

### МЕТОД ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

*Рассматривается метод конечных элементов прямоугольных форм для решения плоских задач моментной теории упругости, в котором вдоль сторон элементы перемещения изменяются по квадратичному закону. Учитывается межэлементная непрерывность перемещений и деформаций по всей линии контакта между смежными элементами. Используется первый вариант моментной теории упругости, при котором упругое поведение новой изотропной модели характеризуется четырьмя упругими константами.*

**Ключевые слова:** конечные элементы, перемещения, квадратичное программирование, плоская задача, моментная теория упругости

В работах [1,7] для решения плоской задачи классической теории упругости предлагается метод конечных элементов прямоугольной формы, в котором вдоль сторон элемента перемещения изменяются по квадратичному закону. Тогда поле перемещений не удовлетворяет требованиям, обеспечивающим межэлементную непрерывность перемещений. Не удовлетворяются также и условия непрерывности деформаций. В работе [3] предлагается модификация метода конечных элементов прямоугольной формы, при котором решения плоской задачи теории упругости с учетом межэлементной непрерывности деформаций сводятся к задачам квадратичного программирования. Данный подход дает возможность включить в ограничения квадратичного программирования условия непрерывности деформаций в узловых точках между смежными конечными элементами и тем самым устранить неувязку как для деформаций, так и для перемещений.

Здесь рассматривается модификация метода конечных элементов прямоугольной формы, приведенная в работах [1,7,3] для решения плоских задачи моментной теории упругости. При этом используется первый вариант моментной теории упругости, при котором упругое поведение новой изотропной модели характеризуется четырьмя упругими константами [5,6]:  $E$ ,  $\nu$ ,  $l$  и  $\eta$ , из которых  $E$ -модуль Юнга,  $\nu$ -коэффициент Пуассона,  $l$  и  $\eta$ -новые постоянные материала ( $l$  имеет размерность длины, а  $\eta$ -безразмерная постоянная типа коэффициента Пуассона).

Рассмотрим двумерную область, которая разделена на  $\bar{n}$  конечных элементов прямоугольной формы с размерами  $a$  и  $b$  в соответствующих направлениях  $x$  и  $y$ . Прямоугольный элемент имеет узлы лишь в четырех точках (рис. 1).

Обозначим через  $\mathbf{R}^s = (\mathbf{R}_{1,x}^s, \mathbf{R}_{1,y}^s, \mathbf{R}_{2,x}^s, \mathbf{R}_{2,y}^s, \dots, \mathbf{R}_{4,x}^s, \mathbf{R}_{4,y}^s)^T$  - вектор узловых усилий,  $\mathbf{q}^s = (\mathbf{u}_1^s, \mathbf{v}_1^s, \mathbf{u}_2^s, \mathbf{v}_2^s, \dots, \mathbf{u}_4^s, \mathbf{v}_4^s)^T$  - вектор узловых перемещений,  $h$  - толщину пластины.

Прямоугольный плоско-напряженный элемент (рис.1) имеет восемь степеней свободы. Если учесть, что три степени свободы связаны с его перемещением как абсолютно твердого тела, то оставшиеся пять степеней связаны с изменением его деформированного состояния.

Так как общие выражения для компонентов напряжений прямоугольного элемента должны включать пять произвольных параметров, то, принимая, что в пределах конечного элемента нормальные напряжения  $\sigma_x^s$  и  $\sigma_y^s$  изменяются линейно, а симметричная составляющая касательного напряжения  $\tau_c^s = \frac{\tau_{xy} + \tau_{yx}}{2}$  постоянна, общие выражения для компонентов напряжения зададим в виде

$$\sigma_x^s = \alpha_1 + \alpha_2 y, \quad \sigma_y^s = \alpha_3 + \alpha_4 x, \quad \tau_c^s = \alpha_5, \quad (1)$$

которые содержат пять произвольных параметров  $\alpha_i, i \in \{1, 2, \dots, 5\}$ .

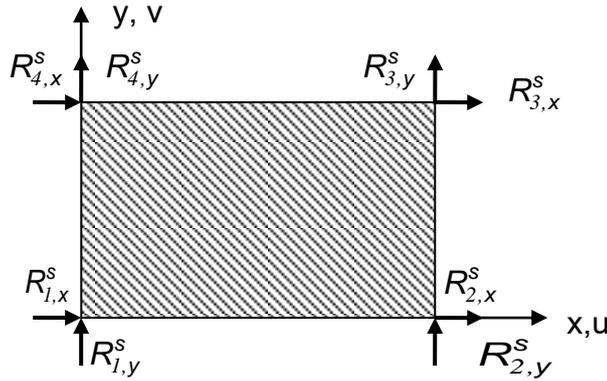


Рис. 1. Прямоугольный плоско-напряженный элемент. Узловые силы и перемещения

Плоская задача моментной теории упругости при отсутствии объемных сил и моментов сводится к интегрированию системы уравнений равновесия в напряжениях  $\sigma_x^s, \sigma_y^s, \tau_{xy}, \tau_{yx}$ , моментных напряжениях  $\mu_x, \mu_y$  [5,6]

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mu_x}{\partial x} + \frac{\partial \mu_y}{\partial y} + \tau_{xy} - \tau_{yx} = 0 \quad (4)$$

и условий совместности

$$\mu_x = l^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xy} + \tau_{yx}) - 2 \frac{\partial}{\partial y} [\sigma_x - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \right\}, \quad (5)$$

$$\mu_y = l^2 \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial x} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] - \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} + \tau_{yx}) \right\}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\tau_{xy} + \tau_{yx}), \quad (7)$$

$$\frac{\partial \mu_x}{\partial y} = \frac{\partial \mu_y}{\partial x} \quad (8)$$

при соответствующих граничных условиях.

Подставляя выражения (1) в уравнение (4), с учетом связей (5) и (6), получим

$$\tau_a = l^2 (1 - \nu) (\alpha_2 - \alpha_4), \quad (9)$$

где  $\tau_a^s = \frac{\tau_{xy} - \tau_{yx}}{2}$  - антисимметричная составляющая касательного напряжения. Остаточный член

(9) является антисимметричной составляющей касательного напряжения, который определяет перемещения элемента как абсолютно твердого тела [6] и на напряженное состояние элемента не действует.

Подставляя выражения (1) в дифференциальные уравнения равновесия (2)–(3), с учетом связей (9) убеждаемся, что уравнения (2) и (3) тождественно выполняются.

Используя обобщенный закон Гука

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \quad (10)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x), \quad (11)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_c \quad (12)$$

и зависимости (1), выражаем деформации через параметры  $\alpha_i, i \in \{1, 2, \dots, 5\}$ . Интегрируя уравнения Коши

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (13)$$

связывающие деформации, выраженные через параметры  $\alpha_i, i \in \{1, 2, \dots, 5\}$  и перемещения, для компонентов перемещений точек элемента получим:

$$u(x, y) = \frac{x}{E}\alpha_1 + \frac{xy}{E}\alpha_2 - \frac{\nu x}{E}\alpha_3 - \frac{1}{2E}(\nu x^2 + y^2)\alpha_4 + \frac{(1+\nu)y}{E}\alpha_5 + y\alpha_6 + \alpha_7, \quad (14)$$

$$v(x, y) = -\frac{\nu}{E}y\alpha_1 - \frac{1}{2E}(\nu y^2 + x^2)\alpha_2 + \frac{y}{E}\alpha_3 + \frac{xy}{E}\alpha_4 + \frac{(1+\nu)x}{E}\alpha_5 - x\alpha_6 + \alpha_8. \quad (15)$$

Новые параметры  $\alpha_i, i \in \{6, 7, 8\}$  определяют перемещения элемента как абсолютно твердого тела.

Исходя из связей (14) и (15), для определения компонентов узловых перемещений получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} u_1^s &= \frac{x_1}{E}\alpha_1 + \frac{x_1 y_1}{E}\alpha_2 - \frac{\nu x_1}{E}\alpha_3 - \frac{1}{2E}(\nu x_1^2 + y_1^2)\alpha_4 + \frac{(1+\nu)y_1}{E}\alpha_5 + y_1\alpha_6 + \alpha_7, \\ v_1^s &= -\frac{\nu}{E}y_1\alpha_1 - \frac{1}{2E}(\nu y_1^2 + x_1^2)\alpha_2 + \frac{y_1}{E}\alpha_3 + \frac{x_1 y_1}{E}\alpha_4 + \frac{(1+\nu)x_1}{E}\alpha_5 - x_1\alpha_6 + \alpha_8, \\ u_2^s &= \frac{x_2}{E}\alpha_1 + \frac{x_2 y_2}{E}\alpha_2 - \frac{\nu x_2}{E}\alpha_3 - \frac{1}{2E}(\nu x_2^2 + y_2^2)\alpha_4 + \frac{(1+\nu)y_2}{E}\alpha_5 + y_2\alpha_6 + \alpha_7, \\ &\dots \dots \dots \\ v_4^s &= -\frac{\nu}{E}y_4\alpha_1 - \frac{1}{2E}(\nu y_4^2 + x_4^2)\alpha_2 + \frac{y_4}{E}\alpha_3 + \frac{x_4 y_4}{E}\alpha_4 + \frac{(1+\nu)x_4}{E}\alpha_5 - x_4\alpha_6 + \alpha_8. \end{aligned} \quad (16)$$

Решая систему уравнений (16), находим выражения неизвестных параметров  $\alpha_i, i \in \{1, 2, \dots, 8\}$  через узловые перемещения. Подставляя их в выражения (14) и (15), находим [4]

$$\begin{aligned} u &= (1-\xi)(1-\eta)u_1 + \xi(1-\eta)u_2 + \xi\eta u_3 + (1-\xi)\eta u_4 + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \nu \frac{a}{b} (\xi - \xi^2) + \frac{b}{a} (\eta - \eta^2) \right] (v_1 - v_2 + v_3 - v_4), \\ v &= (1-\xi)(1-\eta)v_1 + \xi(1-\eta)v_2 + \xi\eta v_3 + (1-\xi)\eta v_4 + \end{aligned} \quad (17)$$

$$+ \frac{1}{2} \left[ \frac{a}{b} (\xi - \xi^2) + \nu \frac{b}{a} (\eta - \eta^2) \right] (u_1 - u_2 + u_3 - u_4), \quad (18)$$

где  $\xi = x/a$ ,  $\eta = y/b$ .

В работе [6] для определения моментных напряжений  $\mu_x$  и  $\mu_y$  предлагается использовать следующие формулы

$$\mu_x = \frac{2El^2}{1+\nu} \gamma_x, \quad \mu_y = \frac{2El^2}{1+\nu} \gamma_y, \quad (19)$$

где  $\gamma_x$  и  $\gamma_y$  – кривизна, при этом

$$\gamma_x = \frac{\partial \omega_{\bar{z}}}{\partial x}, \quad \gamma_y = \frac{\partial \omega_{\bar{z}}}{\partial y}, \quad (20)$$

$$\omega_{\bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \text{вя} \quad (21)$$

Используя зависимости Коши (13) и выражения кривизны (20), а также значения для перемещений (17) и (18), находим компоненты деформаций в матричной форме:

$$\varepsilon^s = D^s q^s, \quad (22)$$

где  $\varepsilon^s = (\varepsilon_x^s, \varepsilon_y^s, \gamma_{xy}^s, \gamma_x^s, \gamma_y^s)^T$  – вектор узловых деформаций;  $D^s$  – матрица деформаций. При этом для матрицы деформаций имеем

$$D^s = \frac{1}{2ab} \begin{vmatrix} 2b(\eta-1) & av(1-2\xi) & 2b(1-\eta) & av(2\xi-1) & 2b\eta & av(1-2\xi) & -2b\eta & av(2\xi-1) \\ bv(1-2\eta) & 2a(\xi-1) & bv(2\eta-1) & -2a\xi & bv(1-2\eta) & 2a\xi & bv(2\eta-1) & 2a(1-\xi) \\ -a & -b & -a & b & a & b & a & -b \\ -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}. \quad (23)$$

Используя формулы (10), (11), (12) и (19), представим вектор напряжения  $\sigma^s = (\sigma_x^s, \sigma_y^s, \tau_1^s, \mu_x^s, \mu_y^s)^T$  через матрицу упругости  $\tilde{D}^s$ , имеем

$$\sigma^s = \tilde{D}^s \varepsilon^s = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1-\nu)l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1-\nu)l^2 \end{vmatrix} \varepsilon^s. \quad (24)$$

Подставляя (22) в (24), для изотропного материала находим

$$\sigma^s = \bar{E}^s q^s, \quad (25)$$

где

$$\bar{E}^s = \frac{E}{2(1-\nu^2)ab} \begin{vmatrix} b[2(\eta-1) + \nu^2(1-2\eta)] & av-1 & b[2(1-\eta) + \nu^2(2\eta-1)] & -av \\ bv-1 & a[2(\xi-1) + \nu^2(1-2\xi)] & 1-b\nu & a[\nu^2(2\xi-1) - 2\xi] \\ -\frac{a(1-\nu)}{2} & -\frac{b(1-\nu)}{2} & -\frac{a(1-\nu)}{2} & \frac{b(1-\nu)}{2} \\ -4(1-\nu)l^2 & 0 & 4(1-\nu)l^2 & 0 \\ 0 & 4(1-\nu)l^2 & 0 & -4(1-\nu)l^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc}
b[2\eta + \nu^2(1-2\eta)] & a\nu & -b[2\eta + \nu^2(1-2\eta)] & b[2(1-\eta) + \nu^2(2\eta-1)] \\
\frac{b\nu}{a(1-\nu)} & a[2\xi + \nu^2(1-2\xi)] & -b\nu & 1-b\nu \\
\frac{2}{2} & \frac{b(1-\nu)}{2} & \frac{a(1-\nu)}{2} & -\frac{b(1-\nu)}{2} \\
-4(1-\nu)l^2 & 0 & 4(1-\nu)l^2 & 0 \\
0 & 4(1-\nu)l^2 & 0 & -4(1-\nu)l^2
\end{array} \Bigg\| \quad . \quad (26)$$

Для определения компонентов матрицы жесткости плоско-напряженного прямоугольного конечного элемента (рис.1) используем следующую формулу[4]:

$$K = h \int_0^a \int_0^b (D^s)^T \bar{E}^s dx dy. \quad (27)$$

Исходя из значений матрицы деформаций  $D^s$  и матрицы напряжений  $\bar{E}^s$ , которые соответственно определяются формулами (23) и (26), из соотношений (27) для компонентов матрицы

жесткости  $k^s = \frac{hE}{4ab(1-\nu^2)} \|k^s_{ij}\|$  получим

$$\begin{aligned}
k_{11}^s &= k_{33}^s = k_{55}^s = k_{77}^s = \frac{1-\nu}{2} a^2 + \frac{4-\nu^2}{3} b^2 + 8(1-\nu)l^2, \\
k_{22}^s &= k_{44}^s = k_{66}^s = k_{88}^s = \frac{4-\nu^2}{3} a^2 + \frac{1-\nu}{2} b^2 + 8(1-\nu)l^2, \\
k_{21}^s &= k_{65}^s = k_{74}^s = k_{83}^s = \frac{1+\nu}{2} ab, \\
k_{31}^s &= k_{75}^s = \frac{1-\nu}{2} a^2 - \frac{4-\nu^2}{3} b^2 - 8(1-\nu)l^2, \\
k_{41}^s &= k_{63}^s = k_{72}^s = k_{85}^s = -\frac{1-3\nu}{2} ab, \\
k_{51}^s &= k_{73}^s = -\frac{1-\nu}{2} a^2 - \frac{2+\nu^2}{3} b^2 + 8(1-\nu)l^2, \\
k_{61}^s &= k_{52}^s = k_{43}^s = k_{87}^s = -\frac{1+\nu}{2} ab \\
k_{71}^s &= k_{53}^s = -\frac{1-\nu}{2} a^2 + \frac{2+\nu^2}{3} b^2 - 8(1-\nu)l^2, \\
k_{81}^s &= k_{32}^s = k_{54}^s = k_{76}^s = \frac{1-3\nu}{2} ab, \\
k_{42}^s &= k_{86}^s = \frac{2+\nu^2}{3} a^2 - \frac{1-\nu}{2} b^2 - 8(1-\nu)l^2, \\
k_{62}^s &= k_{84}^s = -\frac{2+\nu^2}{3} a^2 - \frac{1-\nu}{2} b^2 + 8(1-\nu)l^2, \\
k_{82}^s &= k_{64}^s = -\frac{4-\nu^2}{3} a^2 + \frac{1-\nu}{2} b^2 - 8(1-\nu)l^2.
\end{aligned} \quad (28)$$

Тогда для потенциальной энергии деформации s-го прямоугольного плоско-напряженного элемента получим формулу [1]

$$\bar{\Omega}^s = 0.5(q^s)^T k^s q^s. \quad (29)$$

Пусть на линиях  $x=0$  и  $x=a$   $s$ -го конечного элемента (рис.1) в противоположном оси  $x$  направлении действуют равномерно распределенные нагрузки  $\tilde{p}_{x0}$  и  $\tilde{p}_{xa}$ , а на линиях  $y=0$  и  $y=b$  в противоположном оси  $y$  направлении действуют равномерно распределенные нагрузки  $\tilde{p}_{y0}$  и  $\tilde{p}_{yb}$ . Работа этих сил для  $s$ -го конечного элемента определяется по формуле

$$\hat{\Omega}^s = -\int_0^b \tilde{p}_{x0} u|_{x=0} dy - \int_0^b \tilde{p}_{xa} u|_{x=a} dy - \int_0^a \tilde{p}_{y0} v|_{y=0} dx - \int_0^a \tilde{p}_{yb} v|_{y=b} dx. \quad (30)$$

Исходя из связей (17) и (18) для определения  $u$  и  $v$  соответственно при  $x=0$ ,  $x=a$  и  $y=0$ ,  $y=b$  находим

$$u|_{x=0} = (1-\eta)u_1 + \eta u_4 + \frac{b}{2a}(\eta - \eta^2)(v_1 - v_2 + v_3 - v_4), \quad (31)$$

$$u|_{x=a} = (1-\eta)u_2 + \eta u_3 + \frac{b}{2a}(\eta - \eta^2)(v_1 - v_2 + v_3 - v_4), \quad (32)$$

$$v|_{y=0} = \xi v_2 + (1-\xi)v_1 + \frac{a}{2b}(\xi - \xi^2)(u_1 - u_2 + u_3 - u_4), \quad (33)$$

$$v|_{y=b} = \xi v_3 + (1-\xi)v_4 + \frac{a}{2b}(\xi - \xi^2)(u_1 - u_2 + u_3 - u_4). \quad (34)$$

Подставляя их в (30), получим:

$$\hat{\Omega}^s = (\tilde{P}_{x0}^s)^T q^s + (\tilde{P}_{xa}^s)^T q^s + (\tilde{P}_{y0}^s)^T q^s + (\tilde{P}_{yb}^s)^T q^s, \quad (35)$$

где

$$\tilde{P}_{x0}^s = -\tilde{p}_{x0} \frac{b}{2} \left( 1, \frac{b}{6a}, 0, -\frac{b}{6a}, 0, \frac{b}{6a}, 1, -\frac{b}{6a} \right)^T, \quad (36)$$

$$\tilde{P}_{xa}^s = -\tilde{p}_{xa} \frac{b}{2} \left( 0, \frac{b}{6a}, 1, -\frac{b}{6a}, 1, \frac{b}{6a}, 0, -\frac{b}{6a} \right)^T, \quad (37)$$

$$\tilde{P}_{y0}^s = -\tilde{p}_{y0} \frac{a}{2} \left( \frac{a}{6b}, 1, -\frac{a}{6b}, 1, \frac{a}{6b}, 0, -\frac{a}{6b}, 0 \right)^T, \quad (38)$$

$$\tilde{P}_{yb}^s = -\tilde{p}_{yb} \frac{a}{2} \left( \frac{a}{6b}, 0, -\frac{a}{6b}, 0, \frac{a}{6b}, 1, -\frac{a}{6b}, 1 \right)^T. \quad (39)$$

Принимая во внимание формулы (29) и (35), находим потенциальную энергию системы для  $s$ -го конечного элемента:

$$\Omega^s = \bar{\Omega}^s - \hat{\Omega}^s = 0,5(q^s)^T k^s q^s - (\tilde{P}_{x0}^s)^T q^s - (\tilde{P}_{xa}^s)^T q^s - (\tilde{P}_{y0}^s)^T q^s - (\tilde{P}_{yb}^s)^T q^s. \quad (40)$$

Исходя из принципа минимума потенциальной энергии системы, для определения искомых векторов  $q^s, s \in \{1, 2, \dots, \bar{n}\}$  получим следующую задачу квадратичного программирования:

$$\min \left\{ \sum_{s=1}^{\bar{n}} (0,5(q^s)^T k^s q^s - (\tilde{P}_{x0}^s)^T q^s - (\tilde{P}_{xa}^s)^T q^s - (\tilde{P}_{y0}^s)^T q^s - (\tilde{P}_{yb}^s)^T q^s) \mid \text{краевые условия} \right\}. \quad (41)$$

Пусть  $q = (u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n)^T$  – вектор узловых перемещений,

$P = (P_{1,x}, P_{1,y}, P_{2,x}, P_{2,y}, \dots, P_{n,x}, P_{n,y})^T$  – вектор узловых нагрузок,  $n$  – общее число узлов пластины,

$K = \frac{hE}{12ab(1-\nu^2)} \|K_{ij}\|$  – матрица жесткости для всей пластины.



$$\bar{D} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a} & \frac{\nu}{2b} & \frac{1}{a} & -\frac{\nu}{2b} & 0 & \frac{\nu}{2b} & 0 & -\frac{\nu}{2b} \\ \frac{\nu}{2a} & -\frac{1}{b} & -\frac{\nu}{2a} & 0 & \frac{\nu}{2a} & 0 & -\frac{\nu}{2a} & \frac{1}{b} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{2b}{ab} & 0 & \frac{1}{ab} & 0 & -\frac{1}{ab} & 0 & \frac{1}{ab} & 0 \\ 0 & \frac{1}{ab} & 0 & -\frac{1}{ab} & 0 & \frac{1}{ab} & 0 & -\frac{1}{ab} \\ -\frac{1}{a} & -\frac{\nu}{2b} & \frac{1}{a} & \frac{\nu}{2b} & 0 & -\frac{\nu}{2b} & 0 & \frac{\nu}{2b} \\ \frac{\nu}{2a} & 0 & -\frac{\nu}{2a} & -\frac{1}{b} & \frac{\nu}{2a} & \frac{1}{b} & -\frac{\nu}{2a} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{2b}{ab} & 0 & \frac{1}{ab} & 0 & -\frac{1}{ab} & 0 & \frac{1}{ab} & 0 \\ 0 & \frac{1}{ab} & 0 & -\frac{1}{ab} & 0 & \frac{1}{ab} & 0 & -\frac{1}{ab} \\ 0 & -\frac{\nu}{2b} & 0 & \frac{\nu}{2b} & \frac{1}{a} & -\frac{\nu}{2b} & -\frac{1}{a} & \frac{\nu}{2b} \\ -\frac{\nu}{2a} & 0 & \frac{\nu}{2a} & -\frac{1}{b} & -\frac{\nu}{2a} & \frac{1}{b} & \frac{\nu}{2a} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{2b}{ab} & 0 & \frac{1}{ab} & 0 & -\frac{1}{ab} & 0 & \frac{1}{ab} & 0 \\ 0 & \frac{1}{ab} & 0 & -\frac{1}{ab} & 0 & \frac{1}{ab} & 0 & -\frac{1}{ab} \\ 0 & \frac{\nu}{2b} & 0 & -\frac{\nu}{2b} & \frac{1}{a} & \frac{\nu}{2b} & -\frac{1}{a} & -\frac{\nu}{2b} \\ -\frac{\nu}{2a} & -\frac{1}{b} & \frac{\nu}{2a} & 0 & -\frac{\nu}{2a} & 0 & \frac{\nu}{2a} & \frac{1}{b} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{2b}{ab} & 0 & \frac{1}{ab} & 0 & -\frac{1}{ab} & 0 & \frac{1}{ab} & 0 \\ 0 & \frac{1}{ab} & 0 & -\frac{1}{ab} & 0 & \frac{1}{ab} & 0 & -\frac{1}{ab} \\ 0 & \frac{\nu}{2b} & 0 & -\frac{\nu}{2b} & \frac{1}{a} & \frac{\nu}{2b} & -\frac{1}{a} & -\frac{\nu}{2b} \\ -\frac{\nu}{2a} & -\frac{1}{b} & \frac{\nu}{2a} & 0 & -\frac{\nu}{2a} & 0 & \frac{\nu}{2a} & \frac{1}{b} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{2b}{ab} & 0 & \frac{1}{ab} & 0 & -\frac{1}{ab} & 0 & \frac{1}{ab} & 0 \\ 0 & \frac{1}{ab} & 0 & -\frac{1}{ab} & 0 & \frac{1}{ab} & 0 & -\frac{1}{ab} \end{pmatrix} \quad (44)$$

Обобщенный закон Гука (10)–(12) перепишем в виде

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x), \quad \tau_c = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}.$$

Откуда, с учетом формул (13), находим:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial v}{\partial y}\right), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad \tau_c = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right). \quad (45)$$

Формулы для определения моментных напряжений  $\mu_x$  и  $\mu_y$  (19) с учетом связей (20) и (21)

перепишутся в виде:

$$\mu_x = \frac{El^2}{1+\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \mu_y = \frac{El^2}{1+\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (46)$$

Обозначим

$$\sigma = (\sigma_x^1, \sigma_y^1, \tau_1^1, \mu_x^1, \mu_y^1, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \tau_1^2, \mu_x^2, \mu_y^2, \sigma_x^3, \sigma_y^3, \tau_1^3, \mu_x^3, \mu_y^3, \sigma_x^4, \sigma_y^4, \tau_1^4, \mu_x^4, \mu_y^4)^T$$

через  
вектор

напряжения. Тогда, используя зависимости (45) и (46), находим  $\sigma = \bar{E} \bar{q}$ ,

где

$$\bar{E} = \frac{hE}{2(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} \frac{2-\nu^2}{a} & \frac{\nu}{b} & \frac{2-\nu^2}{a} & \frac{\nu}{b} & \frac{\nu^2}{a} & \frac{\nu}{b} & -\frac{\nu^2}{a} & \frac{\nu}{b} \\ -\frac{\nu}{a} & -\frac{2-\nu^2}{b} & \frac{\nu}{a} & -\frac{\nu^2}{b} & \frac{\nu}{a} & \frac{\nu^2}{b} & -\frac{\nu}{a} & \frac{2-\nu^2}{b} \\ \frac{1-\nu}{2b} & \frac{1-\nu}{2a} & \frac{1-\nu}{2b} & \frac{1-\nu}{2a} & \frac{1-\nu}{2b} & \frac{1-\nu}{2a} & \frac{1-\nu}{2b} & -\frac{1-\nu}{2a} \\ \frac{4(1-\nu)l^2}{4b} & 0 & \frac{4(1-\nu)l^2}{4b} & 0 & -\frac{4(1-\nu)l^2}{4b} & 0 & \frac{4(1-\nu)l^2}{4b} & 0 \\ \frac{ab}{ab} & 0 & \frac{ab}{ab} & 0 & -\frac{ab}{ab} & 0 & \frac{ab}{ab} & 0 \\ 0 & \frac{4(1-\nu)l^2}{ab} & 0 & -\frac{4(1-\nu)l^2}{ab} & 0 & \frac{4(1-\nu)l^2}{ab} & 0 & -\frac{4(1-\nu)l^2}{ab} \\ \frac{2-\nu^2}{a} & \frac{\nu}{b} & \frac{2-\nu^2}{a} & \frac{\nu}{b} & \frac{\nu^2}{a} & \frac{\nu}{b} & -\frac{\nu^2}{a} & \frac{\nu}{b} \\ -\frac{\nu}{a} & -\frac{\nu^2}{b} & \frac{\nu}{a} & -\frac{2-\nu^2}{b} & \frac{\nu}{a} & \frac{2-\nu^2}{b} & -\frac{\nu}{a} & \frac{\nu^2}{b} \\ \frac{1-\nu}{2b} & \frac{1-\nu}{2a} & \frac{1-\nu}{2b} & \frac{1-\nu}{2a} & \frac{1-\nu}{2b} & \frac{1-\nu}{2a} & \frac{1-\nu}{2b} & -\frac{1-\nu}{2a} \\ \frac{4(1-\nu)l^2}{4b} & 0 & \frac{4(1-\nu)l^2}{4b} & 0 & -\frac{4(1-\nu)l^2}{4b} & 0 & \frac{4(1-\nu)l^2}{4b} & 0 \\ \frac{ab}{ab} & 0 & \frac{ab}{ab} & 0 & -\frac{ab}{ab} & 0 & \frac{ab}{ab} & 0 \\ 0 & \frac{4(1-\nu)l^2}{ab} & 0 & -\frac{4(1-\nu)l^2}{ab} & 0 & \frac{4(1-\nu)l^2}{ab} & 0 & -\frac{4(1-\nu)l^2}{ab} \\ \frac{\nu^2}{a} & \frac{\nu}{b} & \frac{\nu^2}{a} & \frac{\nu}{b} & \frac{2-\nu^2}{a} & \frac{\nu}{b} & -\frac{2-\nu^2}{a} & \frac{\nu}{b} \\ -\frac{\nu}{a} & -\frac{\nu^2}{b} & \frac{\nu}{a} & -\frac{2-\nu^2}{b} & \frac{\nu}{a} & \frac{2-\nu^2}{b} & -\frac{\nu}{a} & \frac{\nu^2}{b} \\ \frac{1-\nu}{2b} & \frac{1-\nu}{2a} & \frac{1-\nu}{2b} & \frac{1-\nu}{2a} & \frac{1-\nu}{2b} & \frac{1-\nu}{2a} & \frac{1-\nu}{2b} & -\frac{1-\nu}{2a} \\ \frac{4(1-\nu)l^2}{4b} & 0 & \frac{4(1-\nu)l^2}{4b} & 0 & -\frac{4(1-\nu)l^2}{4b} & 0 & \frac{4(1-\nu)l^2}{4b} & 0 \\ \frac{ab}{ab} & 0 & \frac{ab}{ab} & 0 & -\frac{ab}{ab} & 0 & \frac{ab}{ab} & 0 \\ 0 & \frac{4(1-\nu)l^2}{ab} & 0 & -\frac{4(1-\nu)l^2}{ab} & 0 & \frac{4(1-\nu)l^2}{ab} & 0 & -\frac{4(1-\nu)l^2}{ab} \\ \frac{\nu^2}{a} & \frac{\nu}{b} & \frac{\nu^2}{a} & \frac{\nu}{b} & \frac{2-\nu^2}{a} & \frac{\nu}{b} & -\frac{2-\nu^2}{a} & \frac{\nu}{b} \\ -\frac{\nu}{a} & -\frac{2-\nu^2}{b} & \frac{\nu}{a} & -\frac{\nu^2}{b} & \frac{\nu}{a} & \frac{\nu^2}{b} & -\frac{\nu}{a} & \frac{2-\nu^2}{b} \\ \frac{1-\nu}{2b} & \frac{1-\nu}{2a} & \frac{1-\nu}{2b} & \frac{1-\nu}{2a} & \frac{1-\nu}{2b} & \frac{1-\nu}{2a} & \frac{1-\nu}{2b} & -\frac{1-\nu}{2a} \\ \frac{4(1-\nu)l^2}{4b} & 0 & \frac{4(1-\nu)l^2}{4b} & 0 & -\frac{4(1-\nu)l^2}{4b} & 0 & \frac{4(1-\nu)l^2}{4b} & 0 \\ \frac{ab}{ab} & 0 & \frac{ab}{ab} & 0 & -\frac{ab}{ab} & 0 & \frac{ab}{ab} & 0 \\ 0 & \frac{4(1-\nu)l^2}{ab} & 0 & -\frac{4(1-\nu)l^2}{ab} & 0 & \frac{4(1-\nu)l^2}{ab} & 0 & -\frac{4(1-\nu)l^2}{ab} \end{pmatrix}$$

Перемещения, задаваемые формулами (17) и (18), не удовлетворяют требованиям, обеспечивающим межэлементную непрерывность деформаций.

Рассмотрим случай учета непрерывности деформаций в узловых точках. В общем случае в каждом узле  $i \in N = \{1, 2, \dots, n\}$  сходятся четыре конечных элемента (рис.8.4).

Условия непрерывности деформаций в  $i$ -ом узле зададим соотношениями (рис.2)

$$\varepsilon_x^s(a, b) = \varepsilon_x^{s+1}(0, b), \quad \varepsilon_x^s(a, b) = \varepsilon_x^{s+2}(a, 0), \quad \varepsilon_x^s(a, b) = \varepsilon_x^{s+3}(0, 0), \quad (47)$$

$$\varepsilon_y^s(a,b) = \varepsilon_y^{s+1}(0,b), \quad \varepsilon_y^s(a,b) = \varepsilon_y^{s+2}(a,0), \quad \varepsilon_y^s(a,b) = \varepsilon_y^{s+3}(0,0), \quad (48)$$

$$\gamma_{xy}^s(a,b) = \gamma_{xy}^{s+1}(0,b), \quad \gamma_{xy}^s(a,b) = \gamma_{xy}^{s+2}(a,0), \quad \gamma_{xy}^s(a,b) = \gamma_{xy}^{s+3}(0,0), \quad (49)$$

$$\gamma_x^s(a,b) = \gamma_x^{s+1}(0,b), \quad \gamma_x^s(a,b) = \gamma_x^{s+2}(a,0), \quad \gamma_x^s(a,b) = \gamma_x^{s+3}(0,0), \quad (50)$$

$$\gamma_y^s(a,b) = \gamma_y^{s+1}(0,b), \quad \gamma_y^s(a,b) = \gamma_y^{s+2}(a,0), \quad \gamma_y^s(a,b) = \gamma_y^{s+3}(0,0). \quad (51)$$

Принимая во внимание, что перемещения (17) и (18) изменяются по квадратичным законам, а деформации (13) и (20) с учетом (21) – по линейным, легко увидеть, что при выполнении условий (47)-(51) удовлетворяется межэлементная непрерывность перемещений и деформаций по всей линии контакта между смежными элементами.

Используя формулы (13), (20), (21), (17) и (18), определяем узловые значения компонентов деформаций. Подставляя их в приведенные условия непрерывности деформаций (47)– (51), соответственно находим

$$2b(u^j - 2u^i + u^k) + av(v^{j-1} - v^j - v^{k-1} + v^k) = 0, \quad (52)$$

$$v^{j-1} - v^{i-1} - 2v^j + 2v^i + v^{j+1} - v^{i+1} = 0, \quad (53)$$

$$2b(u^j - 2u^i + u^k) + av(v^{j-1} - v^j - v^{i-1} + 2v^i - v^{i+1} - v^k + v^{k+1}) = 0, \quad (54)$$

$$u^{j-1} - 2u^{i-1} + u^{k-1} - u^j + 2u^i - u^k = 0, \quad (55)$$

$$2a(v^{i-1} - 2v^i + v^{i+1}) + bv(u^{j-1} - u^{j+1} - u^{i-1} + u^{i+1}) = 0, \quad (56)$$

$$2a(v^{i-1} - 2v^i + v^{i+1}) + bv(u^{j-1} - u^j - u^{i-1} + 2u^i - u^{i+1} - u^k + u^{k+1}) = 0, \quad (57)$$

$$b(-v^{j-1} + 2v^{i-1} - v^{k-1} - v^j + 2v^i - v^k) + a(u^j - u^{j-1} - u^k + u^{k-1}) = 0, \quad (58)$$

$$a(u^{i-1} - 2u^i + u^{i+1} + u^{j-1} - 2u^j + u^{j+1}) + b(v^{j-1} - v^{j+1} - v^{i-1} + v^{i+1}) = 0, \quad (59)$$

$$b(v^j - 2v^i + v^k + v^{j-1} - v^{i-1} + v^{k+1} - v^{i+1}) + a(u^{i-1} - 2u^i + u^{i+1} + u^{j-1} - u^j - u^k + u^{k+1}) = 0. \quad (60)$$

$$u^{j-1} - 2u^{i-1} + u^{k-1} - u^j + 2u^i - u^k = 0, \quad (61)$$

$$u^{j-1} - u^{i-1} - 2u^j + 2u^i + u^{j+1} - u^{i+1} = 0, \quad (62)$$

$$u^{j-1} - u^{i-1} - u^j + u^{i+1} + u^k - u^{k+1} = 0, \quad (63)$$

$$v^{j-1} - 2v^{i-1} + v^{k-1} - v^j + 2v^i - v^k = 0, \quad (64)$$

$$v^{j-1} - v^{i-1} - 2v^j + 2v^i + v^{j+1} - v^{i+1} = 0, \quad (65)$$

$$v^{j-1} - v^{i-1} - v^j + v^{i+1} + v^k - v^{k+1} = 0. \quad (66)$$

Условия непрерывности деформаций представлены в виде пятнадцати уравнений (52) - (66), из которых (55) и (61), а также (53) и (65), соответственно, совпадают. Оставшиеся тринадцать уравнений содержат восемнадцать переменных. Исключив из этих уравнений двенадцать переменных  $u^{i-1}, u^i, u^{i+1}, u^{j-1}, u^{j+1}, v^{i-1}, v^i, v^{i+1}, v^j, v^k, v^{j-1}, v^{k-1}$ , представим его в виде

$$a(2u^{k-1} - 4u^k + 2u^{k+1}) + b(3v^{k+1} - v^{j+1}) = 0. \quad (67)$$

Перепишем все необходимые условия непрерывности деформаций, заданные соотношением (67), в виде системы уравнений:

$$\hat{H}q = 0, \quad (68)$$

где  $\hat{H}$  - матрица порядка  $\hat{n} \times 2n$ ,  $\hat{n}$  - количество необходимых уравнений (67).

С учетом равенств (68) задача (43) примет вид

$$\min\{0,5q^T Dq + C^T q \mid Aq < 0, \hat{H}q = 0, \text{ краевые условия} \}. \quad (69)$$

Рассмотрим задачу об определении деформированного состояния балки-стенки (рис.3), заземленной по своей нижней грани, когда к ее верхней грани приложены нагрузки в виде равномерно распределенной нагрузки интенсивностью  $\tilde{p}_{yb}$ . Произведем расчеты для сетки 6 x 3 (рис.3) в двух вариантах: без учета и с учетом условий выполнения межэлементной непрерывности деформаций (68).

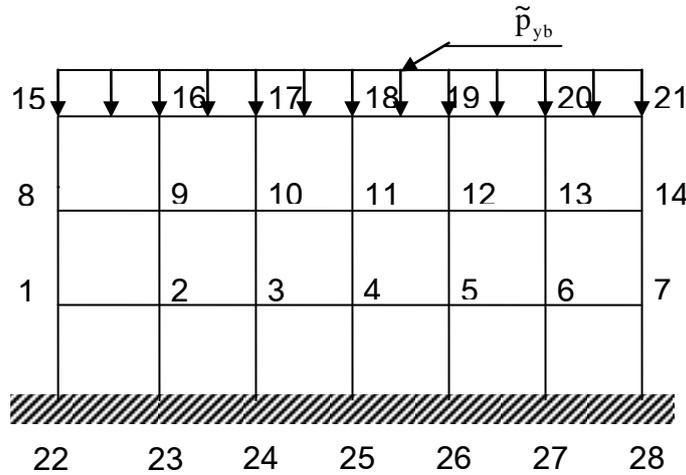


Рис.3. Балка-стенка. Сетка 6 x 3

Составим граничные условия. Учитывая, что на заземленной нижней грани узловые значения перемещения равны нулю, имеем

$$u_i = v_i = 0; \quad i \in \{22, 23, \dots, 28\}. \quad (70)$$

На основе формулы (39), определим ненулевые значения, эквивалентные внешней нагрузке вектора узловых нагрузок, находим

$$P_{15,y} = P_{21,y} = 0,5\tilde{p}_{yb}a, \quad P_{i,y} = \tilde{p}_{yb}a, \quad i \in \{16, 17, \dots, 20\}. \quad (71)$$

С учетом связей (70) и (71) для определения искомого вектора узловых перемещений  $q$  в первом варианте решается задача квадратичного программирования (43), а во втором – (69). Как следует из этих расчетов, учет условий межэлементной непрерывности деформаций существенно влияет на значение вектора узловых перемещений. Отметим, что для реализации задачи использован алгоритм решения задач квадратичного программирования, приведенный в [2].

Գ.Ա. Գևորգյան,  
Ն.Վ. Փիրումյան,  
Ն.Ռ.Մեհրաբեկյան

**ՈՒՂԱՆԿՅՈՒՆ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՏԱՐԲԵՐԻ ԵՂԱՆԱԿ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՍՈՍԵՆՏԱՅԻՆ  
ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՀԱՄԱՐ**

*Դիտարկվում է ուղղանկյունաձև վերջավոր տարրերի եղանակ, մոմենտային լարումների հաշվառմամբ հարթ խնդիրների լուծման համար, որում տարրերի կողմերի երկայնքով տեղափոխությունները փոփոխվում են քառակուսային օրենքով: Հաշվի է առնվում տեղափոխությունների և դեֆորմացիաների միջտարրային անընդհատությունը հարակից տարրերի հպման գծի ողջ երկայնքով: Օգտագործվում է մոմենտային առաձգականության տեսության առաջին վարկածը, որում նոր իզոտրոպ մոդելի առաձգական վարքը բնութագրվում է չորս առաձգական հաստատուններով:*

***Առանցքային բառեր.** վերջավոր տարրեր, տեղափոխություններ, քառակուսային ծրագրավորում, հարթ խնդիր, առաձգականության մոմենտային տեսություն*

**G.A. Gevorgyan,  
N.V. Pirumyan,  
N.R. Mehrabekyan**

**THE METHOD OF RECTANGULAR FINAL ELEMENTS FOR SOLUTIONS OF PLANE  
PROBLEMS OF MOMENT THEORY OF ELASTICITY**

*Considered the finite element method for the solution of rectangular shapes, to solve plane problems of moment theory of elasticity, wherein along the sides elements of movement changes quadratically. Taken into account inter-element continuity of movement and deformations across the line of contact between adjacent elements. It uses the first option of the moment theory of elasticity, wherein the elastic behavior of the new anisotropic model characterized by four elastic constants.*

**Keywords:** *final elements, nodal movement, quadratic programming, plane problems, moment theory of elasticity*

**Литература**

1. **Галлагер Р.Г.** Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
2. **Геворкян Г.А.** Механические модели и алгоритмы решения задач математического программирования.- Ереван : Изд-во АН Армянской ССР, 1987.- 184 с.
3. **Геворкян Г.А.,Севян С. Л.** Учет межэлементной непрерывности деформаций при решении плоских задач теории упругости методом конечных элементов// Вестник инженерной академии Армении. – Ереван, 2007. - Т.4, N 3. - С. 432–435.
4. **Постнов В. А., Хархурим И.Я.** Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций.- Л.: Судостроение, 1974.- 384 с.

5. **Савин Г. Н.** Распределение напряжений около отверстий. - Киев: Наукова думка, 1968. - 888 с.
6. **Савин Г. Н.** Основы плоской задачи моментной теории упругости: конспект лекций. –Киев: Изд-во Киевского ордена Ленина государственного университета им. Т. Г. Шевченко, 1965.– 162 с.
7. **Turner M. J., Glough R.W., Martin H. C., Topp L. J.** Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures //Aero.Sci. - Sept.1956. - V.23,N 23, 9. - P. 805-824.

Работа осуществлена в рамках программы ”Выявление, уточнение, разработка предложений и рекомендаций по внедрению путей устойчивого развития архитектурного и строительного комплексов РА с применением постоянного мониторинга”, по базовому финансированию из госбюджета РА научной и научно-технической деятельности.

**Գևորգյան Գագիկ Արշալույսի, ֆ.-ւ.գ.դ., պրոֆ.** (ՀՀ, ք. Երևան) – ՃՇՀԱՀ, ակ. Ալ. Թամանյանի անվան Ճարտարապետության և շինարարության պրոբլեմային լաբորատորիա, և.գ.ա., Ինֆորմատիկայի, հաշվողական տեխնիկայի և կառավարման համակարգերի ստրիկտ, (+374) 93229253, gagikgevorgyan2006@yahoo.com, **Փիրումյան Նարինե Վիլիկի, տ.գ.թ.** (ՀՀ, ք. Երևան) - ՃՇՀԱՀ, Գիտահետազոտական տեկտոր, գիտ. քարտուղար, հեռ. (+374) 10580541, science@ysuac.am, **Մեհրաբեկյան Նոննա Ռաֆայելի** (ՀՀ, ք. Երևան) - ՃՇՀԱՀ, ակ. Ալ. Թամանյանի անվան Ճարտարապետության և շինարարության պրոբլեմային լաբորատորիա, կ.գ.ա., (+374) 95613045, nonna2004n@yahoo.com:

**Геворкян Гагик Аршалуйсович, д. ф.-м. н., проф.** (РА, г. Ереван)- НУАСА, Проблемная лаборатория Архитектуры и строительства им. акад. Ал. Таманяна, с.н.с., кафедра Информатики, вычислительной техники и систем управления, (+374) 93229253, gagikgevorgyan2006@yahoo.com, **Пирумян Нарине Виликовна, к.т.н.** (РА, г. Ереван)- НУАСА, Научно-исследовательский сектор, ученый секретарь, (+374) 10580541, science@ysuac.am, **Мехрабекян Нонна Рафаэловна** (РА, г. Ереван)- НУАСА, Проблемная лаборатория Архитектуры и строительства им. акад. Ал. Таманяна., м.н.с., (+374) 95613045, nonna2004n@yahoo.com.

**Gevorgyan Gagik Arshaluys, doctor of science (engineering)**(RA, Yerevan) – NUACA, Problem Laboratory of Architecture and Construction by Academician Al.Tamanyan, senior scientific researcher, Chair of Informatics, Computer Engineering and Management Systems, (+374) 93229253, gagikgevorgyan2006@yahoo.com, **Pirumyan Narine Vilik, doctor of Philosophy (Ph.D) in engineering** (RA, Yerevan ) - NUACA, Scientific Reserch Sector, scientific secretary, (+374) 10580541, science@ysuac.am, **Mehrabekyan Nonna Rafael** (RA, Yerevan) - NUACA, Problem Laboratory of Architecture and Construction by Academician Al. Tamanyan, junior scientific researcher, (+374) 95613045, nonna2004n@yahoo.com.

Ներկայացվել է՝ 11.09.2015թ.

Ընդունվել է տպագրության՝ 15.10.2015թ.