{14}^s) + va^2(6w_1^s - 2aw_3^s - 6w_{13}^s - 4aw_{15}^s) = 0. \quad (52)$$

Для выполнения условий (42) для всех точек, соответствующих линиям контура пластины, предположим

$$M_x^s(0, b/4) = 0, \quad M_x^s(0, 3b/4) = 0, \quad M_x^s(a, b/4) = 0, \quad M_x^s(a, 3b/4) = 0, \quad (53)$$

$$M_y^s(a/4, 0) = 0, \quad M_y^s(3a/4, 0) = 0, \quad M_y^s(a/4, b) = 0, \quad M_y^s(3a/4, b) = 0. \quad (54)$$

Принимая во внимание формулы (2), (5) и (20), из соотношений (53) и (54) находим:

$$\begin{aligned} & b^2(162w_1^s + 27bw_2^s - 108aw_3^s + 18abw_4^s + 30w_5^s - 9bw_6^s - 20aw_7^s - 6abw_8^s - \\ & - 30w_9^s + 9bw_{10}^s - 10aw_{11}^s - 3abw_{12}^s - 162w_{13}^s - 27bw_{14}^s - 54aw_{15}^s + 9abw_{16}^s) + \\ & + va^2(96w_1^s + 80bw_2^s - 96w_5^s + 16bw_6^s) = 0, \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} & b^2(30w_1^s + 9bw_2^s - 20aw_3^s + 6abw_4^s + 162w_5^s - 27bw_6^s - 108aw_7^s - 18abw_8^s - \\ & - 162w_9^s + 27bw_{10}^s - 54aw_{11}^s - 9abw_{12}^s - 30w_{13}^s - 9bw_{14}^s - 10aw_{15}^s + 3abw_{16}^s) - \\ & - va^2(96w_1^s + 16bw_2^s - 96w_5^s + 80bw_6^s) = 0, \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} & b^2(162w_1^s + 27bw_2^s - 54aw_3^s + 9abw_4^s + 30w_5^s - 9bw_6^s - 10aw_7^s - 3abw_8^s - \\ & - 30w_9^s + 9bw_{10}^s - 20aw_{11}^s - 6abw_{12}^s - 162w_{13}^s - 27bw_{14}^s - 108aw_{15}^s + 18abw_{16}^s) + \\ & + va^2(96w_9^s - 16bw_{10}^s - 96w_{13}^s - 80bw_{14}^s) = 0, \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} & b^2(30w_1^s + 9bw_2^s - 10aw_3^s + 3abw_4^s + 162w_5^s - 27bw_6^s - 54aw_7^s - 9abw_8^s - \\ & - 162w_9^s + 27bw_{10}^s - 108aw_{11}^s - 18abw_{12}^s - 30w_{13}^s - 9bw_{14}^s - 20aw_{15}^s + 6abw_{16}^s) - \\ & - va^2(96w_9^s - 80bw_{10}^s - 96w_{13}^s - 16bw_{14}^s) = 0, \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} & a^2(162w_1^s + 108bw_2^s - 27aw_3^s + 18abw_4^s - 162w_5^s + 54bw_6^s + 27aw_7^s + 9abw_8^s - \\ & - 30w_9^s + 10bw_{10}^s - 9aw_{11}^s - 3abw_{12}^s + 30w_{13}^s + 20bw_{14}^s + 9aw_{15}^s - 6abw_{16}^s) + \\ & + vb^2(96w_1^s - 80bw_{13}^s - 96w_3^s - 16bw_{13}^s) = 0, \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} & a^2(30w_1^s + 20bw_2^s - 9aw_3^s + 6abw_4^s - 30w_5^s + 10bw_6^s + 9aw_7^s + 3abw_8^s - \\ & - 162w_9^s + 54bw_{10}^s - 27aw_{11}^s - 9abw_{12}^s + 162w_{13}^s + 108bw_{14}^s + 27aw_{15}^s - 18abw_{16}^s) - \\ & - vb^2(96w_1^s - 16bw_3^s - 96w_{13}^s - 80bw_{15}^s) = 0, \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} & a^2(162w_1^s + 54bw_2^s - 27aw_3^s + 9abw_4^s - 162w_5^s + 108bw_6^s + 27aw_7^s + 18abw_8^s - \\ & - 30w_9^s + 20bw_{10}^s - 9aw_{11}^s - 6abw_{12}^s + 30w_{13}^s + 10bw_{14}^s + 9aw_{15}^s - 3abw_{16}^s) - \\ & - vb^2(96w_5^s - 80bw_7^s - 96w_9^s - 16bw_{11}^s) = 0, \end{aligned} \quad (61)$$

$$a^2(30w_1^s + 10bw_2^s - 9aw_3^s + 3abw_4^s - 30w_5^s + 20bw_6^s + 9aw_7^s + 6abw_8^s -$$

$$-162w_9^s + 108bw_{10}^s - 27aw_{11}^s - 18abw_{12}^s + 162w_{13}^s + 54bw_{14}^s + 27aw_{15}^s - 9abw_{16}^s) + \\ + \nu b^2 (96w_5^s - 16bw_7^s - 96w_9^s - 80bw_{11}^s) = 0. \quad (62)$$

3. *Свободный край.* В таком случае по этому краю равны нулю изгибающие моменты и приведенные перерезывающие силы. Здесь вместе с условиями (42) должны иметь место и следующие граничные условия:

$$R_x^s = \frac{\partial^3 w^s}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w^s}{\partial y^3} = 0 \Big|_{x=0,a}, R_y^s = \frac{\partial^3 w^s}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w^s}{\partial x^3} = 0 \Big|_{y=0,b}. \quad (63)$$

Для узловых точек контура срединной плоскости пластины граничные условия (63) переписутся в виде

$$R_x^s(0,0) = 0, R_x^s(0,b) = 0, R_x^s(a,b) = 0, R_x^s(a,0) = 0, \quad (64)$$

$$R_y^s(0,0) = 0, R_y^s(0,b) = 0, R_y^s(a,b) = 0, R_y^s(a,0) = 0. \quad (65)$$

Принимая во внимание формулы (2), (5) и (63), из соотношений (64) и (65) соответственно находим

$$b^2(12w_1^s - 6aw_3^s - 12w_{13}^s - 6aw_{15}^s) + (2 - \nu)a^3(6w_3^s - 4bw_4^s - 6w_7^s - 2bw_8^s) = 0, \quad (66)$$

$$b^2(12w_5^s + 6aw_7^s - 12w_9^s + 6aw_{11}^s) + (2 - \nu)a^3(6w_3^s - 2bw_{12}^s - 6w_7^s - 4bw_8^s) = 0, \quad (67)$$

$$b^2(12w_5^s + 6aw_7^s - 12w_9^s + 6aw_{11}^s) - (2 - \nu)a^3(6w_{11}^s + 4bw_{12}^s - 6w_{15}^s + 2bw_{16}^s) = 0, \quad (68)$$

$$b^2(12w_1^s - 6aw_3^s - 12w_{13}^s - 6aw_{15}^s) - (2 - \nu)a^3(6w_{11}^s + 2bw_{12}^s - 6w_{15}^s - 4bw_{16}^s) = 0, \quad (69)$$

$$a^2(12w_1^s + 6bw_2^s - 12w_5^s + 6bw_6^s) - (2 - \nu)b^3(6w_2^s + 4aw_4^s - 6w_{14}^s + 2aw_{16}^s) = 0, \quad (70)$$

$$a^2(12w_1^s + 6bw_2^s - 12w_5^s + 6bw_6^s) - (2 - \nu)b^3(6w_6^s + 4aw_8^s - 6w_{10}^s + 2aw_{12}^s) = 0, \quad (71)$$

$$a^2(12w_9^s - 6bw_{10}^s - 12w_{13}^s - 6bw_{14}^s) - (2 - \nu)b^3(6w_6^s + 2aw_8^s - 6w_{10}^s + 4aw_{12}^s) = 0, \quad (72)$$

$$a^2(12w_9^s - 6bw_{10}^s - 12w_{13}^s - 6bw_{14}^s) - (2 - \nu)b^3(6w_2^s + 2aw_4^s - 6w_{14}^s + 4aw_{16}^s) = 0. \quad (73)$$

Для выполнения граничных условий (63) для всех точек, соответствующих линиям контура срединной плоскости пластины, предположим

$$R_x^s(0, b/4) = 0, R_x^s(0, 3b/4) = 0, R_x^s(a, b/4) = 0, R_x^s(a, 3b/4) = 0,$$

$$R_y^s(a/4, 0) = 0, R_y^s(3a/4, 0) = 0, R_y^s(a/4, b) = 0, R_y^s(3a/4, b) = 0,$$

Откуда, принимая во внимание формулы (2), (5) и (63), находим:

$$324w_1^s + 54bw_2^s - 162aw_3^s + 27abw_4^s - 60w_5^s + 18bw_6^s - 30aw_7^s - 9abw_8^s + \\ + 60w_9^s - 18bw_{10}^s - 30aw_{11}^s - 9abw_{12}^s - 324w_{13}^s - 54bw_{14}^s - 162aw_{15}^s + 27abw_{16}^s + \\ + 16(2 - \nu)a^3 / b^2 (6w_3^s - 5bw_4^s - 6w_7^s - bw_8^s) = 0, \quad (74)$$

$$60w_1^s + 18bw_2^s - 30aw_3^s + 9abw_4^s - 324w_5^s + 54bw_6^s - 162aw_7^s - 27abw_8^s + \\ + 324w_9^s - 54bw_{10}^s - 162aw_{11}^s - 27abw_{12}^s - 60w_{13}^s - 18bw_{14}^s - 30aw_{15}^s + 9abw_{16}^s - \\ - 16(2 - \nu)a^3 / b^2 (6w_3^s - bw_4^s - 6w_7^s - 5bw_8^s) = 0, \quad (75)$$

$$324w_1^s + 54bw_2^s - 162aw_3^s + 27abw_4^s - 60w_5^s + 18bw_6^s - 30aw_7^s - 9abw_8^s + \\ + 60w_9^s - 18bw_{10}^s - 30aw_{11}^s - 9abw_{12}^s - 324w_{13}^s - 54bw_{14}^s - 162aw_{15}^s + 27abw_{16}^s -$$

$$-16(2-\nu)a^3/b^2(6w_{11}^s + bw_{12}^s - 6w_{15}^s + 5bw_{16}^s) = 0, \quad (76)$$

$$60w_1^s + 18bw_2^s - 30aw_3^s + 9abw_4^s - 324w_5^s + 54bw_6^s - 162aw_7^s - 27abw_8^s + \\ + 324w_9^s - 54bw_{10}^s - 162aw_{11}^s - 27abw_{12}^s - 60w_{13}^s - 18bw_{14}^s - 30aw_{15}^s + 9abw_{16}^s + \\ + 16(2-\nu)a^3/b^2(6w_{11}^s + 5bw_{12}^s - 6w_{15}^s + bw_{16}^s) = 0, \quad (77)$$

$$324w_1^s + 162bw_2^s - 54aw_3^s + 27abw_4^s - 324w_5^s + 162bw_6^s + 54aw_7^s + 27abw_8^s - \\ - 60w_9^s + 30bw_{10}^s - 18aw_{11}^s - 9abw_{12}^s + 60w_{13}^s + 30bw_{14}^s + 18aw_{15}^s - 9abw_{16}^s - \\ - 16(2-\nu)b^3/a^2(6w_2^s + 5aw_4^s - 6w_{14}^s + aw_{16}^s) = 0, \quad (78)$$

$$60w_1^s + 30bw_2^s - 18aw_3^s + 9abw_4^s - 60w_5^s + 30bw_6^s + 18aw_7^s + 9abw_8^s - \\ - 324w_9^s + 162bw_{10}^s - 54aw_{11}^s - 27abw_{12}^s + 324w_{13}^s + 162bw_{14}^s + 54aw_{15}^s - 27abw_{16}^s + \\ + 16(2-\nu)b^3/a^2(6w_2^s + aw_4^s - 6w_{14}^s + 5aw_{16}^s) = 0, \quad (79)$$

$$324w_1^s + 162bw_2^s - 54aw_3^s + 27abw_4^s - 324w_5^s + 162bw_6^s + 54aw_7^s + 27abw_8^s - \\ - 60w_9^s + 30bw_{10}^s - 18aw_{11}^s - 9abw_{12}^s + 60w_{13}^s + 30bw_{14}^s + 18aw_{15}^s - 9abw_{16}^s - \\ - 16(2-\nu)b^3/a^2(6w_6^s + 5aw_8^s - 6w_{10}^s + aw_{12}^s) = 0, \quad (80)$$

$$60w_1^s + 30bw_2^s - 18aw_3^s + 9abw_4^s - 60w_5^s + 30bw_6^s + 18aw_7^s + 9abw_8^s - \\ - 324w_9^s + 162bw_{10}^s - 54aw_{11}^s - 27abw_{12}^s + 324w_{13}^s + 162bw_{14}^s + 54aw_{15}^s - 27abw_{16}^s + \\ + 16(2-\nu)b^3/a^2(6w_6^s + aw_8^s - 6w_{10}^s + 5aw_{12}^s) = 0. \quad (81)$$

Условия непрерывности обобщенных переменных

Заметим, что прогибы w^s и углы поворота θ^s , ω^s вдоль сторон опорного контура прямоугольного конечного элемента изменяются по закону кубической параболы, а угол сдвига γ^s – по закону квадратичной параболы. Так как узловые значения обобщенных перемещений $f^s = (w^s, \theta^s, \omega^s, \gamma^s)^T$ выбраны в качестве основных неизвестных, то они являются общими для элементов, примыкающих к данному узлу. С другой стороны, в направлении линии стыка θ^s и ω^s являются первыми производными прогиба w^s , а γ^s – для углов поворота θ^s и ω^s , поэтому вдоль границы разделов любые соседние кромки двух смежных прямоугольных элементов получат одинаковые прогибы и углы поворота.

Для обеспечения непрерывности углов сдвига на границах разделов прямоугольных элементов введем дополнительные точки, на которых будет задано условие непрерывности углов сдвига. Возьмем эти точки в центре сторон конечных элементов. Тогда условия непрерывности углов сдвига в смежном сечении вдоль границы разделов s -го и $(s+1)$ -го, а также s -го и $(s+2)$ -го конечных элементов (рис. 2) зададутся соотношениями

$$\gamma_{xy}^s\left(\frac{a}{2}, b\right) = \gamma_{xy}^{s+1}\left(\frac{a}{2}, 0\right), \quad \gamma_{xy}^s\left(a, \frac{b}{2}\right) = \gamma_{xy}^{s+2}\left(0, \frac{b}{2}\right).$$

Откуда, используя формулу $\gamma^s = \partial^2 w^s / \partial x \partial y$ для смежных сечений $i+1, i$ и j, i , параллельных осям x и y (рис. 2), получим, что они тождественно удовлетворяются. Следовательно, исходя из формул (20), можно заключить, что здесь тождественно удовлетворяются также и условия непрерывности крутящих моментов вдоль границы разделов двух смежных элементов.

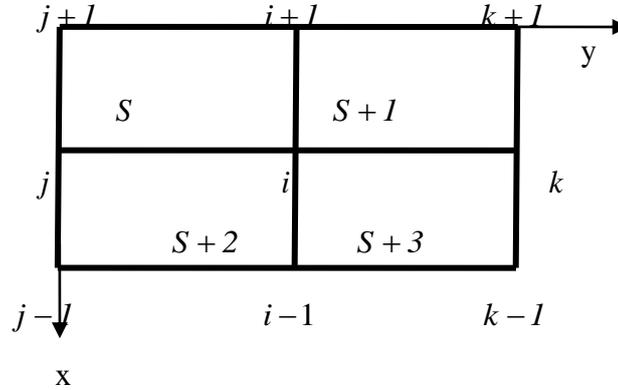


Рис. 2. i -й узел. Совокупность прямоугольных конечных элементов

Условия непрерывности изгибающих моментов и перерезывающих сил вдоль сторон контура

Функция w^s , задаваемая формулой (2), обеспечивает непрерывность обобщенных перемещений $f_s = (w^s, \theta^s, \omega^s, \gamma^s)^T$ и крутящих моментов, но не обеспечивает непрерывности изгибающих моментов M_x, M_y и перерезывающих сил R_x, R_y . Условия непрерывности изгибающих моментов M_x, M_y и перерезывающих сил R_y, R_x вдоль границы разделов смежных сечений $i+1, i$ и j, i , параллельных осям x и y (рис. 2), зададим соотношениями

$$M_y(\xi, b) = M_y(\xi, 0), \quad M_x(a, \eta) = M_x(0, \eta), \quad (82)$$

$$R_y(\xi, b) = R_y(\xi, 0), \quad R_x(a, \eta) = R_x(0, \eta). \quad (83)$$

С учетом формул (20), (21) и (2), (5) из этих условий соответственно получим:

$$3w_1^j + bw_2^j + 4bw_2^i - 3w_1^k + bw_2^k = 0, \quad (84)$$

$$3w_1^{i-1} + aw_3^{i-1} + 4aw_3^i - 3w_1^{i+1} + aw_3^{i+1} = 0, \quad (85)$$

$$-3w_3^j + bw_4^j + 4bw_4^i + 3w_3^k + bw_4^k = 0, \quad (86)$$

$$3w_2^{i+1} + aw_4^{i+1} + 4aw_4^i - 3w_2^{i-1} + aw_4^{i-1} = 0, \quad (87)$$

$$2w_1^j + bw_2^j - 4w_1^i + 2w_1^k - bw_2^k = 0, \quad (88)$$

$$2w_1^{i+1} - aw_3^{i+1} - 4w_1^i + 2w_1^{i-1} + aw_3^{i-1} = 0. \quad (89)$$

$$2w_3^j - bw_4^j - 4w_3^i + 2w_3^k + bw_4^k = 0, \quad (90)$$

$$2w_2^{i+1} + aw_4^{i+1} - 4w_2^i + 2w_2^{i-1} - aw_4^{i-1} = 0. \quad (91)$$

Соотношения (86)–(87) являются условиями непрерывности перерезывающих сил в i -ом узле (рис. 2), которые соответственно задаются равенствами

$$R_x^s = R_x^{s+1}, \quad R_y^s = R_y^{s+2}. \quad (92)$$

При выполнении условий (83) или (88)–(91) условия (92) или, что то же, (86)–(87), тождественно выполняются.

Исключая из уравнений (84)–(91) переменные w_1^i , w_2^i , w_3^i и w_4^i , получим

$$-3aw_3^j + abw_4^j + 3aw_3^k + abw_4^k - 3bw_2^{i+1} - abw_4^{i+1} + 3bw_2^{i-1} - abw_4^{i-1} = 0, \quad (93)$$

$$2w_1^j + bw_2^j + 2w_1^k - bw_2^k - 2w_1^{i+1} + aw_3^{i+1} - 2w_1^{i-1} - aw_3^{i-1} = 0, \quad (94)$$

$$2aw_3^j - abw_4^j + 2aw_3^k + abw_4^k + 3w_1^{i-1} + aw_3^{i-1} - 3w_1^{i+1} + aw_3^{i+1} = 0, \quad (95)$$

$$3w_1^j + bw_2^j - 3w_1^k + bw_2^k + 2bw_2^{i+1} + abw_4^{i+1} + 2bw_2^{i-1} - abw_4^{i-1} = 0. \quad (96)$$

Равенство (93) получено из связей (86)–(87) и при выполнении условия (94)–(96) оно тождественно выполняется.

Перепишем все условия (94)–(96) в виде системы уравнений:

$$Hq = 0, \quad (97)$$

где H - матрица порядка $\bar{n} \times 4n$, \bar{n} - количество необходимых условий (94) – (96).

С учетом условий непрерывности изгибающих моментов и перерезывающих сил (97), взамен задачи (19) получим

$$\min\{0.5w^T \Phi w + C^T w \mid Aw < 0, Hq = 0, \text{краевые условия}\}. \quad (98)$$

Тестовые задачи

Пример 1. Рассмотрим квадратную пластину, жестко защемленную по всем сторонам, которая загружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q . Для решения задачи использована сетка 4×4 (рис. 3). Результаты расчета приведены в табл. 1.

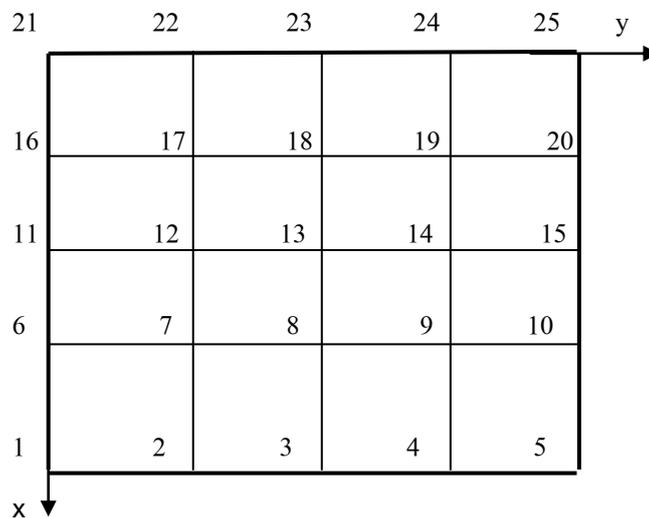


Рис. 3. Схема сетки. Сетка 4×4

Таблица 1

Прогибы и моменты в жестко заделанной квадратной пластине в зависимости от учетных условий

Тип условий	Перемещение в узле 13 (максимальный прогиб)	Изгибающий момент $M_x = M_y$ в узле 13
С кинематическими граничными условиями для узловых точек контура срединной плоскости пластины	0,340454	0,421026
С кинематическими граничными условиями для всех точек контура срединной плоскости пластины	0,324954	0,401996
С кинематическими граничными условиями для всех точек контура срединной плоскости пластины и с учетом непрерывности изгибающих и крутящих моментов	0,324116	0,382379
С кинематическими граничными условиями для всех точек контура срединной плоскости пластины и с учетом непрерывности изгибающих моментов и перерезывающих сил	0,324528	0,390008
Точное решение (решение Навье)	0,322560	0,369600
Множитель	qa^2b^2/D	qa^2

Пример 2. Рассмотрим квадратную пластину, все края которой свободно оперты и она нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q . Для решения задачи используем сетку 4×4 (рис. 3). Результаты расчета приведены в табл. 2.

Таблица 2

Прогибы и моменты свободно опертой квадратной пластинки при изгибе в зависимости от учетных условий

Тип условий	Перемещение в узле 13 (максимальный прогиб)	Изгибающий момент $M_x = M_y$ в узле 13
С кинематическими граничными условиями для узловых точек контура срединной плоскости пластины	0,996108	0,770226
С кинематическими граничными условиями для всех точек контура срединной плоскости пластины	0,994067	0,770338
С кинематическими граничными условиями для всех точек и статическими граничными условиями для узловых точек контура срединной плоскости пластины	0,994152	0,770991
С кинематическими граничными условиями для всех точек и статическими граничными условиями для узловых точек контура срединной плоскости пластины и с учетом непрерывности изгибающих и крутящих моментов	0,993927	0,760229
С кинематическими граничными условиями для для всех точек и статическими граничными условиями для узловых точек контура срединной плоскости пластины и с учетом непрерывности изгибающих моментов и перерезывающих сил	0,994593	0,769203
Точное решение (решение Навье)	1,039360	0,71540
Множитель	qa^2b^2/D	qa^2

Пример 3. Рассмотрим квадратную пластину, свободно опертую по двум противоположным краям 1-5, 21-25 (рис.3) и свободную по двум другим. Пластина загружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью. Результаты расчета приведены в табл. 3.

Таблица 3

Прогибы и моменты свободно опертой по двум противоположным краям и свободной по двум другим квадратной пластинки при изгибе

Тип условий	Перемещение в узле 13	Изгибающие моменты M_x и M_y в узле 13
С кинематическими граничными условиями для узловых точек контура срединной плоскости пластины	3,18777	1,96992 и 0,460118
С кинематическими граничными условиями для всех точек контура срединной плоскости пластины	3,18443	1,96922 и 0,461496
С кинематическими граничными условиями для всех точек и статическими граничными условиями для узловых точек контура срединной плоскости пластины	3,1873	1,97231 и 0,462562
С кинематическими граничными условиями для всех точек и статическими граничными условиями для узловых точек контура срединной плоскости пластины и с учетом непрерывности изгибающих и крутящих моментов	3,18783	1,95386 и 0,401782
С кинематическими граничными условиями для всех точек и статическими граничными условиями для узловых точек контура срединной плоскости пластины и с учетом непрерывности изгибающих моментов и перерезывающих сил	3,18872	1,96408 и 0,469036
Точное решение (решение Навье)	3,341404	1,960000 и 0,433600
Множитель	qa^2b^2/D	qa^2

Заключение

Исходя из полученных результатов при решении трех вышеприведенных тестовых задач, можно заключить, что учет непрерывности изгибающих моментов, перерезывающих сил и граничных условий для всех точек контура срединной плоскости пластины существенно увеличивает точность решения задачи.

Ն.Վ.Փիրույան

ՏԱՍԵՅ ԱԶԱՏՈՒԹՅԱՆ ԱՍՏԻՃԱՆՆԵՐՈՎ ՈՒՂՂԱՆԿՑՈՒՆԱԶԵՎ ՎԵՐՁԱՎՈՐ ՏԱՐԲԵՐՈՎ ԶԵՎԱՓՈՒՎԱԾ ԵՂԱՆԱՎ՝ ՍԱԼԵՐԻ ԾՈՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՀԱՄԱՐ

Դիտարկվում է տասնվեց ազատության աստիճաններով ուղղանկյունաձև վերջավոր տարրերով ձևափոխված եղանակը՝ սալերի ծոման խնդիրների լուծման համար, որում հաշվի են առնվում երկրաչափական և ստատիկ եզրային պայմանները սալերի միջին հարթության եզրագծի բոլոր կետերի համար, ինչպես նաև ծոռղ և ոլորող մոմենտների կտրող ուժերի անընդհատության պայմանները հարակից տարրերի հպման գծի վրա:

Առանցքային բառեր. վերջավոր տարրեր, քառակուսային ծրագրավորում, տեղափոխություններ, սալ, ծռում

N.V.Pirumyan

THE MODIFIED METHOD OF RECTANGULAR FINITE ELEMENTS WITH SIXTEEN DEGREES OF FREEDOM FOR SOLVING THE PROBLEMS OF PLATE BENDING

Considered the method of finite element of rectangular shape with sixteen degrees of freedom to meet the challenges of the cross plate bending, taking into account the boundary conditions for all the points of the contour of the middle plane of the plate, the terms of the continuity of generalized displacement and torque across the line of contact between adjacent elements, the continuity conditions of bending moments and shear forces at grid points.

Keywords: *final elements, movements, quadratic programming, plate, bending*

Литература

1. **Амбарцумян С. А.** Микрополярная теория оболочек и пластин. – Ереван: Национальная академия наук республики Армения, 2013. - 222 с.
2. **Геворкян Г.А.** Механические модели и алгоритмы решения задач математического программирования.- Ереван : Изд-во АН Армянской ССР, 1987.- 184 с.
3. **Зенкевич О., Чанг И.** Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред. - М.: Недра, 1974. - 240 с.
4. Лурье А. И. Теория упругости.- М.: Наука, 1970.- 940 с.
5. **Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.** Пластинки и оболочки. -М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. - 636 с.

Աշխատանքն իրականացված է ՀՀ պետական բյուջեից գիտական և գիտատեխնիկական գործունեության բազային ֆինանսավորմամբ «Գիտահետազոտական սեկտորի պահպանում և զարգացում» ծրագրի շրջանակում:

Փիրումյան Նարինե Վիլիկի, տ.գ.թ. (ՀՀ, ք.Երևան) - ՃՇՀԱՀ, Գիտահետազոտական սեկտորի պահպանում և զարգացում ծրագրի ղեկավար, տ.գ.տ., (+374)10580541, science@ysuac.am,

Пирумян Нарине Виликовна, к.т.н. (РА, г.Ереван) - НУАСА, проблемная лаборатория Сохранения и развития научно-исследовательского сектора, рук. программы, с.н.с., (+374)10580541, science@ysuac.am,

Pirumyan Narine Vilik, doctor of engineering (RA, Yerevan) - NUACA, Problem laboratory of preservation and development of scientific research sector, programme supervisor, senior scientific researcher, (+374)10580541, science@ysuac.am,

Ներկայացվել է՝ 15.03.2017թ.

Ընդունվել է տպագրության՝ 14.04.2017թ.