

РАСЧЕТ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК С УЧЕТОМ ПОЛЗУЧЕСТИ БЕТОНА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Предлагается методика расчета напряженно-деформированного состояния железобетонных преднапряженных балок при квазистатическом переменном нагружении с учетом ползучести бетона. Представлены результаты численных экспериментов, демонстрирующие влияние траектории криволинейного армирования на величину обратного выгиба балки.

Работа выполняется в рамках плана фундаментальных научных исследований Федерального государственного бюджетного учреждения «Южное региональное отделение РААСН».

Ключевые слова: наследственная теория ползучести бетона, механико-математическая модель упруго-ползучего стареющего материала, предварительное натяжение арматуры, шаговая процедура метода конечных элементов

Опыт современного строительства показал, что создание начального напряженно-деформированного состояния в железобетонных балках путем обжатия бетона с помощью предварительно растянутой арматуры позволяет создавать экономичные большепролетные перекрытия многоэтажных зданий и сооружений. Вместе с тем, в нормативном документе СП 52-102-2004 [1], регламентирующем проектирование преднапряженных железобетонных конструкций, влияние ползучести бетона учитывается только на этапе определения потерь предварительного натяжения арматуры. В этой связи актуальной является проблема анализа длительного деформирования преднапряженных железобетонных балок с учетом наблюдаемого на практике явления быстро нарастающей ползучести и эффекта “возрастного” наследования напряженно-деформированного состояния, обусловленного историей нагружения конструкции. Общеизвестным универсальным подходом к исследованию напряженно-деформированного состояния преднапряженных железобетонных конструкций является расчет, базирующийся на методе конечных элементов (МКЭ). Отметим, что конечно-элементное моделирование позволяет учесть основные физические и механические аспекты работы преднапряженных железобетонных конструкций.

Рассмотрим концепцию применения МКЭ к решению плоской задачи линейной теории ползучести бетона. Для описания ползучести используем феноменологическую модель стареющего бетона, предложенную С.В.Александровским [2]. В рамках теории наследственного старения с помощью символьного процессора компьютерной математики Maple было получено следующие выражения для ядра релаксации бетона, удобное для программирования:

$$R(t, \tau) = -\frac{1}{E(t)} \left\{ K(\tau)^2 F'(\tau) (e^{\gamma\tau} - A_2) - K'(\tau) - \left[\frac{E'(\tau) (e^{\gamma\tau} - A_2) e^{-\eta}}{1 + \Delta(\tau) E(\tau)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \left[E(\tau) (e^{\gamma\tau} - A_2) e^{-\eta(\tau)} \left[\Delta(\tau) E'(\tau) - \frac{(A_1 - A_3) E(\tau)}{\tau^2} \right] \right] \right] (1 + \Delta(\tau) E(\tau))^{-2} + \right. \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{E(\tau) \gamma e^{\gamma\tau} e^{-\eta}}{1 + \Delta(\tau) E(\tau)} \left[u(\tau) + B_3(t) e^{-\mu(t)(t-\tau)} \right] \left. \vphantom{\frac{E(\tau) \gamma e^{\gamma\tau} e^{-\eta}}{1 + \Delta(\tau) E(\tau)}}} \right\}, \text{ где } u(\tau) = \int_{\tau}^t K(\tau) F'(\tau) e^{\eta(\tau)} d\tau; \\
\mu(t) = & B_3(t)^{-1} \left\{ \left[\frac{2A_3}{t^3 (e^{\gamma t} - A_2)} + \frac{2A_3 \gamma e^{\gamma t}}{t^2 (e^{\gamma t} - A_2)^2} - \frac{\mathcal{G}_3(t) \gamma^2 e^{\gamma t}}{(e^{\gamma t} - A_2)^2} + \frac{2\mathcal{G}_3(t) \gamma^2 e^{2\gamma t}}{(e^{\gamma t} - A_2)^3} \right] \times \right. \\
& \times (e^{\gamma t} - A_2) \left[E^2(t) - \frac{E^2(t)}{\mathcal{G}_1(t)} \right] + F'(t) \gamma e^{\gamma t} \left[E^2(t) - \frac{E^2(t)}{\mathcal{G}_1(t)} \right] + F'(t) (e^{\gamma t} - A_2) \times \\
& \times \left[2E(t) E'(t) - 2E(t) \frac{E'(t)}{\mathcal{G}_1^2(t)} + 2E^2(t) \frac{\mathcal{G}_2(t)}{\mathcal{G}_1^3(t)} \right] - 2\alpha \Delta(t) E(t) E'(t) + \\
& + \alpha E^2(t) \frac{(A_1 - A_3)}{t^2} - E_0 \beta^2 \frac{e^{-\beta t}}{\mathcal{G}_1(t)} - 2E'(t) \frac{\mathcal{G}_2(t)}{\mathcal{G}_1^2(t)} - \frac{E(t)}{\mathcal{G}_1^2(t)} \left[2(A_1 - A_3) \frac{E(t)}{t^2} - \right. \\
& - 2(A_1 - A_3) \frac{E'(t)}{t^2} - \Delta(t) \beta^2 e^{-\beta t} \left. \right] + 2E(t) \frac{\mathcal{G}_2^2(t)}{\mathcal{G}_1^3(t)} + E_0 \beta^2 e^{-\beta t} + \\
& + \gamma e^{\gamma t} F'(t) [E^2(t) - K^2(t)] - F'^2(t) (e^{\gamma t} - A_2)^2 [E^3(t) - K^3(t)] - \\
& - \alpha E(t) \left[\Delta(t) E(t) - (A_1 - A_3) \frac{E(t)}{t^2} \right] - \alpha^2 E^3(t) \frac{\Delta(t)}{K(t)} + \frac{1}{2} F'(t) (e^{\gamma t} - A_2) \times \\
& \times 2 \left[E(t) E'(t) - E(t) \frac{E'(t)}{\mathcal{G}_1^2(t)} + E^2(t) \frac{\mathcal{G}_2(t)}{\mathcal{G}_1^3(t)} \right] + 2\alpha E^3(t) \Delta(t) F'(t) (e^{\gamma t} - A_2) \left. \vphantom{\frac{1}{2} F'(t) (e^{\gamma t} - A_2)}} \right\}; \\
\mathcal{G}_1(\tau) = & 1 + \Delta(\tau) E(\tau); \quad \mathcal{G}_2(\tau) = \Delta(\tau) E'(\tau) - \frac{(A_1 - A_3) E(\tau)}{\tau^2}; \quad \mathcal{G}_3(\tau) = C_3 + \frac{A_3}{\tau}.
\end{aligned}$$

Интегралы $\eta(\tau)$ и $u(\tau)$, входящие в выражение (1), вычисляем численно с помощью формулы трапеций.

Графики функции $R(t, \tau)$ для бетона различного “возраста”, построенные на базе формулы (1), показаны на рис. 1. Здесь номера линий соответствуют значениям параметра τ (в сутках): 1 – $\tau=2$; 2 – $\tau=4$; 3 – $\tau=6$; 4 – $\tau=10$; 5 – $\tau=20$; 6 – $\tau=30$. Значения констант принимались равными [2]: $C_1=9,9388 \cdot 10^{-11} \text{ (H/M}^2\text{)}^{-1}$; $C_3=7,7064 \cdot 10^{-11} \text{ (H/M}^2\text{)}^{-1}$; $A_1=4,7095 \cdot 10^{-10} \text{ сут/(H/M}^2\text{)}$; $A_2=1$; $A_3=3,4822 \cdot 10^{-10} \text{ сут/(H/M}^2\text{)}$; $E_0=2,55 \cdot 10^{10} \text{ H/M}^2$; $\alpha=6 \text{ сут}^{-1}$; $\gamma=0,03 \text{ сут}^{-1}$; $\beta=0,206 \text{ сут}^{-1}$.

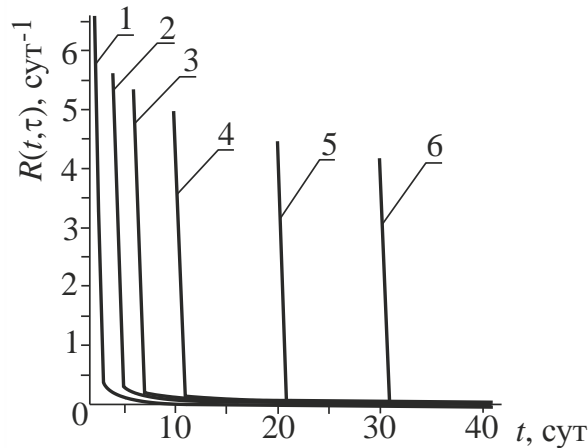


Рис. 1. Графики наследственной функции $R(t, \tau)$

Из приведенных графиков $R(t, \tau)$ видно, что принятая механико-математическая модель материала учитывает явление быстро нарастающей ползучести бетона в момент времени τ .

В разработанной процедуре для вычисления ядра релаксации в хронологическом порядке учитываем индивидуальный отсчет по временной координате для каждой ступени нагружения [3]. Вычислительный процесс организуем в виде следующих трех вложенных циклов: по ступеням нагружения, включая ступень передачи усилия предварительного натяжения арматуры на бетон; по шагам численного интегрирования; по временным координатам каждой ступени нагружения. В цикле по временным координатам на основании принципа наложения воздействий осуществляем суммирование векторов узловых перемещений ансамбля конечных элементов.

С целью апробации разработанного программного обеспечения выполним серию вычислительных экспериментов.

Пример 1. Выполним исследование плосконапряженного состояния преднапряженной железобетонной балки прямоугольного поперечного сечения, показанной на рис. 2 (размеры указаны в миллиметрах), с учетом ползучести бетона при различных траекториях параболического армирования. Принимаем следующие механические константы: бетон – модуль упругости $E_b = 3,04 \cdot 10^4$ МПа; коэффициент Пуассона $\nu_b = 0,17$; плотность $\rho = 2200$ кг/м³; арматура (сталь) – модуль упругости $E_a = 2 \cdot 10^5$ МПа; погонная масса $m_p = 2,42$ кг/м. Значения констант ядра релаксации бетона были приведены выше.

Назначаем момент времени распалубки $t = 2$ суток, момент времени преднапряжения арматуры $t = 17$ суток. Усилие предварительного натяжения арматуры P_{np} принимаем равным 8,3 т. Величина распределенной нагрузки, прикладываемой в момент времени $t = 30$ суток, составляет $q = 100$ кН/м². Расчеты выполняем с учетом собственного веса бетона и арматуры.

Проанализируем влияние схемы раскладки напрягаемой арматуры (рис. 2, линии 1, 2, 3, 4) на величины выгиба и прогиба балки. Полагаем, что после создания двустороннего (симметричного) преднапряжения на бетон каналобразователь заполняется цементным раствором, т. е. имеет место совместное деформирование бетона и арматуры. Учитывая симметрию геометрии и усилия предварительного натяжения арматуры, в качестве расчетной схемы принимаем 1/2 часть балки (рис.3). Значения восстанавливающей нагрузки для параболических схем преднапряженного армирования вычисляем по формуле

$$q_{np} = \frac{2 P_{np} \sin \varphi}{l}.$$

Для схемы 4 (прямолинейная раскладка арматуры) величина $q_{np} = 0$.

Усилие q_{np} прикладываем вдоль траектории раскладки напрягаемой арматуры. Кроме этого, в точке s (рис.3) прикладываем две сосредоточенные силы: $P_{xnp} = P_{np} \cos \varphi$, $P_{ynp} = -P_{np} \sin \varphi$.

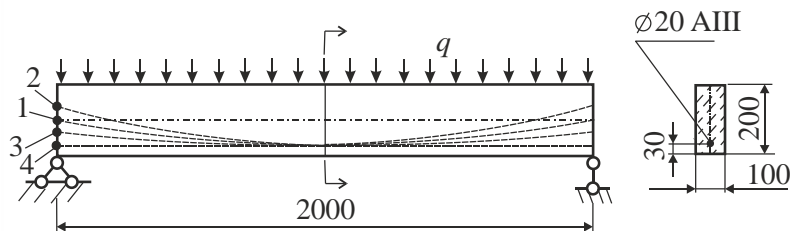


Рис. 2. Схемы раскладки арматуры

Результаты численных расчетов в виде графиков зависимости перемещения в центре пролета балки v от времени наблюдения t для 4-х схем армирования представлены на рис.4. Из приведенных данных видно, что величина обратного выгиба балки при $t=30$ суток, обусловленного преднапряжением арматуры, практически не зависит от схемы раскладки арматуры. Вместе с тем при дальнейшем нагружении балки распределенной нагрузкой в момент времени $t=210$ суток наблюдается расхождение в значениях прогибов. Наиболее эффективной с точки зрения жесткостных свойств оказалась схема 3 с расположением анкера ниже продольной оси балки. Интересно отметить, что прогибы балки, соответствующие схемам 2 и 4, практически совпадают на протяжении всего времени наблюдения.

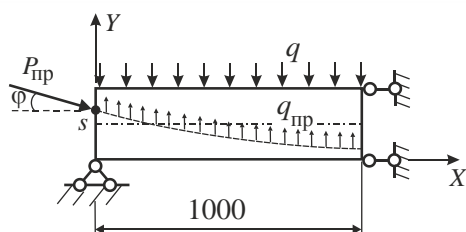


Рис. 3. Схема передачи усилия от преднапряжения арматуры

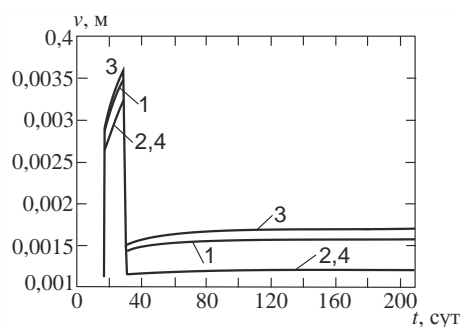


Рис.4. Графики прогиба балки

Характерной особенностью представленных результатов наблюдения за прогибом при длительном деформировании балки является выраженный восстанавливающий эффект от преднапряжения арматуры.

Выполним аналогичный расчет балки, заменив схему преднапряжения на бетон схемой натяжения арматуры посредством сервопривода, состоящего из маслостанции, гидравлического привода телескопического типа и обратной связи, следящей за перемещением в центре балки. Как показано на рис.5, с помощью данной схемы, создавая в гидросистеме давление p , можно поддерживать в арматуре заданное восстанавливающее усилие $q_{пр}$. Отметим, что в рассматриваемом случае реакции от преднапряжения воспринимает не бетон, а анкерные крепления арматуры, расположенные на отдельных упорах.

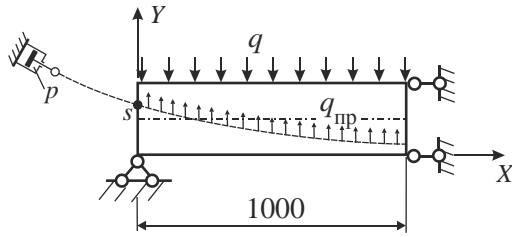


Рис. 5. Схема с регулируемым преднапряжением арматуры

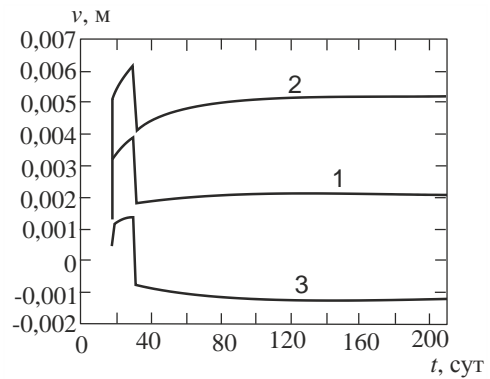


Рис. 6. Графики прогибов балки

Графики зависимости перемещения в центре балки v от времени t для схемы с сервоприводом показаны на рис. 6. Как и следовало ожидать, для этого варианта создания преднапряжения в балке наиболее эффективной является траектория армирования по линии 2 (рис.2), для которой величина $q_{пр}$ максимальна.

Пример 2. Для большепролетной балки прямоугольного поперечного сечения длиной $l = 10$ м исследуем влияние траектории криволинейной раскладки напрягаемой арматуры на величину выгиба с учетом ползучести бетона. Балка преднапрягается десятью стальными канатами диаметром 15,7 мм. Усилие натяжения каната $P_{пр} = 170$ т. Механические константы стали, бетона и параметры модели упруго ползучего тела принимаем такие же, как в предыдущем примере. Время наблюдения за выгибом балки $t = 210$ суток. Считаем, что имеет место деформирование без сцепления арматуры с бетоном. Собственный вес балки не учитываем.

На рис. 7 представлены графики зависимости выгиба балки δ от времени наблюдения $17 \leq t \leq 210$ суток для трех схем раскладки преднапряженной арматуры: линия 1 – параболическая раскладка арматуры (рис.8); линия 2 – трапецидальная раскладка арматуры (рис.9); линия 3 – плавно перетекающая раскладка арматуры (рис. 10).

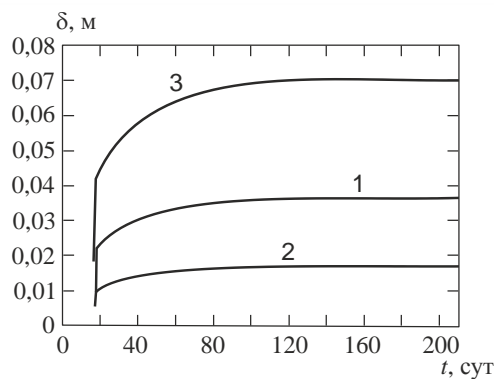


Рис. 7. Графики выгиба балки

Сравнивая величины максимальных выгибов балки, приходим к выводу, что мгновенно упругая и длительная деформация балки существенно зависит от траектории криволинейного армирования. Так для момента времени $t = 17$ суток величина выгиба для рассматриваемых схем армирования

составила: для параболической траектории $-9,3 \text{ мм}$, для трапецидальной траектории $-4,23 \text{ мм}$, для плавно перетекающей траектории $-17,8 \text{ мм}$. Интересно, что независимо от схемы преднапряженного армирования для момента времени $t = 210 \text{ суток}$ максимальное значение выгиба превысило начальное значение в 3,9 раза.

В соответствии с инженерной методикой [1], выгиб для преднапряженной железобетонной балки при аналогичных схемах армирования без учета ползучести составил: для параболической схемы $-9,4 \text{ мм}$; для трапецидальной схемы $-9,34 \text{ мм}$; для плавно перетекающей раскладки $-9,54 \text{ мм}$. Таким образом, инженерная методика практически не учитывает влияние схемы армирования на выгиб балки. В то время, как по данным конечно-элементного анализа даже при мгновенно упругом деформировании балки ($t=17 \text{ суток}$) наблюдается существенное различие в значениях δ для рассмотренных схем преднапряженного армирования.

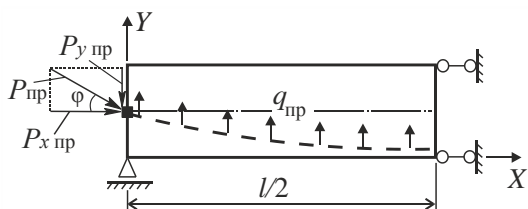


Рис. 8. Схема с параболической траекторией армирования

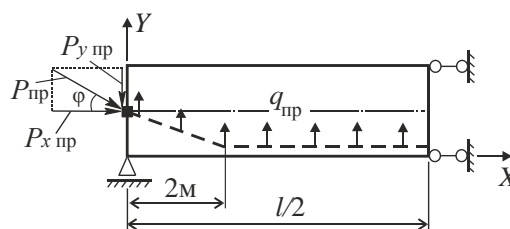


Рис. 9. Схема с трапецидальной траекторией армирования

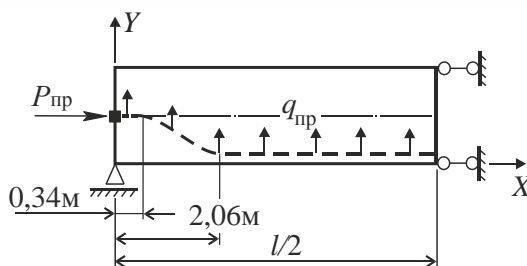


Рис. 10. Схема с плавно-перетекающей траекторией армирования

Картины распределения продольных напряжений σ_x для рассмотренных трех схем раскладки преднапряженной арматуры для момента времени $t = 210 \text{ суток}$ приведены на рис. 11-13. На этих рисунках конечноэлементная модель 1/2 части балки показана в деформированном состоянии (перемещения увеличены в 10 раз). Сплошная толстая линия соответствует положению арматуры в преднапряженном состоянии.

Как видно, для рассмотренных трех схем наблюдается значительная концентрация напряжений σ_x в месте расположения анкера преднапряженной арматуры. Визуализация картины распределения σ_x , исключая зону концентрации напряжений, представлена на рис. 14-15.

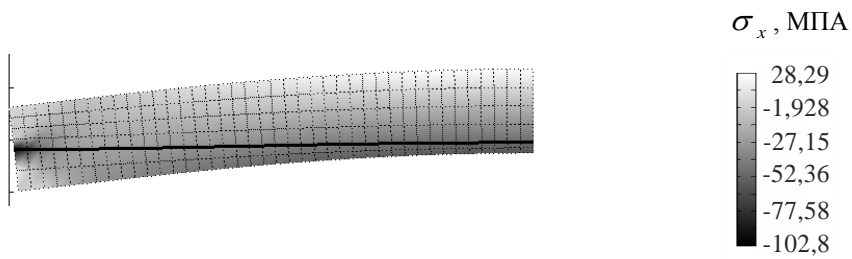


Рис. 11. 1/2 часть балки с параболической раскладкой арматуры

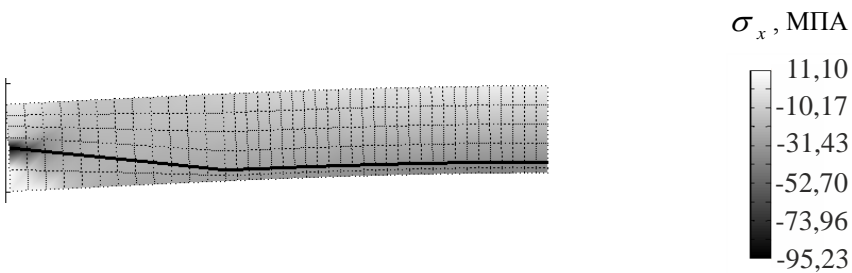


Рис. 12. 1/2 часть балки с трапецидальной раскладкой арматуры

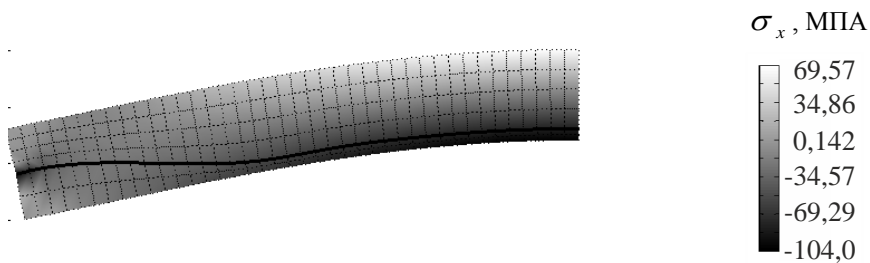


Рис. 13. 1/2 часть балки с плавно перетекающей раскладкой арматуры

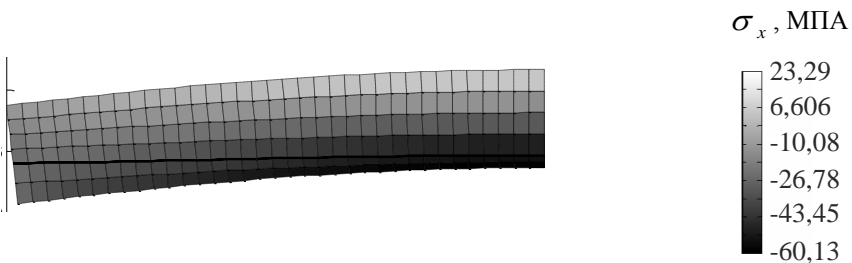


Рис. 14. Фрагмент балки с параболическим армированием

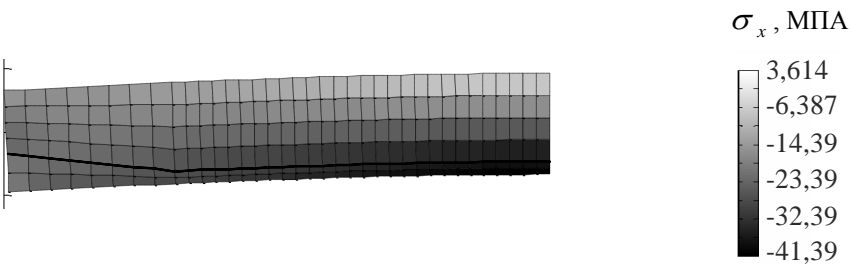


Рис. 15. Фрагмент балки с трапецидальным армированием

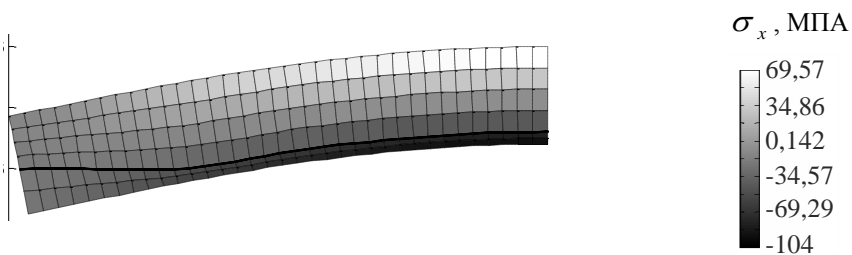


Рис. 16. Фрагмент балки с плавно перетекающим армированием

Из приведенных на рис. 14-16 результатов следует, что наибольшие сжимающие и растягивающие напряжения σ_x возникают в балке с плавно перетекающей схемой раскладки арматуры.

Պ.Պ. Գայդժուրով,
Ա.Պ.Մայացկայա

**ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՏԱՐՐԵՐԻ ՄԵԹՈՂՈՎ ՆԱԽԱՊԵՍ ԼԱՐՎԱԾ ԵՐԿԱԹԲԵՏՈՆԵ ՀԵԾԱՆՆԵՐԻ
ՀԱՇՎԱՐԿ ԿՆՏՎԻ ԱՌՆԵԼՈՎ ԲԵՏՈՆԻ ՍՈՂՔԸ**

Առաջարկվում է քվադրատատիկական փոփոխական բեռնավորման ժամանակ երկաթբետոնե նախալարված հեծանների լարվածադեֆորմացված վիճակի հաշվարկի մեթոդ՝ հաշվի առնելով բետոնի սողքը: Բերված են թվային գիտափորձերի արդյունքները, ինչը ցույց է տալիս հեծանի հակադարձ կրվածքի մեծության վրա կորագծային ամրանավորման հետագծի ազդեցությունը: Աշխատանքն իրականացվում է «РААСН հարավային տարածաշրջանային բաժանմունք» դաշնային պետական բյուջետային հիմնարկության հիմնարար գիտական հետազոտությունների պլանի շրջանակներում:

***Առանցքային բառեր.** բետոնի սողքի ժառանգական տեսություն, առաձգական-սողացող ծերացող նյութի մեխանիկամաթեմատիկական մոդել, ամրանի նախնական ձգում, վերջավոր տարրերի մեթոդի քայլային ընթացակարգ*

**P.P.Gaydzhurov,
A.P.Mayatskaya**

**CALCULATION OF PRESTRESSED CONCRETE BEAM TAKING INTO ACCOUNT
THE CREEP OF CONCRETE BY THE METHOD OF FINITE ELEMENTS**

A method of calculating the stress-deformed state of reinforced concrete pre-stressed beams at alternating quasi-static loading, considering concrete creep has been suggested. The results of numerical experiments demonstrating the effect of reinforcing curved trajectory on the value of the return of hogging of beam have been presented. The work is carried out within the framework of the basic research plan of the Federal State Budget Organization "Southern Regional Department RAACS".

Keywords: *hereditary theory of creeping concrete, mechanical-mathematical model of elastic-creeping matured material, pre-tensioned of fitting, stepping procedure of finite element method*

Литература

1. **СП 52-102-2004.** Предварительно напряженные железобетонные конструкции.
2. **Александровский С. В.** Расчет бетонных и железобетонных конструкций на изменения температуры и влажности с учетом ползучести. – М.: Стройиздат, 1973. – 432 с.

3. **Гайджуров П. П., Исхакова Э. Р.** Решение плоской задачи наследственной теории старения методом конечных элементов// Строительная механика и расчет сооружений. – 2013.– №1 – С. 40-45.

Гайджуров Петр Павлович, д-р тех. н., проф. (РФ, г. Ростов-на-Дону) - Ростовский государственный строительный университет, профессор кафедры «Техническая механика», 8(908)1808367, gpp-161@yandex.ru; Маяцкая Анна Павловна (РФ, г. Ростов-на-Дону) - Ростовский государственный строительный университет, аспирант кафедры «Техническая механика», 8(903)4880260, irina.mayatskaya@mail.ru.

Գայձձուրով Պյոտր Պավելի, տ.գ.դ., պրոֆ. (ՌԴ, ք.Ռոստով-Դոն) – Ռոստովի պետական շինարարական համալսարան, «Տեսական մեխանիկայի» ամբիոնի պրոֆեսոր, 8(908)1808367, gpp-161@yandex.ru, Մայացկայա Աննա Պավելի (ՌԴ, ք.Ռոստով-Դոն) - Ռոստովի պետական շինարարական համալսարան, «Նյութերի դինամիկություն» ամբիոնի ասպիրանտ, 8(903)4880260, irina.mayatskaya@mail.ru:

Gaydzhurov Peter P. doctor of technical sciences, professor (RF, Rostov-on-Don) – Rostov State University of Civil Engineering, professor of the Department of Technical Mechanics, 8(908)1808367, gpp-161@yandex.ru, Mayatskaya Anna P. (RF, Rostov-on-Don) - Rostov State University of Civil Engineering, postgraduate student, Department of Technical Mechanics, 8(903)4880260, irina.mayatskaya@mail.ru.

Ներկայացվել է՝ 06.07.2015թ.

Ընդունվել է տպագրության՝ 10.07.2015թ.