УДК 624.044

СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

И.А.Краснобаев,
И.А.Маяцкая

РАСЧЕТ КРУГЛЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ

В рамках модели упругого тела рассмотрено поведение композитных круглых пластин, а именно трехслойных пластин с легким заполнителем (средний слой) с разными верхним и нижним слоями. Предлагается расчет круглых трехслойных пластин с легким заполнителем, нагруженных равномерно распределенной нагрузкой по всему контуру, по кольцу, вертикальными силами, а также распределенными моментами. Получены уравнения прогибов для этих пластин. Предложена методика сопряжения круговых участков с различными видами нагрузок.

Ключевые слова: *пластина, прочность, изгиб, прогиб, слой, легкий заполнитель*

Настоящая работа является продолжением исследований, посвященных расчету многослойных пластин и оболочек [1-7]. Рассматривается круглая пластина, нагруженная вертикальными силами, равномерно распределенными по кольцу. Окружности разбивают площадь круглой пластины на несколько колец. Для кольца, расположенного между окружностями *n* и *n+1*, воспользуемся уравнениями для определения прогиба всех слоев ***w*** и радиальных перемещений точек срединных плоскостей внешних слоев $\boldsymbol{u_1}$ и $\boldsymbol{u_3}$ [8, 9]:

$$w = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r + C_5 I_0(\alpha r) + C_6 K_0(\alpha r) + \frac{qkr^4}{64\alpha^2 (D_1 + D_3)}; \tag{1}$$

$$u_1 = -H\left[\left(2C_3 + C_4 - \frac{C_7}{B_1(z_1 - z_3)} + \frac{q}{2\alpha^2 (D_1 + D_3)}\right) r + \frac{qkr^3}{16\alpha^2 (D_1 + D_3)} + 2C_4 r \ln r\right] +$$

$$+(-H)\left[\left(C_2 + \frac{4}{k} C_4 - \frac{C_8}{B_3(z_1 - z_3)}\right)\frac{1}{r} - \frac{\alpha}{c} C_5 I_1(\alpha r) + \frac{\alpha}{c} C_6 K_1(\alpha r)\right];$$

(2)

$$u_3 = -\frac{B_1}{B_3} u_1 + \frac{1}{B_3}\left(C_7 r + \frac{C_8}{r}\right), \tag{3}$$

где r – радиальная координата; u_1, u_3 – радиальные перемещения точек срединных плоскостей наружных слоев; w – одинаковый прогиб для всех слоев пластинки; q – поперечная нагрузка (положительная, если она направлена вниз); E_1, E_3 –модули упругости наружных слоев; $2h_1, 2h_3$ – толщины наружных слоев; $2h$ – толщина легкого заполнителя (внутреннего слоя); $z_1 = h + h_1$; $z_3 = -h - h_3$; G – модуль сдвига внутреннего слоя; C_i –произвольные постоянные, которые определяются из граничных условий; $I_0(\alpha r)$, $K_0(\alpha r)$, $I_1(\alpha r)$, $K_1(\alpha r)$ – функции Бесселя нулевого и первого порядка;

$$\alpha^2 = k + \frac{B_1(z_1 - z_3)}{(D_1 + D_3)} m;\; k = \frac{G}{2hB_1}\left(1 + \frac{B_1}{B_3}\right);\; m = \frac{G(z_1 - z_3)}{2hB_1};\; c = \frac{B_1 H^2 \left(1 + \frac{B_1}{B_3}\right)}{(D_1 + D_3)}.$$

Считая, что коэффициенты Пуассона одинаковы для всех слоев, т.е. $\nu_1 = \nu_3 = \nu$, а жесткости при растяжении и изгибе равны, имеем:

$$B_1 = \frac{2E_1 h_1}{1-\nu^2};\quad B_3 = \frac{2E_3 h_3}{1-\nu^2} \quad \text{и} \quad D_1 = \frac{B_1 h_1^2}{3};\quad D_3 = \frac{B_3 h_3^2}{3}. \tag{4}$$

Постоянные C_i определяются из граничных условий. В работе рассматривается случай, когда выполняются следующие условия:

$$C_7 = C_8 = 0 \quad \text{и} \quad u_1 = -\frac{B_1}{B_3} u_3. \tag{5}$$

Учитывая условие (4) и $q = 0$, для двух соседних участков *n* и *n+1* после вычитания получим:

$$w_{n+1} = w_n + C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r - \left[C_5 I_0(\alpha r) + C_6 K_0(\alpha r)\right]; \tag{6}$$

$$u_{1(n+1)} = u_{1n} - H\left[(2C_3 + C_4)r + 2C_4 r \ln r + \left(C_2 + \frac{4}{k}C_4\right)\frac{1}{r} - \frac{\alpha}{c} C_5 I_1(\alpha r) + \frac{\alpha}{c} C_6 K_1(\alpha r)\right], \tag{7}$$

где C_i – постоянные, которые определяются из условий сопряжения соседних участков по формулам:

$$C_1 = C_{1(n+1)} - C_{1n};\quad C_2 = C_{2(n+1)} - C_{2n};\cdots\; C_6 = C_{6(n+1)} - C_{6n}. \tag{8}$$

При $r = r_n$ получаем:

$$w_{n+1} = w_n;\qquad \frac{dw_{n+1}}{dr} = \frac{dw_n}{dr};\qquad u_{1(n+1)} = u_{1n}. \tag{9}$$

Для усилий и моментов, возникающих при изгибе трехслойных пластин, используются следующие формулы [2]:

$$T_{1r} = B_1\left(\frac{du_1}{dr} + \nu\frac{u_1}{r}\right);\qquad T_{1\theta} = B_1\left(\frac{u_1}{r} + \nu\frac{du_1}{dr}\right); \tag{10}$$

$$T_{3r} = B_3\left(\frac{du_3}{dr} + \nu\frac{u_3}{r}\right);\qquad T_{3\theta} = B_3\left(\frac{u_3}{r} + \nu\frac{du_3}{dr}\right); \tag{11}$$

$$M_{1r} = -D_1\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}\right);\qquad M_{1\theta} = -D_1\left(\nu\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right); \tag{12}$$

$$M_{3r} = -D_3\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}\right);\qquad M_{3\theta} = -D_3\left(\nu\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right); \tag{13}$$

$$Q_r = B_1(z_1 - z_3)\left(\Delta + \frac{1}{r^2}\right)u_1 - (D_1 + D_3)\frac{d}{dr}\Delta w;\qquad Q_\theta = 0; \tag{14}$$

$$M_r = T_{1r}(z_1 - z_3) - (D_1 + D_3)\frac{d^2 w}{dr^2} - \nu(D_1 + D_3)\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} \tag{15}$$

$$M_\theta = T_{1\theta}(z_1 - z_3) - \nu(D_1 + D_3)\frac{d^2 w}{dr^2} - (D_1 + D_3)\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\,, \tag{16}$$

где T_r и T_θ – радиальные и тангенциальные усилия в пластине; Q_r и Q_θ – поперечные силы в пластине; M_r и M_θ – изгибающие моменты верхнего слоя пластины.

Для соседних участков кольца, расположенного между окружностями *n* и *n+1* получаем:

$$T_{1r(n+1)} = T_{1r(n)}\ ; \qquad Q_{r(n)} = P_{(n)} + Q_{r(n+1)}\ ; \qquad M_{r(n+1)} = M_{r(n)}\,. \tag{14}$$

Подставив формулы (6) и (7) в (9) и решив полученную систему уравнений, определим C_1, $C_2 \cdots C_n$. Подставив найденные константы в (9), получим:

$$w_{n+1} = w_n - P_n \Phi_n(r, r_n)\ ;\ u_{1(n+1)} = u_{1n} - P_n F_n(r, r_n)\,, \tag{15}$$

где $$\Phi_n = \frac{r_n}{4\overline{D}}\left[\left(\frac{4c}{\alpha^2} - r_n^2 - r^2\right)\ln\left(\frac{r}{r_n}\right) + r_n^2 - r^2 - \frac{4c}{\alpha^2}\lambda_n(r, r_n)\right]; \tag{16}$$

$$\overline{D} = B_1 H(z_1 - z_3) + (D_1 + D_3); \quad \lambda_n(r, r_n) = I_0(\alpha r)K_0(\alpha r_n) - K_0(\alpha r)I_0(\alpha r_n); \tag{17}$$

$$F_n = \frac{r_n H}{4\overline{D}}\left[\left(2\ln\left(\frac{r}{r_n}\right) - 1\right)r + \left(r_n^2 + \frac{4}{\alpha^2}\right)\frac{1}{r} - \frac{4}{\alpha}U_n(r_n, r)\right]; \tag{18}$$

$$U_n(r_n, r) = I_0(\alpha r_n)K_1(\alpha r) + K_0(\alpha r_n)I_1(\alpha r)\,. \tag{19}$$

Применив выражения (15) ко всем участкам, получим:

$$w_{n+1} = w_1 - \sum_{k=1}^{n} P_k \Phi_k(r, r_k)\ ; \quad u_{1(n+1)} = u_{11} - \sum_{k=1}^{n} P_k F_k(r, r_k)\,. \tag{20}$$

Рассмотрим другие виды нагрузок:

- круглая пластина, нагруженная равномерно распределенными моментами m_n. Такое нагружение можно осуществить, прикладывая к окружностям радиусов r_n и $r_n + \Delta r_n$ равномерно распределенные нагрузки, интенсивности которых соответственно равны $(P_n \frac{r_n + \Delta r_n}{r_n})$ и $(-P_n)$. Из выражения (20) найдем:

$$w_{n+1} = w_1 - P_n \Phi_n(r, r_n + \Delta r_n) - P_n \frac{r_n + \Delta r_n}{r_n}\Phi_n(r, r_n) = w_1 + \Delta r_n P_n\left[\frac{\Phi_n(r, r_n + \Delta r_n) - \Phi_n(r, r_n)}{\Delta r_n} - \frac{\Phi_n(r, r_n)}{r_n}\right] \tag{21}$$

Пусть $\Delta r_n \to 0$ и, учитывая $\Delta r_n P_n = m_n$, получим:

$$w_{n+1} = w_1 + m_n\left[\frac{\partial \Phi_n(r, r_n)}{\partial r_n} - \frac{\Phi_n(r, r_n)}{r_n}\right] = w_1 + m_n \Phi_n^*(r, r_n)\,, \tag{22}$$

где $$\Phi_n^* = \frac{1}{4\overline{D}}\left[2r_n^2 \ln\left(\frac{r}{r_n}\right) + r_n^2 - r^2 + \frac{4c}{\alpha^2}\left(1 - \alpha r_n U_n(r, r_n)\right)\right]; \tag{23}$$

$$U_n(r,r_n)=I_0(\alpha r)K_1(\alpha r_n)+K_0(\alpha r)I_1(\alpha r_n)\,; \tag{24}$$

Аналогично получаем:

$$u_{n+1}=u_1+m_n\left[\frac{\partial F_n(r,r_n)}{\partial r_n}-\frac{F_n(r,r_n)}{r_n}\right]=u_1+m_nF_n^*(r,r_n)\,, \tag{25}$$

где $F_n^*=\dfrac{H}{\overline{\overline{D}}}\left[\dfrac{r^2-r_n^2}{2r}-r_nV_n(r,r_n)\right]$; $\quad V_n(r,r_n)=I_1(\alpha r)K_1(\alpha r_n)+K_1(\alpha r)I_1(\alpha r_n)\,,$ (26)

- круглая пластина, нагруженная распределенной нагрузкой $q(r)$ по кольцу. Действие сплошной распределенной нагрузки $q(r)$ на кольцевой участок пластины можно представить как действие бесконечного множества вертикальных сил, сосредоточенных по окружностям (рис.).

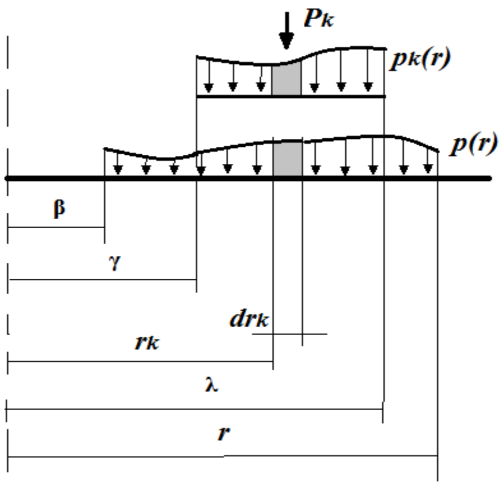

Рис. Круглая пластина, нагруженная распределенной нагрузкой $q(r)$ по кольцу

Уравнения для определения прогибов *w* и u_1 в точке с координатой r имеют вид:

$$w_{n+1}=w_1-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Phi_k(r,r_k)\left[q(r_k)-q_1(r_k)\right]dr_k=w_1-\int_\beta^r\Phi(r,r_k)q(r_k)dr_k-\int_\gamma^\lambda\Phi(r,r_k)q_1(r_k)dr_k\,; \tag{27}$$

$$u_{1(n+1)}=u_{11}-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}F_k(r,r_k)\left[q(r_k)-q_1(r_k)\right]dr_k=u_{11}-\int_\beta^r F(r,r_k)q(r_k)dr_k-\int_\gamma^\lambda F(r,r_k)q_1(r_k)dr_k\,. \tag{28}$$

При $q(r)=q_1(r)=const$ получаем:

$$\int_\beta^r\Phi(r,r_k)q(r_k)dr_k=\frac{q}{4\overline{\overline{D}}}\left[\frac{\beta^2}{2}\left(\frac{\beta^2}{2}+r^2-\frac{4c}{\alpha^2}\right)\ln\left(\frac{r}{\beta}\right)+(r^2-\beta^2)\left(\frac{c}{\alpha^2}-\frac{r^2+5\beta^2}{16}\right)+\frac{4c}{\alpha^2}\left(1-\alpha\beta U(r,\beta)\right)\right] \tag{29}$$

$$\int_\gamma^\lambda\Phi(r,r_k)q_1(r_k)dr_k=\frac{q_1}{4\overline{\overline{D}}}\left[(\lambda^2-\gamma^2)\left(\frac{c}{\alpha^2}+\frac{r^2}{4}-\frac{5}{16}\right)(\lambda^2+\gamma^2)+\frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{2c}{\alpha^2}-\frac{r^2}{2}-\frac{\lambda^2}{4}\right)\ln\left(\frac{r}{\lambda}\right)\right]+$$

$$+\frac{q_1}{4\overline{\overline{D}}}\left[-\gamma^2\left(\frac{2c}{\alpha^2}-\frac{r^2}{2}-\frac{\lambda^2}{4}\right)\ln\left(\frac{r}{\gamma}\right)+\frac{4c}{\alpha}\left(\lambda U(r,\lambda)-\gamma U(r,\gamma)\right)\right]; \tag{30}$$

$$\int_\beta^r F(r,r_k)q(r_k)dr_k=\frac{qH}{4\overline{\overline{D}}}\left[-\beta^2r\ln\left(\frac{r}{\beta}\right)+\frac{r^4-\beta^4}{4r}+\frac{2\left(r^2-\beta^2\right)}{\alpha^2r}-\frac{4\beta}{\alpha^2}V(r,\beta)\right]; \tag{31}$$

$$\int_{\gamma}^{\lambda} F(r,r_k)q_1(r_k)dr_k = \frac{q_1 H}{4\bar{D}}\left[r\left(\lambda^2 \ln\left(\frac{r}{\lambda}\right) - \gamma^2 \ln\left(\frac{r}{\gamma}\right)\right) + \frac{(\lambda^2-\gamma^2)}{4r}\left(\lambda^2+\gamma^2+\frac{8}{\alpha^2}\right) + \frac{4}{\alpha^2}\left(\lambda U(r,\lambda) - \gamma U(r,\gamma)\right)\right] \tag{32}$$

- круглая пластина, одновременно нагруженная вертикальными силами P, равномерно распределенными по кольцу, распределенными моментами m и распределенной по площади нагрузкой q. В этом случае перемещения w и u_1 для $n+1$ участка пластины будут иметь вид:

$$w_{n+1} = w_1 - \sum_{k=1}^{n} P_k \Phi_k(r,r_k) - \sum_{k=1}^{n} m_k \Phi_k^*(r,r_k) - \int_{\beta}^{r} \Phi(r,r_k)q(r_k)dr_k - \int_{\gamma}^{\lambda} \Phi(r,r_k)q_1(r_k)dr_k \, ; \tag{33}$$

$$u_{1(n+1)} = u_{11} - \sum_{k=1}^{n} P_k F_k(r,r_k) - \sum_{k=1}^{n} m_k F_k^*(r,r_k) - \int_{\beta}^{r} F(r,r_k)q(r_k)dr_k - \int_{\gamma}^{\lambda} F(r,r_k)q_1(r_k)dr_k \, , \tag{34}$$

где перемещения w_1 и u_{11} определяются выражениями (6) и (7).

В данном исследовании найдены уравнения прогибов круглых трехслойных пластин для разных видов нагружения: равномерно распределенной нагрузкой по всему контуру, равномерно распределенной нагрузкой по кольцу, вертикальными силами по кольцу, а также распределенными моментами по кольцу. Предложена методика сопряжения круговых участков *n* и *n+1* и получены формулы для определения усилий и моментов, прогибов для каждого кольца. Можно рассмотреть различные условия закрепления, например, шарнирно опертые по круговому контуру, расположенному как внутри области пластины, так и снаружи. Простые аналитические формулы позволяют исследовать напряженно-деформированное состояние трехслойных пластин с легким заполнителем.

Ի.Ա.Կրասնոբաև,
Ի.Ա.Մայացկայա

ԿԼՈՐ ԵՌԱՇԵՐՏ ԹԻԹԵՂՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿԸ ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԲԱՇԽՎԱԾ ԲԵՌՆՎԱԾՔԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ

Դիտարկվել է կոմպոզիտային կլոր մարմինների վարքը առաձգական մարմնի մոդելի շրջանակներում ՝ հատկապես վերնի և ներքնի տարբեր շերտերով, թեթև լցանյութով (միջին շերտ) եռաշերտ թիթեղների: Առաջարկվում է թեթև լցանյութով կլոր եռաշերտ թիթեղների հաշվարկ՝ բեռնավորված հավասարաչափ բաշխված բեռնվածքով ամբողջ եզրագծով, օղակով, ուղղահայաց ուժերով, ինչպես նաև բաշխված մոմենտներով: Ստացվել են այդ թիթեղների համար ճկվածքների հավասարումներ: Առաջարկվել է բեռնվածքների տարբեր տեսակներով շրջանաձև տեղամասերի լծորդման մեթոդիկա:

Առանցքային բառեր. *թիթեղ, ամրություն, ծռվածք, ճկվածք, շերտ, թեթև լցանյութ*

I.A. Krasnobaev,
I.A. Mayatskaya

CALCULATION OF THREE-LAYER ROUND PLATES UNDER THE INFLEUNECE OF UNIFORMLY DISTRIBUTED LOAD

The behavior of composite circular plates, namely of round three-layer plates with a light filler (middle layer) with different upper and lower layer was considered in the context of an elastic body model. A calculation of three-layer round plates with a light filler, loaded by the uniformly distributed load around the contour, around the ring, vertical forces, and distributed moments is proposed in the paper. The equations for deflections of these plates were received. The technique of conjugation of circular plots with different types of loads was proposed.
Keywords: *plate, strength, bending, deflection, layer, light filler*

Литература

1. **Огибалов П.М., Колтунов М.А.** Оболочки и пластины. – М.: Изд-во МГУ, 1969. – 695 с.
2. **Амосов А. А**. Техническая теория тонких упругих оболочек. – М.: Изд-во АСВ, 2009. – 304 с.
3. **Кобелев В.Н.** Расчет трехслойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1984. – 304 с.
4. **Краснобаев И.А., Маяцкая И.А.** Основы расчета тонких жестких пластин. – Ростов-на-Дону: Изд-во РГСУ, 2011. – 87 с.
5. **Краснобаев И.А.** Теория пластин и оболочек/ И.А.Краснобаев, И.А.Маяцкая, И.И.Смирнов, Б.М.Язьев. – Ростов-на-Дону: Изд-во РГСУ, 2012. – 114 с.
6. **Краснобаев И.А., Полисмаков А.И., Маяцкая И.А.** Вывод уравнений трехслойной оболочки произвольного очертания с легким промежуточным заполнителем. Часть 1// Научное обозрение. –2014. –№7 (3). - С. 803-805.
7. **Краснобаев И.А., Полисмаков А.И., Маяцкая И.А.** Вывод уравнений трехслойной оболочки произвольного очертания с легким промежуточным заполнителем. Часть 2// Научное обозрение. –2014. –№7 (3). - С. 806-808.
8. **Галимов Н.К.** Осесимметричный изгиб трехслойных круглых пластин с легким сжимаемым заполнителем под действием равномерно-распределенной поперечной нагрузки// Исследования по теории пластин и оболочек. Т.4. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1966. - С. 194–206.
9. **Григолюк Э.И., Корнев В.М.** Основные уравнения многослойных пластин и асимметричных структур и ядер жесткости// Механика твердого тела. – 1966. – №1(6). - С.69-77.

Կրասնոբաև Իգոր Ալեքսեյի, տ.գ.թ., պրոֆ. *(ՌԴ, ք.Դոնի Ռոստով-)-ՌՊՇՀ, «Նյութերի դիմադրություն» ամբիոն, 8(903)4880260, e - mail: irina.mayatskaya@mail.ru;* ***Մայացկայա Իրինա Ալեքսանդրի, տ.գ.թ., դոց.*** *(ՌԴ, ք. Դոնի Ռոստով)-ՌՊՇՀ, «Նյութերի դիմադրություն» ամբիոն, 8(903)4880260, irina.mayatskaya@mail.ru;*
Краснобаев Игорь Алексеевич, к.т.н., проф. *(РФ, г. Ростов-на Дону)- РГСУ, кафедра "Сопротивление материалов", 8(903)4880260, irina.mayatskaya@mail.ru;* ***Маяцкая Ирина Александровна, к.т.н., доц.*** *(РФ, г. Ростов–на Дону)- РГСУ, кафедра "Сопротивление материалов", 8(903)4880260, irina.mayatskaya@mail.ru;*
Krasnobaev Igor Aleksey., doctor of philosophy (PhD) in engineering, professor *(RF, Rostov-on-Don) –Rostov State University of Civil Engineering, Professor of the Department of Strength of Materials, 8(903)4880260, irina.mayatskaya@mail.ru,* ***Mayatskaya Irina Aleksandr, doctor of philosophy (PhD) in engineering, associate professor*** *(RF, Rostov-on-Don) - Rostov State University of Civil Engineering, associate professor of the Department of Strength of Materials, 8(903)4880260, irina.mayatskaya@mail.ru.*

Ներկայացվել է `04.05.2016թ.
Ընդունվել է տպագրության` 11.05.2016թ.