ՀՏԴ 519.3:624.07

ՇԻՆԱՐԱՐԱԿԱՆ ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Է.Կ. Բեգոյան

ՑԱԾՐԱՆԻՍՏ ՃԿՈՒՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿՄԱՆ ՄԻ ՄՈՏԵՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ներկայացված է ցածրանիստ ճկուն թաղանթների հաշվարկման մեթոդ, որը հիմնված է Ռիտց-Տիմոշենկոյի վարիացիոն սկզբունքի վրա: Նկարագրված է մեթոդի կիրառումը ցածրանիստ ճկուն թաղանթների լարվածադեֆորմացիոն վիճակի ուսումնասիրման դեպքում, երբ այն հատակագծում ունի ուղղանկյուն տեսք, ազատ հենված է հենարանային մասով և գտնվում է հավասարաչափ բաշխված բեռի ազդեցության տակ:

Առանցքային բառեր. *վարիացիոն մեթոդ, ցածրանիստ ճկուն թաղանթ, Ռիտց-Տիմոշենկոյի մեթոդ, լարվածադեֆորմացիոն վիճակ*

Ժամանակակից տեխնիկայում (նավաշինություն, օդանավաշինություն, շինարարություն և այլն) մեծ կիրառություն ունեն ինժեներական այնպիսի տարրեր, ինչպիսիք են սալերը և թաղանթները: Կախված այդ տարրերի բեռնավորման և դեֆորմացիաների պայմաններից, դրանք տարբերակվում են.

- կոշտ սալեր և թաղանթներ, որոնց առավելագույն ճկվածքը չի գերազանցում դրանց հաստության 1/4…1/5 մասը,
- ճկուն սալեր և թաղանթներ,
- բացարձակ ճկուն թաղանթներ և սալեր, որոնց առավելագույն ճկվածքը գերազանցում է իրենց հաստությանը (5…6) անգամ [1-4]:

Կոշտ սալերի և թաղանթների լարվածային վիճակի վրա ազդող գործոններ են համարվում ծռող և ոլորող մոմենտները, որոնք բնորոշում են դրանց ամրությունը: Ճկվածքների մեծացման հետևանքով ճկուն սալերում և թաղանթներում ի հայտ են գալիս մեմբրանային ուժեր, որոնք այնպիսի ձգող լարումներ են առաջացնում, որոնք հավասարազոր են ծռող և ոլորող մոմենտներից առաջացած լարումներին:

Այժմ լավ ուսումնասիրված է կոշտ և բացարձակ ճկուն սալերի և թաղանթների վարքն արտաքին բեռնվածության ազդեցության տակ: Ներկայացված աշխատանքի նպատակն է՝ ցածրանիստ ճկուն թաղանթների համար կիրառելով Ռիտց-Տիմոշենկոյի վարիացիոն մեթոդը, ստեղծել ինժեներական կիրառման համար մատչելի հաշվարկային մոտեցում:

Ինչպես հայտնի է, թաղանթների դեֆորմացիաներից առաջացած լրիվ էներգիան որոշվում է հետևյալ արտահայտությամբ [1,2]՝

$$Э = Э_U + Э_V \,, \tag{1}$$

որտեղ $Э_U$-ն աղանթի դեֆորմացիայից առաջացած պոտենցիալ էներգիան է,$Э_V$- ն՝ արտաքին բեռնվածքից առաջացած պոտենցիալ էներգիան է, որը հավասար է արտաքին բեռի աշխատանքին և ընդունվում է հակառակ նշանով:

Թաղանթների դեֆորմացիայից առաջացած պոտենցիալ էներգիան ներկայացվում է ծռումից և մեմբրանային ճիգերից առաջացած պոտենցիալ էներգիաների գումարի տեսքով՝

$$Э_U = Э_M + Э_N \ : \tag{2}$$

Փոքր ճկվածքների դեպքում (երբ ճկվածքները չափելի են թաղանթի հաստության նկատմամբ) ինժեներական խնդիրների լուծման ժամանակ որպես լրիվ պոտենցիալ էներգիա ընդունում են ծռումից առաջացած էներգիան և արհամարհելի է մեմբրանային ճիգերից առաջացած էներգիան:

Ուղղանկյուն հատակագծով թաղանթների ծռումից առաջացած պոտենցիալ էներգիան ներկայացվում է հետևյալ կերպ [1,2]՝

$$Э_M = \frac{1}{2}\iint_F \left(M_{xx}\theta_{xx} + M_{yy}\theta_{yy} + 2M_{xy}\theta_{xy}\right)dxdy\ , \tag{3}$$

որտեղ M_{xx} , M_{yy} , M_{xy} – ը համապատասխանաբար ծռող և ոլորող մոմենտների մեծություններ են, $\theta_{xx}, \theta_{yy}, \theta_{xy}$ –ը՝ միջին մակերևույթի համապատասխան կորությունները x,y և xy ուղղություններով, F-ը՝ թաղանթի միջին մակերևույթի մակերեսը:

Ծռող և ոլորող մոմենտները, որոնք ազդում են միջին մակերևույթում, ներկայացվում են ճկվածքի միջոցով հետևյալ կերպ [1,2]՝

$$M_{xx} = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right);\ M_{yy} = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), M_{xy} = D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\ , \tag{4}$$

որտեղ $D=Eh^3/12(1-\nu^2)$ – ը թաղանթի գլանային կոշտությունն է, E,ν –ն՝ համապատասխանաբար նյութի առաձգականության մոդուլն է և Պուասսոնի գործակիցը, h –ը՝ թաղանթի հաստությունը, $w(x,y)$ –ը՝ թաղանթի ճկվածքի ֆունկցիան:

Թաղանթների միջին մակերևույթի կորությունները ճկվածքի միջոցով ներկայացվում են հետևյալ կերպ [1,2]՝

$$\theta_{xx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\ , \qquad \theta_{yy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\ , \qquad \theta_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\ , \tag{5}$$

Համատեղ լուծելով (3)- (5) արտահայտությունները, կստանանք՝

$$Э_M = \frac{D}{2}\iint\left[(\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right)\right]dxdy\ , \tag{6}$$

որտեղ $\nabla^2 w = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$ – ը Լապլասի օպերատորն է:

Մեմբրանային ճիգերից առաջացած պոտենցիալ էներգիան որոշվում է հետևյալ կերպ [1-5]՝

$$Э_M = \frac{1}{2}\iint\left(N_{xx}\varepsilon_{xx} + N_{yy}\varepsilon_{yy} + 2N_{xy}\varepsilon_{xy}\right)dxdy\ , \tag{7}$$

որտեղ N_{xx} , N_{yy} , N_{xy} – ը միջին մակերևույթում ազդող մեմբրանային ճիգերն են, ε_{xx} , ε_{yy} , $\varepsilon_{xy-ը}$՝ -դեֆորմացիաների տենզորները միջին մակերևույթում՝ համապատասխան ուղղություններով:

Թաղանթներում հարթ լարվածային վիճակի դեպքում մեմբրանային ճիգերը Հուկի օրենքի հիման վրա կարող է ներկայացվել հետևյալ կերպ [1-4]՝

$$N_{xx} = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}\right)\ ;\ N_{yy} = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}\right)\ ;\ N_{xy} = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\varepsilon_{xy}\ : \qquad (8)$$

Ճկուն թաղանթների համար հիմնականում օգտագործվում է ոչ գծային տեսությունը, համաձայն որի դեֆորմացիաների տենզորները կարող են ներկայացվել հետևյալ կերպ [1,2]՝

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\ , \end{aligned} \qquad (9)$$

որտեղ u, v, w – ն տեղափոխություններ են, համապատասխանաբար, x, y, z առանցքների ուղղությամբ:

Հաշվի առնելով (8),(9) կապակցությունները՝ (7)-ը կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ.

$$Э_N = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)}\iint\left({\varepsilon_{xx}}^2 + 2\nu\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + {\varepsilon_{yy}}^2 + (1-\nu){\varepsilon_{xy}}^2\right)dxdy\ : \qquad (10)$$

Թաղանթների և սալերի գործնական խնդիրների լուծման ընթացքում բացահայտված է, որ դրանց w(x,y)-ի ճկվածքները մեկ կարգով բարձր են u(x,y) և v(x,y) տեղափոխությունների հետ համեմատած և ինժեներական խնդիրների լուծման ժամանակ բավարար բարձր ճշտությամբ կարելի է ընդունել, որ u(x,y)≈0, v(x,y)≈0: Արհամարհելով նաև այդ տեղափոխությունների ածանցյալները (10) արտահայտությունը կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ.

$$Э_N = \frac{Eh}{8(1-\nu^2)}\iint\left\{4\left({k_x}^2 + 2\nu k_x k_y + {k_y}^2\right)w^2 - 4\left[\left(k_x + \nu k_y\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(k_y + \nu k_x\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]w + \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4 + 2(2-\nu)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^4\right]\right\}dxdy\,, \qquad (11)$$

Բարձր ճշտությամբ հաշվարկներ պարունակող թաղանթներում կարող է կիրառվել (10) արտահայտությունը, սակայն այն հանգեցնում է մաթեմատիկական դժվարությունների: (1) ֆունկցիոնալի փոքրագույն արժեքը որոշելու համար կիրառվում է Ռիտց-Տիմոշենկոյի վարիացիոն մեթոդը, ըստ որի ճկվածքների ֆունկցիան ներկայացվում է հետևյալ շարքի տեսքով՝

$$w(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i w_i(x,y)\ , \qquad (12)$$

որտեղ a_i – ն անհայտ պարամետր է, $w_i(x,y)$ – ը՝ հարմար ֆունկցիա, որը բավարարում է թաղանթի եզրային պայմանին:

Անհայտ a_i պարամետրը որոշվում է (1) ֆունկցիոնալով արտահայտվող լրիվ էներգիայի նվազագույն պայմանից ելնելով.

$$\frac{\partial Э}{\partial a_i} = 0: \tag{13}$$

Ներկայացված մեթոդը որպես օրինակ կիրառելու համար դիտարկվում է ուղղանկյուն հատակագծով (axb) և պարագծով ազատ հենված ցածրանիստ ճկուն թաղանթ, որը գտնվում է հավասարաչափ q_0 բաշխված բեռի ազդեցության տակ: Որպես ճկվածքի ֆունկցիա նպատակահարմար է այն ներկայացնել հետևյալ կերպ.

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\ sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \tag{14}$$

որը բավարարում է հետևյալ եզրային պայմաններին՝

$$w|_{\substack{x=0\\x=a}} = 0\ , w|_{\substack{y=0\\y=b}} = 0\ ,\ \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\x=a}} = 0\ ,\ \left.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_{\substack{y=0\\y=b}} = 0\ : \tag{15}$$

Ինժեներական խնդիրների լուծման համար բավական է (14) շարքից հաշվի առնել միայն առաջին գումարելին, և կատարելով համապատասխան գործողություններ, $Э_M$ և $Э_N$ – ի համար կունենանք հետևյալ արժեքները.

$$Э_M = \frac{\pi^4}{8} D\frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{a^3b^3} a_{11}^2\ ,$$

$$Э_N = \frac{Eh}{8(1-\nu^2)}\left[\frac{\pi^4}{64}\frac{9a^4+9b^4+2(2-\nu)a^2b^2}{a^3b^3} a_{11}^4 + ab\left(k_x^2+2\nu k_x k_y + k_y^2\right)a_{11}^2 - \right. \tag{16}$$
$$\left. -\frac{32}{9ab}\left(b^2\left(k_x+\nu k_y\right)+a^2\left(k_y+\nu k_x\right)\right)a_{11}^3\right]:$$

Արտաքին բեռնվածքից առաջացած աշխատանքը, որը հավասարազոր է պոտենցիալ էներգիային՝ վերցրած հակառակ նշանով, կունենա հետևյալ տեսքը.

$$Э_q = -\iint_F q_0 w(x,y)dx\ , \tag{17}$$

որը դիտարկվող դեպքի համար կներկայացվի հետևյալ կերպ՝

$$Э_q = -a_{11}\frac{4q_0 ab}{\pi^2}\ : \tag{18}$$

Թաղանթի լրիվ էներգիայի պահպանման (1), (16), (18) հավասարումներից ելնելով, նկատի ունենալով (13) պայմանը և կիրառելով հետևյալ անչափ պարամետրերը՝ $f_{11} = \frac{a_{11}}{h}$, $\frac{a}{b} = \lambda$, $\overline{k_x} = \frac{k_x a^2}{h}$, $\overline{k_y} = \frac{k_y b^2}{h}$, f_{11} -ի որոշման համար կստանանք հետևյալ խորանարդային հավասարումը.

$$\beta_1 f_{11}^3 + \beta_2 f_{11}^2 + \beta_3 f_{11} - q_1^* = 0\ , \tag{19}$$

որտեղ

$$\beta_1 = 9\lambda^2 + 9\frac{1}{\lambda^2} + 2(2-\nu),$$
$$\beta_2 = -32\frac{16}{3\pi^4}\left[\left(\frac{1}{\lambda^2}+\nu\right)\overline{k_x} + (\nu+\lambda^2)\overline{k_y}\right],$$
$$\beta_3 = \frac{32}{\pi^4}\left(\frac{1}{\lambda^2}\overline{k_x}^2 + 2\nu\overline{k_x}\,\overline{k_y} + \lambda^2 k_y^2\right) + \frac{8}{3}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)^2\ , \tag{20}$$
$$q_1^* = \frac{4ab}{\pi^2}\cdot\frac{16\cdot 8(1-\nu^2)ab}{Eh^4\pi^4}q_0 = \frac{16\cdot 32(1-\nu^2)}{\pi^6}\cdot\frac{a^2b^2}{h^4}\cdot\frac{q_0}{E}:$$

Մասնավոր դեպքում, երբ դիտարկվում է քառակուսի հիմքով թաղանթը՝ $\lambda = 1$, $\overline{k_x} = \overline{k_y} = \bar{k}$, (20)-ի գործակիցները կստանան հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{aligned}
&\beta_1 = 2(11 - \nu),\\
&\beta_2 = -\frac{32 \cdot 32}{3\pi^4}(1 + \nu)\bar{k}\,,\\
&\beta_3 = \frac{32}{\pi^4}2(1 + \nu)\bar{k}^{\,2} + \frac{32}{3},\\
&q_1^* = \frac{16 \cdot 32(1 - \nu^2)}{\pi^6} \cdot \frac{a^2 b^2}{h^4} \cdot \frac{q_0}{E}:
\end{aligned} \tag{21}$$

Երբ դիտարկվում է a x a չափի ճկուն սալ $\left(\bar{k} = 0\right)$, (19)-ը կներկայացվի հետևյալ կերպ.

$$f_{11}^3 + \frac{16}{3(11 - \nu)} \cdot f_{11} - \frac{256}{\pi^6} \cdot \frac{1 - \nu^2}{11 - \nu} \cdot \frac{a^4}{h^4} \cdot \frac{q_0}{E} = 0\ : \tag{22}$$

(22) խորանարդային հավասարումը համընկնում է [6]-ում ստացված արտահայտության հետ, որը հիմնավորում է ստացված հավասարումների հավաստիությունը:

Այն դեպքերում, երբ դիտարկվում են ոչ ճկուն թաղանթներ, (19)-ը կներկայացվի հետևյալ տեսքով.

$$\beta_3 f_{11} - q_1^* = 0\,, \tag{23}$$

Լուծելով (19) հավասարումը $f_{11} -$ ի նկատմամբ, այն հնարավորություն է տալիս հաշվարկելու $w(x, y)$ ճկվածքի մեծությունը, որի հիման վրա որոշվում են թաղանթում առաջացած լարումների մեծությունները և այլ անհրաժեշտ գործոններ, կախված նրա երկրաչափական պարամետրերից և օգտագործվող նյութի տեսակից:

Հարկ է նշել նաև, որ Ռիտց-Տիմոշենկոյի վարիացիոն մեթոդն օգտագործելիս կոշտ թաղանթների և սալերի համար ստացված արդյունքները համընկնում են դասական տեսությամբ ստացված արժեքների հետ:

Э.К. Безоян

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РАСЧЕТУ ПОЛОГИХ ГИБКИХ ОБОЛОЧЕК

Представлен метод расчета пологих гибких оболочек, который основан на вариационном принципе Ритца-Тимошенко. Описано применение метода по исследованию напряженно-деформационного состояния пологих гибких оболочек, когда они имеют прямоугольный вид в плане, опорной частью свободно опираются по периметру и находятся под воздействием равномерно распределенной нагрузки по повехности.

Ключевые слова: *вариационный метод, пологие гибкие оболочки, метод Ритца-Тимошенко, напряженно- деформационное состояние*

E.K. Bezoyan

ON APPROACH TO CALCULATION OF SLOPING FLEXIBLE SHELLS

The method of calculating the sloping flexible shells has been presented, which is particularly based on a variation principle of Ritz-Tymoshenko. The method of using the sloping flexible shells by the study of stress-deformation condition of flexible shells, when they have a rectangular shape in the plan, freely relied on pier part on the perimeter is under the influence of a uniformly distributed load has been described.
Keywords: *Variation Method, sloping flexible shells, Ritz-Timoshenko method, stress- deformation condition*

Գրականություն

1. **Вольмир А.С.** Гибкие пластинки и оболочки. - М.: Гостехиздат, 1956. - 419 с.
2. **Тимошенко С.И., Войновский-Кригер С.** Пластинки и оболочки: пер. с англ. - М.: Наука, 1966. - 665 с.
3. **Назаров А.А.** Основы теории и методы расчета пологих оболочек. – Л.; М.: Стройиздат, 1966. - 303с.
4. **Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Иосилевич Г.Б.** Расчет на прочность деталей машины: Справочник. - М.: Машиностроение, 1979. - 702 с.~
5. **Васидзу К.** Вариационные методы в теории упругости и пластичности. - М.: Мир, 1987. – 542 с.
6. **Колмогоров Г.Л., Мельникова Т.Е.** Применение метода Ритца-Тимошенко для расчета гибких пластин// Строительная механика и расчет сооружений. - 2015. – N 2(259). – С. 34-38.

Բեզոյան Էդուարդ Կոլոմբոսի, տ.գ.դ., դոց. *(ՀՀ, ք.Երևան) – ՃՇՀԱՀ, Ավտոմոբիլային ճանապարհների ամբիոն, "Ճանապարհ" ՍՊԸ Գլխավոր տնօրեն, (+374)91402496, (+374)10627240, road@road.am, e.bezoyan@road.am:*
Безоян Эдуард Коломбосович, д.т.н , доцент *(РА, г.Ереван) – НУАСА, кафедра Автомобильные дороги, генеральный директор ООО* "Чанапар", *(+374)91402496, (+374)10627240, road@road.am, e.bezoyan@road.am.*
Bezoyan Eduard Kolombos, doctor of sciences (engineering), associate prof. *(RA, Yerevan) – NUACA, Chair of Automobile Roads, General director of "Chanaparh" LLC,(+374)91402496, (+374)10627240, road@road.am, e.bezoyan@road.am.*

Ներկայացվել է՝ 23.10.2015թ.
Ընդունվել է տպագրության՝06.11.2015թ.