УДК 624.042 СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

И.А.Краснобаев,
И.А.Маяцкая

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ТРЕХСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОСЕВОЙ СИЛЫ

Расчет трехслойных оболочек различной формы представляет собой актуальную задачу строительной механики. Предлагается расчет трехслойных цилиндрических оболочек с легким заполнителем под действием осевой силы. В исследовании рассмотрены различные виды нагружения: осевые силы и моменты, распределенные по кольцу, а также нагрузка, приложенная к одному из несущих слоев. Получены уравнения для определения деформации срединной поверхности несущих слоев для них. Можно рассмотреть различные граничные условия на краях оболочки.
Ключевые слова: *оболочка, прочность, изгиб, прогиб, слой, легкий заполнитель*

Настоящая работа является продолжением исследований, посвященных расчету пластин и оболочек [1-5]. Особое место занимают многослойные конструкции [6-10]. Рассмотрим трехслойную цилиндрическую оболочку, нагруженную осевыми силами, равномерно распределенными по кольцу (рис. 1).

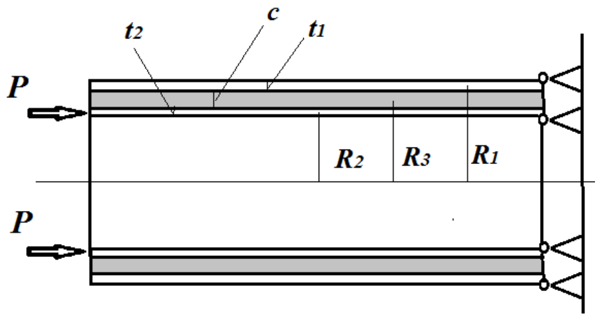

Рис. 1. Трехслойная цилиндрическая оболочка, нагруженная осевыми силами, равномерно распределенными по кольцу

Если при нагружении осевой силой трехслойной оболочки с легким заполнителем сила приложена к обоим несущим слоям, то напряжения в них равномерно распределяются по длине и периметру оболочки, и их определение не вызывает затруднений.

В данной работе рассмотрен другой случай: нагрузка приложена к одному из несущих слоев, что приводит к нагружению моментом, приложенным к обоим несущим слоям (рис. 2).

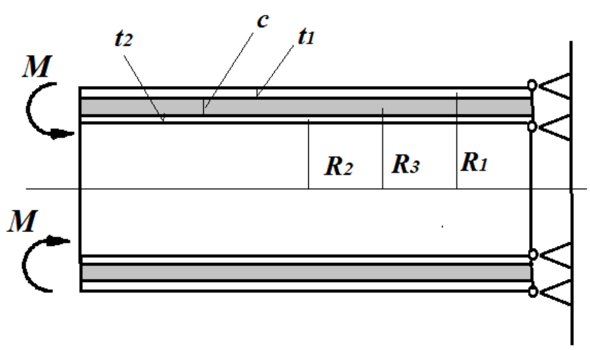

Рис. 2. Трехслойная цилиндрическая оболочка, нагруженная моментами, равномерно распределенными по кольцу

В этом случае происходит перераспределение усилий с нагруженного слоя на ненагруженный, величина которых равна (рис. 3).

$$P_{экв} = \frac{M}{c + \frac{t_1 + t_2}{2}} .$$

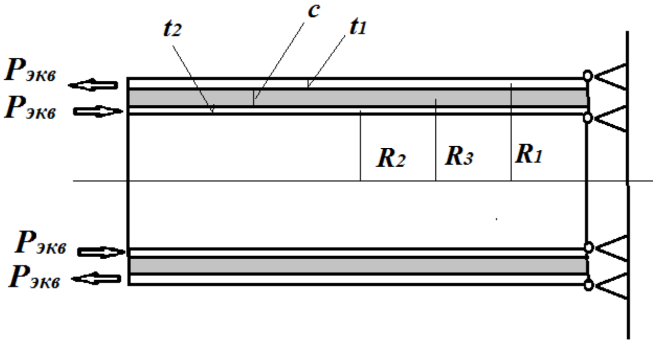

Рис. 3. Трехслойная цилиндрическая оболочка, нагруженная эквивалентными силами, приложенными к несущим слоям

Рассмотрим оболочку с легким заполнителем и внешним и внутренним несущими слоями. Обозначим: t_1, t_2 – толщины несущих слоев; c – толщина заполнителя; E_i , ν_i –модуль упругости и коэффициент Пуассона материала i-го слоя оболочки; R_i – радиус срединной поверхности i-го слоя оболочки, $i = 1,2,3$.

Сближением слоев не пренебрегаем. Система уравнений равновесия трехслойной цилиндрической оболочки может быть записана в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial\alpha^2} + \frac{(1-\nu_1)}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\beta^2} - a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \frac{(1+\nu_1)}{2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial\alpha\partial\beta} + a_{15}\frac{\partial w_1}{\partial\alpha} - a_{16}\frac{\partial w_2}{\partial\alpha} = S_1 X_1 ; \tag{1}$$

$$a_{21}u_1 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial\alpha^2} + \frac{(1-\nu_2)}{2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\beta^2} - a_{22}u_2 + \frac{(1+\nu_2)}{2}\xi^2\frac{\partial^2 v_2}{\partial\alpha\partial\beta} + a_{25}\frac{\partial w_1}{\partial\alpha} + a_{26}\frac{\partial w_2}{\partial\alpha} = S_2 X_2 ; \tag{2}$$

$$\frac{(1+\nu_2)}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial\beta^2} + \frac{(1-\nu_1)}{2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial\alpha^2} - a_{33}v_1 + a_{34}v_2 + +a_{35}\frac{\partial w_1}{\partial\beta} - a_{36}\frac{\partial w_2}{\partial\beta} = S_1 Y_1 ; \tag{3}$$

$$\frac{(1+\nu_2)}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\alpha\partial\beta} + a_{43}v_1 + \frac{\partial^2 v_2}{\partial\beta^2} + \frac{(1-\nu_1)}{2}\frac{\partial^2 v_2}{\partial\alpha^2} - a_{44}v_2 + a_{45}\frac{\partial w_1}{\partial\beta} + a_{46}\frac{\partial w_2}{\partial\beta} = S_2 Y_2 ; \tag{4}$$

$$a_{51}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha} + a_{52}\frac{\partial u_2}{\partial\alpha} + a_{53}\frac{\partial v_1}{\partial\beta} + a_{54}\frac{\partial v_2}{\partial\beta} + a_{55}w_1 + a_{56}w_2 = -S_1 Z_1 ; \tag{5}$$

$$-a_{61}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha} + a_{62}\frac{\partial u_2}{\partial\alpha} - a_{63}\frac{\partial v_1}{\partial\beta} + a_{64}\frac{\partial v_2}{\partial\beta} + a_{65}w_1 + a_{66}w_2 = -S_2 Z_2 , \tag{6}$$

где u_i, v_i, w_i – деформации срединной поверхности несущих слоев, $i = 1,2$; $\alpha = \frac{x}{R_3}$, $\beta = \frac{y}{R_3}$ – относительные координаты.

Изгибной жесткостью несущих слоев пренебрегаем. Коэффициенты a_{ij} определяются по формуле

$$a_{11}=a_{33}=a_{34}=\frac{S_1\mu_3}{c}\,,\quad a_{21}=a_{43}=a_{44}=\frac{S_2\mu_3}{c}\,,\quad a_{15}=\frac{\nu_1}{\gamma_1}-\frac{S_1\mu_3}{c}\left(1+\frac{t_1}{c}\right), \tag{7}$$

$$a_{51}=\frac{\nu_1}{\gamma_1}+\frac{S_1\Delta_3^*}{2R_3}\,,\quad a_{16}=a_{36}=\frac{S_1\mu_3}{c}\cdot\frac{t_2}{2R_3}\,,\quad a_{61}=a_{63}=\frac{S_2\mu_3}{2R_3}\,,\quad a_{25}=a_{45}=\frac{S_2\mu_3}{c}\cdot\frac{t_1}{2R_3}\,, \tag{8}$$

$$a_{52}=a_{54}=-\frac{S_1\mu_3}{2R_3}\,,\quad a_{26}=\frac{\nu_2}{\gamma_2}+\frac{S_2\mu_3}{R_3}\left(1+\frac{t_2}{2c}\right),\quad a_{62}=\frac{\nu_2}{\gamma_2}-\frac{S_2\Delta_3^*}{2R_3}\,, \tag{9}$$

$$a_{35}=\frac{1}{\gamma_1}-\frac{S_1\mu_3}{R_3}\left(1+\frac{t_1}{2c}\right),\quad a_{53}=\frac{1}{\gamma_1}+\frac{S_1\Delta_3^*}{2R_3}\,,\quad a_{46}=\frac{1}{\gamma_2}+\frac{S_2\mu_3}{R_3}\left(1+\frac{t_2}{2c}\right),\quad a_{64}=\frac{1}{\gamma_2}-\frac{S_2\Delta_3^*}{2R_3}\,, \tag{10}$$

$$a_{56}=\frac{1}{\gamma_1^2}+\frac{S_1\Delta_3}{c}\,,\quad a_{56}=-\frac{S_1\Delta_3}{c}\,,\quad a_{65}=-\frac{S_2\Delta_3}{c}\,,\quad a_{66}=\frac{1}{\gamma_2^2}+\frac{S_2\Delta_3}{c}\,, \tag{11}$$

где λ_3, μ_3 – коэффициенты сплошного изотропного заполнителя.

Другие величины, входящие в уравнения (7) – (11), определяются следующими уравнениями:

$$\lambda_3=\frac{E_3\nu_3}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)};\quad \mu_3=\frac{E_3}{2(1+\nu_3)};\quad \Delta_3=\lambda_3+\mu_3;\quad \Delta_3^*=\lambda_3+2\mu_3; \tag{12}$$

$$S_1=\frac{1-\nu_1^2}{2}R_3^2;\quad S_2=\frac{1-\nu_2^2}{2}R_3^2;\quad \gamma_1=\frac{R_1}{R_3};\quad \gamma_2=\frac{R_2}{R_3}\,. \tag{13}$$

Так как не учитывается изгибная жесткость несущих слоев, то не учитываются и изгибающие моменты в несущих слоях, пропорциональные второй производной прогиба слоя по нормали к срединной поверхности оболочки, а именно:

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial\alpha^2},\ \frac{\partial^2 w_2}{\partial\alpha^2};\qquad \frac{\partial^2 w_1}{\partial\beta^2},\ \frac{\partial^2 w_2}{\partial\beta^2};\qquad \frac{\partial^2 w_1}{\partial\alpha\partial\beta},\ \frac{\partial^2 w_2}{\partial\alpha\partial\beta}\,. \tag{14}$$

Рассмотрим только осесимметричную деформацию. В результате получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial\alpha^2}-a_{11}u_1+a_{12}u_2+a_{15}\frac{\partial w_1}{\partial\alpha}-a_{16}\frac{\partial w_2}{\partial\alpha}=0; \tag{15}$$

$$a_{21}u_1+\frac{\partial^2 u_2}{\partial\alpha^2}-a_{22}u_2+a_{25}\frac{\partial w_1}{\partial\alpha}+a_{26}\frac{\partial w_2}{\partial\alpha}=0; \tag{16}$$

$$a_{51}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha}+a_{52}\frac{\partial u_2}{\partial\alpha}+a_{55}w_1+a_{56}w_2=0; \tag{17}$$

$$-a_{61}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha}+a_{62}\frac{\partial u_2}{\partial\alpha}+a_{65}w_1+a_{66}w_2=0\,. \tag{18}$$

Решая совместно уравнения (17) и (18), получаем

$$w_1=A_1\frac{du_1}{d\alpha}+A_2\frac{du_2}{d\alpha}\,,\quad w_2=A_3\frac{du_1}{d\alpha}+A_4\frac{du_2}{d\alpha}\,, \tag{19}$$

где

$$A_1 = -\frac{a_{66} \cdot a_{51} + a_{61} \cdot a_{56}}{a_{55} \cdot a_{66} - a_{65} \cdot a_{56}};\ \ A_2 = -\frac{a_{66} \cdot a_{52} + a_{62} \cdot a_{56}}{a_{55} \cdot a_{66} - a_{65} \cdot a_{56}};\ A_3 = -\frac{a_{51}}{a_{55}} - A_1;\ A_4 = -\frac{a_{52}}{a_{55}} - A_2 . \qquad (20)$$

Дифференцируя w_1 и w_2 по α и подставляя в уравнения (15) и (16), получим систему уравнений

$$\left(a_{26} + A_1 A_6\right)\frac{d^2 u_1}{d\alpha^2} - A_5 u_1 + \left(a_{16} + A_2 A_6\right)\frac{d^2 u_2}{d\alpha^2} + A_5 u_2 = 0; \qquad (21)$$

$$\left(1 + a_{15} A_1 - a_{16} A_3\right)\frac{d^2 u_1}{d\alpha^2} - a_{11} u_1 + \left(a_{15} A_2 - a_{16} A_4\right)\frac{d^2 u_2}{d\alpha^2} + a_{11} u_2 = 0, \qquad (22)$$

где $$A_5 = a_{11} \cdot a_{26} - a_{24} \cdot a_{16}, \qquad A_6 = a_{15} \cdot a_{26} + a_{25} \cdot a_{16}. \qquad (23)$$

Умножив первое уравнение на a_{11}, а второе на A_5 и вычитая из (21) уравнение (22), получим

$$\left[\left(a_{26} + A_1 A_6\right)a_{11} - \left(1 + a_{15} A_1 - a_{16} A_3\right)A_5\right]\frac{d^2 u_1}{d\alpha^2}_1 + \left[\left(a_{16} + A_2 A_6\right)a_{11} - \left(a_{15} A_2 - a_{16} A_4\right)A_5\right]\frac{d^2 u_2}{d\alpha^2} = 0. \qquad (24)$$

Приведем это уравнение к виду

$$\frac{d^2 u_1}{d\alpha^2} + D_1 \frac{d^2 u_2}{d\alpha^2} = 0, \qquad (25)$$

где $$D_1 = \frac{\left(a_{16} + A_2 A_6\right)a_{11} - \left(a_{15} A_2 - a_{16} A_4\right)A_5}{\left(a_{26} + A_1 A_6\right)a_{11} - \left(1 + a_{15} A_1 - a_{16} A_3\right)A_5}. \qquad (26)$$

Проинтегрировав дважды уравнение (25), получим:

$$u_1 = -D_1 u_2 + C_1 \alpha + C_2, \qquad (27)$$

где C_1, C_2 – постоянные коэффициенты интегрирования.

Подставив выражения для u_1 и $\frac{d^2 u_1}{d\alpha^2}$ в уравнение (21), получим дифференциальное уравнение для определения u_2

$$\frac{d^2 u_2}{d\alpha^2} + A_7 (1 + D_1) u_2 = A_7 C_1 \alpha + A_7 C_2, \qquad (28)$$

где $$A_7 = \frac{A_5}{\left(a_{16} + A_6 A_2\right) - \left(a_{26} + A_1 A_6\right)D_1}. \qquad (29)$$

Общее решение однородного уравнения (28) имеет вид

$$u_2 = C_3 e^{\rho_1 \alpha} + C_4 e^{-\rho_1 \alpha}, \qquad (30)$$

где $\rho_{1,2} = \pm\sqrt{-A_7 (1 + D_1)}$ – корень характеристического уравнения,

$$\rho^2 + A_7 (1 + D_1) = 0. \qquad (31)$$

Частное решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$u_{2ч} = B_1 \alpha + B_2,$$

где $B_1 = \dfrac{C_1}{1+D_1}$, $B_2 = \dfrac{C_2}{1+D_1}$. (32)

Общее решение уравнения (28) принимает следующий вид:

$$u_2 = C_3 e^{\rho_1 \alpha} + C_4 e^{-\rho_1 \alpha} + \frac{C_1}{1+D_1}\alpha + \frac{C_2}{1+D_1}. \tag{33}$$

Из уравнения (27) найдем u_1

$$u_1 = -D_1 C_3 e^{\rho_1 \alpha} - D_1 C_4 e^{-\rho_1 \alpha} + \frac{1-D_1}{1+D_1}\left(C_1 \alpha + C_2\right). \tag{34}$$

Продифференцировав u_1 и u_2 по α, найдем из (19) w_1 и w_2

$$w_1 = C_3 \rho_1 e^{\rho_1 \alpha}\left(A_2 - D_1 A_1\right) - C_4 \rho_1 e^{-\rho_1 \alpha}\left(A_2 - D_1 A_1\right) + \frac{C_1}{1+D_1}\left(A_1\left(1-D_1\right) + A_2\right), \tag{35}$$

$$w_2 = C_3 \rho_1 e^{\rho_1 \alpha}\left(A_4 - D_1 A_3\right) - C_4 \rho_1 e^{-\rho_1 \alpha}\left(A_4 - D_1 A_3\right) + \frac{C_1}{1+D_1}\left(A_3\left(1-D_1\right) + A_4\right). \tag{36}$$

Постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 определяются из граничных условий на краях оболочки.

Расчет многослойных оболочек различной формы является очень важной задачей строительной механики. Несомненно, представляет собой интерес цилиндрические трехслойные оболочки. В данном исследовании рассмотрены трехслойные цилиндрические оболочки с легким заполнителем и двумя несущими слоями (внешним и внутренним). Найдены уравнения прогибов срединной поверхности несущих слоев. Из общего решения следует, что необходимо определить константы из граничных условий. Можно рассмотреть как жесткую заделку оболочки, так и шарнирно опертое закрепление. Предложено аналитическое решение для расчета трехслойных цилиндрических оболочек.

Ի.Ա.Կրասնոբաև,
Ի.Ա.Մայացկայա

ԵՌԱՇԵՐՏ ԳԼԱՆԱՁԵՎ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ԱՄՐՈՒԹՅԱՆ ՀԱՇՎԱՐԿ ԱՌԱՆՑՔԱՅԻՆ ՈՒԺԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ

Տարբեր ձևերի եռաշերտ թաղանթների հաշվարկը շինարարական մեխանիկայի արդիական խնդիր է: Առաջարկվում է թեթև լցանյութով եռաշերտ գլանաձև թաղանթների հաշվարկն առանցքային ուժի ազդեցության տակ: Հետազոտությունում դիտարկված են բեռնավորման տարբեր տեսակներ. օղակով բաշխված առանցքային ուժեր և մոմենտներ, ինչպես նաև կրող շերտերից մեկին կիրառված բեռնվածք: Ստացվել են հավասարումներ կրող շերտերի միջին մակերևույթի դեֆորմացիաները որոշելու համար: Կարելի է դիտարկել տարբեր սահմանային պայմաններ թաղանթի եզրերին:

Առանցքային բառեր. *թաղանթ, ամրություն, ծռում, ճկվածք, շերտ, թեթև լցանյութ*

I.A. Krasnobaev,
I.A. Mayatskaya

STRENGTH CALCULATION OF THREE-LAYER CYLINDRICAL SHELLS UNDER AXIAL FORCE

Calculation of three-layer shells of various shapes is an actual problem of structural mechanics. In this paper a calculation of three-layer cylindrical shells with a light-weight aggregate under axial force is offered. The study deals with different types of loading: axial forces and moments distributed around the ring, as well as the load applied to one of the bearing layers. The equations to determine the deformations of bearing layers' middle surface are received. Different boundary conditions on the edges of the shell can be considered.
***Keywords**: shell, strength, bending, deflection, layer, light-weight aggregate*

Литература

1. **Огибалов П.М., Колтунов М.А.** Оболочки и пластины. – М.: Изд-во МГУ, 1969. – 695 с.
2. **Куршин Л.М.** Обзор работ по расчету трехслойных пластин и оболочек// Расчет пространственных конструкций. Вып. 7. – М.: Госстройиздат, 1962. – С. 163–192.
3. **Амосов А. А.** Техническая теория тонких упругих оболочек. – М.: Изд-во АСВ, 2009. – 304 с.
4. **Гольденвейзер А.Л.** Теории тонких упругих оболочек. – М.: Наука, 1976. – 512 с.
5. **Краснобаев И.А., Маяцкая И.А., Смирнов И.И., Язьев Б.М.** Теория пластин и оболочек. – Ростов-на-Дону: Изд-во РГСУ, 2012. – 114 с.
6. **Кобелев В.Н.** Расчет трехслойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1984. –304 с.
7. **Жилин П.А.** Прикладная механика. Основы теории оболочек. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2006. – 167 с.
8. **Болотин В.В., Новичков Ю.Н.** Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
9. **Краснобаев И.А., Полисмаков А.И., Маяцкая И.А.** Вывод уравнений трехслойной оболочки произвольного очертания с легким промежуточным заполнителем. Часть 1// Научное обозрение. –2014. –№7 (3). - С. 803-805.
10. **Краснобаев И.А., Полисмаков А.И., Маяцкая И.А.** Вывод уравнений трехслойной оболочки произвольного очертания с легким промежуточным заполнителем. Часть 2// Научное обозрение. –2014. –№7 (3). - С. 806-808.

***Կրասնոբաև Իգոր Ալեքսեյի, տ.գ.թ., պրոֆ.** (ՌԴ, ք.Դոնի Ռոստով) - ՌՊՇՀ, «Նյութերի դիմադրություն» ամբիոն, +7(903)4880260, irina.mayatskaya@mail.ru, **Մայացկայա Իրինա Ալեքսանդրի, տ.գ.թ., դոց.** (ՌԴ, ք. Դոնի Ռոստով) - ՌՊՇՀ, Նյութերի դիմադրություն ամբիոն, +7(903)4880260, irina.mayatskaya@mail.ru;*
***Краснобаев Игорь Алексеевич, к.т.н., проф.** (РФ, г. Ростов-на-Дону) - РГСУ, кафедра Сопротивления материалов, +7(903)4880260, irina.mayatskaya@mail.ru, **Маяцкая Ирина Александровна, к.т.н., доц.** (РФ, г. Ростов-на-Дону) - РГСУ, кафедра Сопротивления материалов,+7(903)4880260, irina.mayatskaya@mail.ru.*
***Krasnobaev Igor Aleksey, doctor of philosophy (PhD) in engineering, prof.** (RF, Rostov-on-Don) –Rostov State University of Civil Engineering, Professor of the Department of Strength of Materials, +7(903)4880260, irina.mayatskaya@mail.ru, **Mayatskaya Irina Aleksandr, doctor of philosophy (PhD) in engineering, associate prof.** (RF, Rostov-on-Don) - Rostov State University of Civil Engineering, associate professor of the Department of Strength of Materials, +7(903)4880260, irina.mayatskaya@mail.ru.*

Ներկայացվել է ՝ 04.05.2016թ.
Ընդունվել է տպագրության՝11.10.2016թ.