УДК 624.074.43

СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

В.Д.Еремин

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЛЕННОЙ СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ НИЗШИХ ЧАСТОТ И ФОРМ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧЕК УСЛОЖНЕННОЙ ФОРМЫ

Рассматривается задача о собственных колебаниях упругой тонкой некруговой цилиндрической волнистой оболочки открытого профиля. В основу задачи положен энергетический метод Релея-Ритца. На основе предложенной методики определения низших частот и форм собственных колебаний оболочек усложненной формы проведено исследование численной сходимости разработанного алгоритма. Дана оценка результатов этого численного эксперимента.

Ключевые слова: *сходимость, частота, форма собственных колебаний, тонкая оболочка энергетический метод*

1. Постановка задачи

Рассматривается задача определения низших частот и соответствующих им форм собственных колебаний некруговой цилиндрической тонкой волнистой оболочки открытого профиля (рис. 1) с жестко защемленным нижним контуром вдоль образующей.

Срединная поверхность этой оболочки образована перемещением косинусоиды

$$\alpha = -\Delta\left(1 - \cos\pi\frac{z}{\ell}\right) \qquad (1)$$

вдоль гребня, описанного уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (2)$$

и лежащей в нормальной плоскости к нему.

Здесь Δ - амплитуда волны; 2ℓ - длина волны.

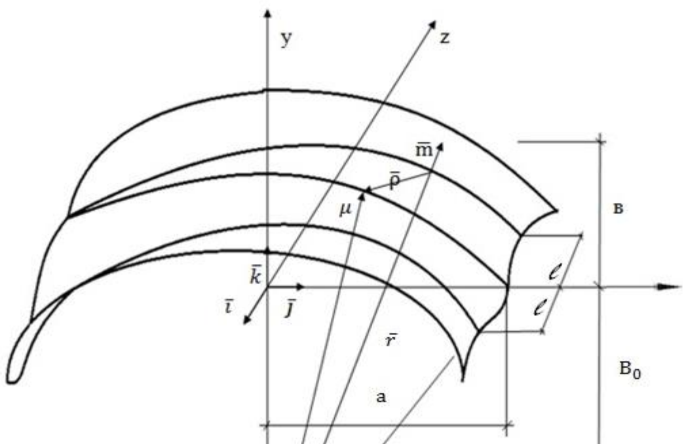

Рис. 1. Поверхность оболочки

Геометрические характеристики
(размеры оболочки)

Пролет - $2a = 18$*м*
Высота в поперечном сечении, проходящем через гребень оболочки – в = 5*м*
Длина волны - $2\ell = 3$*м* (3)
Амплитуда волны - $\Delta = 0{,}225$*м*
Полюсное расстояние - $B_o = 9$*м*
Толщина оболочки - $2h = 0{,}05$*м*

Физические характеристики

Модуль упругости материала оболочки - E =28 ГПа,
коэффициент Пуассона - $\mu = 1/6$, (4)
плотность материала оболочки - $\rho = 2500$ *кг/м*^{3}.

Цель работы – исследование численной сходимости разработанного алгоритма определения низших частот и соответствующих им форм собственных колебаний оболочек усложненной формы.

Расчет выполняется на основе геометрической и физической линейности с использованием гипотез Кирхгофа-Лява. Используется энергетический метод Релея-Ритца [1-3], позволяющий получить достаточно точные значения низших частот и форм собственных колебаний тонких волнистых оболочек при произвольных граничных условиях и любом законе изменения ее геометрических и физических характеристик. Достоинство применяемого метода состоит в том, что он не требует составления и решения особых дифференциальных уравнений с граничными и начальными условиями, которые оказываются достаточно сложными и часто трудно разрешимыми. При решении задачи с помощью энергетического метода необходимо иметь лишь достаточно мощное множество функций, характеризующих перемещение срединных точек оболочки и удовлетворяющих только геометрическим условиям задачи. Составив линейную комбинацию с постоянными коэффициентами аппроксимирующих функций, получим систему линейных (в случае применимости обобщенного закона Гука) алгебраических уравнений. Эта система уравнений будет иметь нетривиальное решение, если равен нулю определитель, составленный из этих коэффициентов. Раскрыв определитель и решив полученное уравнение, найдем частоты ω собственных колебаний оболочки.

2. Решение численного примера

Предполагается, что длина оболочки вдоль оси Z (рис.1) достаточно велика, поэтому можно ограничиться рассмотрением только ее средних участков, не учитывая влияние частей оболочки, примыкающих к ее торцам.

Получены векторное уравнение срединной поверхности этой оболочки и формулы для вычисления параметров Ляме и символов Кристоффеля данной волнистой оболочки [4]. Подобраны функции, аппроксимирующие амплитуды перемещений точек срединной поверхности оболочки вдоль криволинейных осей координат α_1, α_2 и α_3 в виде двойных тригонометрических рядов, удовлетворяющие условиям жесткого защемления оболочки по нижнему контуру (рис.2), а именно: $\alpha_2 = \pm 1$: $u_1^0 = u_2^0 = u_3^0 = 0$; $u_{3,2}^0 = 0$ [4].

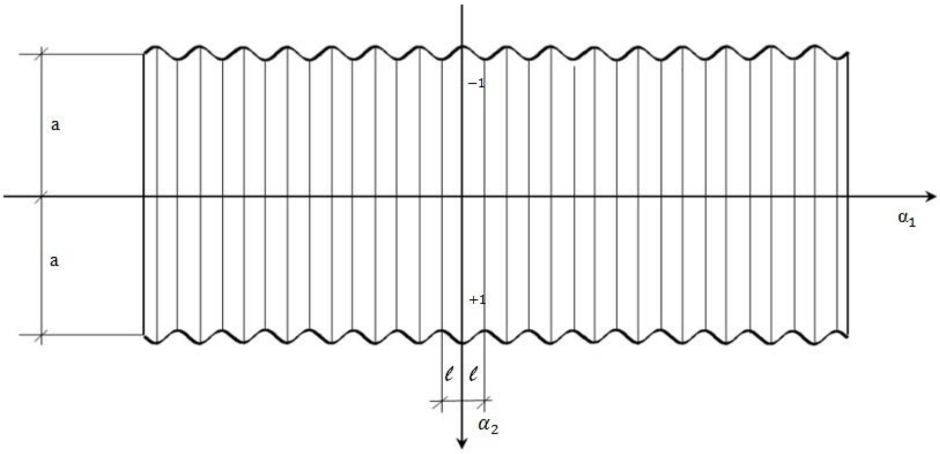

Рис. 2. Расчетная схема оболочки

По выражениям, приведенным в [5, 6], вычислены элементы матриц S и I, входящие в формулы для вычисления амплитуд потенциальной и кинетической энергий, а также в формулу обобщенного векового уравнения (5) рассматриваемой тонкой волнистой оболочки

$$| S - \lambda I | = 0, \tag{5}$$

где $\lambda = \omega^2 \dfrac{\rho}{E_1}$. (6)

Решая это уравнение, получим возможность определять частоты и соответствующие им формы собственных колебаний данной тонкой волнистой оболочки [5].

3. Исследование численной сходимости алгоритма расчета

Энергетический метод Релея-Ритца, положенный в основу предлагаемого алгоритма определения частот и форм собственных колебаний оболочек усложненной формы, в своей основе имеет строгое математическое обоснование. Сходимость этого метода подробно рассматривалась Л.В. Канторовичем и В.И. Крыловым [7].

Для контроля за численной сходимостью алгоритма расчет волнистой оболочки, изображенной на рис. 1, с геометрическими размерами (3) и физическими характеристиками (4) производился методом последовательных приближений, путем поэтапного увеличения количества членов ряда, аппроксимирующего решение.

В первом приближении в двойных тригонометрических рядах, аппроксимирующих амплитуды перемещений точек срединной поверхности оболочки вдоль криволинейных осей координат α_1, α_2 и α_3, было оставлено четыре члена ($m=n=2$), потом девять ($m=n=3$), шестнадцать ($m=n=4$), двадцать пять ($m=n=5$) и, наконец, тридцать шесть членов ряда ($m=n=6$).

Результаты вычислений первых трех частот тонкой волнистой оболочки для этого варианта граничных условий – жесткой заделки по нижнему контуру вдоль образующей (рис. 2), приведены на рис. 3 – 5. На этих графиках: n – номер приближения; ω_1, ω_2, ω_3 – частоты собственных колебаний тонкой волнистой оболочки.

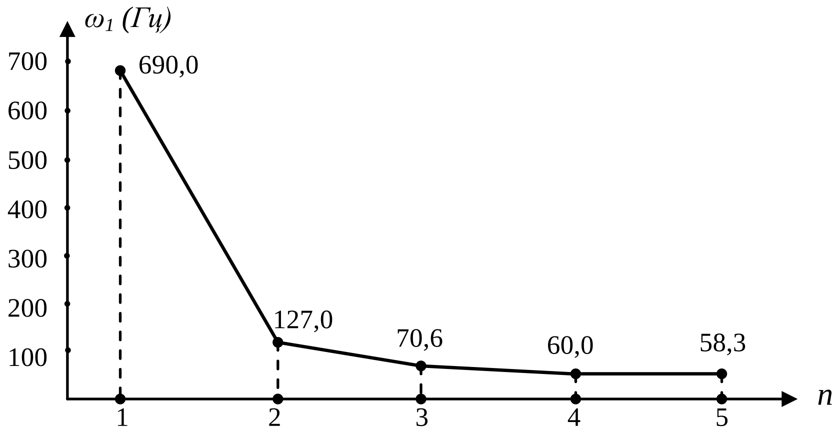

Рис. 3. Первая частота

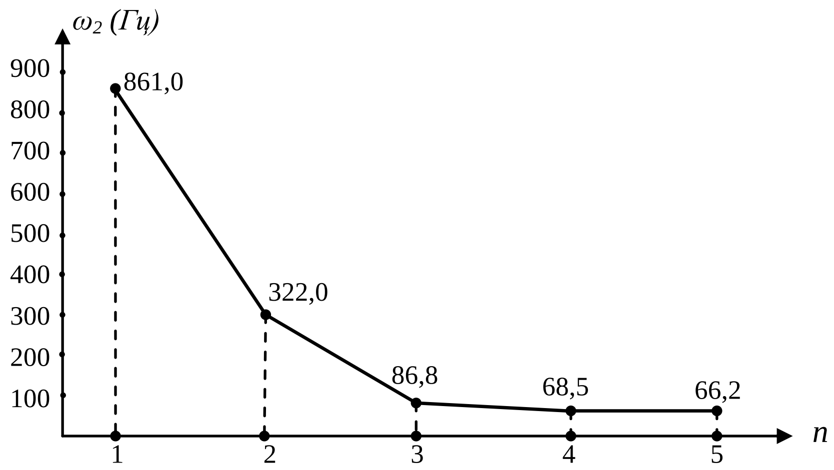

Рис. 4. Вторая частота

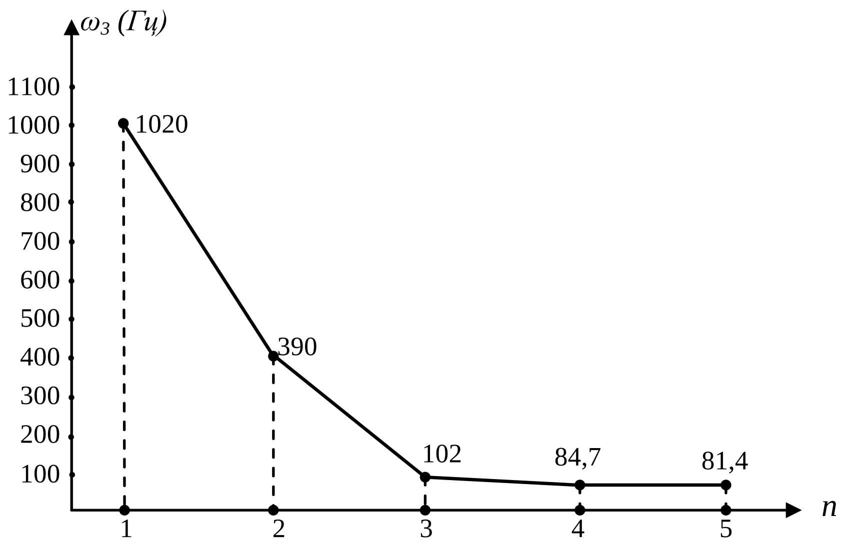

Рис. 5. Третья частота

Из полученных значений первых трех частот собственных колебаний тонкой волнистой оболочки видно, что в рассматриваемом примере уже пятое приближение (36 членов ряда) с достаточной инженерной точностью позволяет определять значения низших частот. Несовпадение результатов по двум последним приближениям по первой частоте составляет 2,9%, по второй – 3,5%, по третьей – 4,1%. Если принять во внимание, что определение собственных частот обычно бывает необходимым для вычисления близости режима работы конструкции к состоянию резонанса, то можно сделать вывод, что для практических целей в нашем случае было достаточным и четвертое приближение (25 членов ряда). Полученные значения низших частот собственных колебаний данной тонкой волнистой оболочки подтверждают хорошую сходимость разработанного алгоритма определения частот и соответствующих им форм собственных колебаний оболочек усложненной формы.

Վ.Դ.Երյոմին

ԲԱՐԴԱՑՎԱԾ ՁԵՎԻ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՍՏՈՐԻՆ ՀԱՃԱԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԵՎ ՁԵՎԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ԱԼԳՈՐԻԹՄԻ ԹՎԱՅԻՆ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆ

Դիտարկվում է բաց պրոֆիլի առաձգական բարակ ոչ շրջանաձև գլանային ալիքաձև թաղանթի սեփական տատանումների խնդիրը: Խնդրի հիմքում ընկած է Ռեյլի-Ռիցի էներգիական մեթոդը: Ստորին հաճախությունների և բարդացված ձևի թաղանթների սեփական տատանումների ձևերի որոշման առաջարկված մեթոդի հիմքի վրա կատարվել է մշակված ալգորիթմի թվային զուգամիտություն: Տրված է այդ թվային փորձի արդյունքների գնահատականը:

Առանցքային բառեր. *զուգամիտություն, հաճախություն, սեփական տատանումների ձև, բարակ թաղանթ, էներգիական մեթոդ*

V.D. Eryomin

INVESTIGATION OF THE NUMERICAL CONVERGENCE OF THE ALGORITHM FOR DETERMINING THE LOWER FREQUENCIES AND MODES OF COMPLICATED FORM SHELL'S NATURAL OSCILLATIONS

The problem of natural oscillations of the open profile elastic thin non-circular cylindrical wavy shell has been considered in the article. The problem is based on the energy method of Rayleigh-Ritz. On the basis of the proposed method for determining the lower frequencies and modes of complicated form shells' free oscillations, we conducted a research of the developed algorithm's numerical convergence. The results of the experiment have been evaluated.

Keywords: *convergence, frequency, mode of natural oscillations, thin shell, energetic method*

Литература

1. **Гольденвейзер А.Л.** Теория упругих тонких оболочек. – М.: Наука, 1976.
2. **Аксентян К.Б., Гордеев-Гавриков В.К.** Вариационно-энергетический метод расчета колебаний инженерных сооружений. - Ростов-на-Дону: РГУ, 1979.
3. **Аксентян К.Б., Еремин В.Д.** Принцип возможных перемещений в случае свободных колебаний⁄⁄ Расчет оболочек и пластин - Ростов-на-Дону: РИСИ, 1977. - С.43 – 52.
4. **Еремин В.Д.** Собственные колебания некруговой цилиндрической упругой волнистой оболочки открытого профиля ⁄⁄ Научные труды Национального университета архитектуры и строительства Армении. – Ереван: НУАСА, 2015. - Т.1. - С. 101-108.
5. **Еремин В.Д.** Определение частот и форм собственных колебаний оболочек неклассической формы⁄⁄ Научные труды Национального университета архитектуры и строительства Армении. – Ереван: НУАСА, 2015. - Т.1. - С. 94-100.
6. **Еремин В.Д**. К расчету собственных колебаний тонкой волнистой оболочки открытого профиля ⁄⁄ Научные труды Национального университета архитектуры и строительства Армении. – Ереван: НУАСА, 2016.
7. **Канторович Л.В., Крылов В.И**. Приближенные методы высшего анализа. – М.: Физматгиз, 1962. -

Երյոմին Վիկտոր Դմիտրիի, տ.գ.թ., պրոֆ. *(ՌԴ, ք. Դոնի Ռոստով) - Ռոստովի պետական շինարարական համալսարան, Նյութերի դիմադրության ամբիոն, +7(928) 296-08-11, eremin@rgsu.ru.*

Еремин Виктор Дмитриевич, к. т. н., проф. *(РФ, г.Ростов-на-Дону) - Ростовский государственный строительный университет, кафедра Сопротивления материалов, +7(928) 296-08-11, e-mail: eremin@rgsu.ru:*

Eryomin Victor Dmitri, doctor of philosophy (PhD) in engineering, professor *(RF, Rostov-on-Don) - Rostov State University of Civil Engineering, chair of Strength of Materials, +7(928) 296-08-11, eremin@rgsu.ru.*

Ներկայացվել է՝ 10.12.2015թ.
Ընդունվել է տպագրության՝ 16.12.2015թ.