УДК 624.074.4 СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

В.Д.Ерёмин

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕКРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ УПРУГОЙ ВОЛНИСТОЙ ОБОЛОЧКИ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

Рассматривается задача о собственных колебаниях некруговой цилиндрической упругой тонкой волнистой оболочки открытого профиля. В основу задачи положен энергетический метод Релея-Ритца.

Получены векторное уравнение срединной поверхности оболочки, выражения для вычисления параметров Ляме и символов Кристоффеля. Подобраны функции, аппроксимирующие амплитуды перемещений точек срединной поверхности данной оболочки вдоль осей координат, в виде двойных тригонометрических рядов, соответствующие возможным симметричным формам собственных колебаний данной волнистой оболочки и удовлетворяющие условиям жесткого защемления оболочки по нижнему контуру.

Ключевые слова*: *тонкая упругая волнистая оболочка, частота и форма собственных колебаний

1. Постановка задачи

Рассматриваются свободные колебания тонкой волнистой оболочки с жестко защемленным контуром достаточно большой длины, то есть без учета краевых условий на торцах.

Расчет выполняется на основе геометрической и физической линейности с использованием гипотез Кирхгофа - Лява. В основу решения задачи положен энергетический метод Релея - Ритца, основанный на принципе возможных перемещений [1-3].

2. Выбор системы координат. Уравнение поверхности

Поперечное сечение срединной поверхности оболочки (по гребню) очерчено по кривой, уравнение которой

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^3}{b^3} = 1 \tag{1}$$

Это уравнение отличается от уравнения эллипса третьей степенью второго слагаемого, что обеспечивает более крутое по отношению к горизонту очертание гребня оболочки.

Срединная поверхность оболочки образована перемещением кривой

$$\alpha = -\Delta\left(1 - \cos\frac{\pi z}{\ell}\right); \tag{2}$$

по двум соседним гребням оболочки и находящейся в нормальной плоскости к ним (рис. 1), где Δ - амплитуда волны.

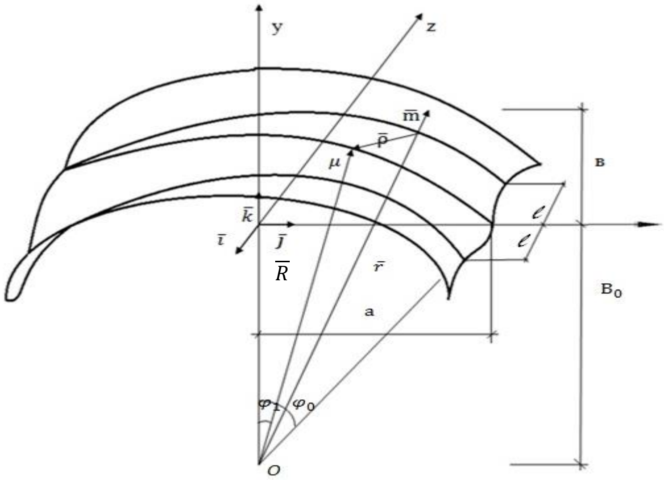

Рис.1.Поверхность оболочки

Введем безразмерные криволинейные координаты точек срединной поверхности оболочки:

$$\alpha_1 = \frac{z}{\ell};\ \alpha_2 = \frac{\varphi_1}{\varphi_o}\ , \tag{3}$$

причем $\quad -1 \leq \alpha_1 \leq 1,\ \ -1 \leq \alpha_2 \leq 1.$ (4)

Третья координата α_3 направлена по нормали к срединной поверхности оболочки.

Из рис.1 следует

$$X = rsin\varphi_1\ ,\mathrm{Y} = \mathrm{r}\cos\varphi_1 - \mathrm{B}_o\,. \tag{5}$$

После подстановки (3) и(5) получим

$$X = rsin\varphi_o\alpha_2\ ,\mathrm{Y} = \mathrm{r}\cos\varphi_o\alpha_2 - \mathrm{B}_o\,. \tag{6}$$

Векторное уравнение срединной поверхности оболочки имеет вид

$$\bar{R} = \bar{r}\ +\ \bar{\rho}, \tag{7}$$

где $\quad \bar{r} = x\bar{J}\ +\ (y\ + B_0)\bar{\mathrm{k}},\ \bar{\rho} =\ \alpha\bar{m} + z\bar{\iota}$ (8)

После преобразований получим

$$R = \ell\alpha_1\bar{\iota}\ + \left[\frac{\Delta(1-\cos\pi\alpha_1)}{\sqrt{\left(r_{,2}\right)^2 + r^2(\varphi_0)^2}}\left(r_{,2}\cos\varphi_0\alpha_2 - r\varphi_0\sin\varphi_0\alpha_2\right) +\ r\sin\varphi_0\alpha_2\right]\bar{J}$$
$$+\left[r\cos\varphi_0\alpha_2 - \frac{\Delta(1-\cos\pi\alpha_1)}{\sqrt{\left(r_{,2}\right)^2 + r^2(\varphi_0)^2}}\left(r_{,2}\sin\varphi_0\alpha_2\ +\ r\varphi_0\cos\varphi_0\alpha_2\right)\right]\bar{k}, \tag{9}$$

где

$$\mathrm{r} = \sqrt[3]{-\mathrm{q}_1 + \sqrt{\mathrm{q}_1^2 + \mathrm{p}_1^3}} - \sqrt[3]{\mathrm{q}_1 + \sqrt{\mathrm{q}_1^2 + \mathrm{p}_1^3}} - \frac{\mathrm{b}^3\sin^2\varphi_0\alpha_2 - 3\mathrm{a}^2\mathrm{B}_0\cos^2\varphi_0\alpha_2}{3\mathrm{a}^2\cos^3\varphi_0\alpha_2} \tag{10}$$

$$\mathrm{q}_1 = \frac{1}{\cos^3\varphi_0\alpha^2}\left[\frac{\left(\mathrm{b}^3\,\mathrm{tg}^2\,\varphi_0\alpha_2 - 3\mathrm{a}^2\mathrm{B}_0\right)^3}{27\mathrm{a}^6} - \frac{\mathrm{b}^3 + \mathrm{B}_0^3}{2} - \frac{\mathrm{B}_0(\mathrm{b}^3\,\mathrm{tg}^2\,\varphi_0\alpha_2 - 3\mathrm{a}^2\mathrm{B}_0)}{2\mathrm{a}^2}\right]; \tag{11}$$

$$\mathrm{p}_1 = \frac{1}{\cos^2\varphi_0\alpha_2}\left[B_0^2 - \frac{\left(b^3\,\mathrm{tg}^2\,\varphi_0\alpha_2 - 3a^2B_0\right)^2}{9a^4}\right].$$

$$r_{,2}\ = U_{,2} +\ V_{,2} - W_{,2};$$

$$U_{,2} = \frac{-2q_{1,2}u^3+3p_1^2p_{1,2}}{6u^2\sqrt{q_1^2+p_1^3}};$$

$$V_{,2} = \frac{2q_{1,2}V^2-3p_1^2p_{1,2}}{6V^2\sqrt{q_1^2+p_1^3}};$$

$$W_{,2} = \varphi_0 \operatorname{tg}\varphi_0\alpha_2 \left(W + \frac{2b^3}{3a^2\cos^3\varphi_0\alpha_2}\right);$$

$$q_{1,2} = \varphi_0 \operatorname{tg}\varphi_0\alpha_2 \left\{3q_1 + \frac{b^3}{\cos^5\varphi_0\alpha_2}\left[\frac{2\left(b^3\operatorname{tg}^2\varphi_0\alpha_2 - 3a^2l\right)^2}{9a^6} - \frac{B_0^2}{a^2}\right]\right\} \quad ; \tag{12}$$

$$p_{1,2} = 2\varphi_0 \operatorname{tg}\varphi_0\alpha_2 \left[p_1 - \frac{2b^3\left(b^3\operatorname{tg}^2\varphi_0\alpha_2 - 3a^2l\right)}{9a^4\cos^4\varphi_0\alpha_2}\right].$$

3. Коэффициенты первой и второй квадратичных форм. (параметры Ляме. Символы Кристоффеля)

Коэффициенты первой квадратичной формы (параметры Ляме) для данной оболочки имеют вид

$$H_{11} = \sqrt{\pi^2\Delta^2\sin^2\pi\alpha_1 + \ell^2};$$

$$H_{22} = \sqrt{\left(r_{,2}\right)^2 + r^2\varphi_0^2} + \frac{\Delta\varphi_0(1-\cos\pi\alpha_1)}{\left(r_{,2}\right)^2 + r^2\varphi_0^2}\left\{\left[r_{,22} - r\varphi_0^2\right]r - 2\left(r_{,2}\right)^2\right\}; \tag{13}$$

$$H_{12} = 0,$$

то есть выбранная нами система криволинейных координат α_1, α_2, α_3 является ортогональной.

Коэффициенты второй квадратичной формы (символы Кристоффеля) для данной оболочки равны

$$\Gamma_{11}^3 = -\frac{\pi^2\Delta\ell\cos\pi\alpha_1}{H_{11}}; \quad \Gamma_{12}^3 = 0;$$

$$\Gamma_{22}^3 = -\frac{2\ell\varphi_0H_{22}}{H_{11}} - \frac{2\ell\varphi_0}{H_{11}H_{22}}\left\{-\frac{r\left[r_{,22}+\varphi_0^2r\right]}{2} + \frac{r\Delta\varphi_0\left(r_{,22}+r\varphi_0^2\right)(1-\cos\pi\alpha_1)}{\sqrt{\left(r_{,2}\right)^2+r^2\varphi_0^2}}\left[2 - \frac{r\left(r_{,22}+\varphi_0^2r\right)}{\left(r_{,2}\right)^2+r^2\varphi_0^2}\right] + \frac{\Delta^2(1-\cos\pi\alpha_1)^2}{2\left[\left(r_{,2}\right)^2+r^2\varphi_0^2\right]}\left[\left(r_{,22} + r\varphi_0^2\right)r_{,22} - \varphi_0^2\left(r_{,2}^2 + r^2\varphi_0^2\right) + r_{,22}^3 - \frac{r_{,22}+r\varphi_0^2}{r_{,2}^2+r^2\varphi_0^2}\left(r_{,2}^2r_{,22} + rr_{,22}^2 - r_{,2}^2r_{,22} - 5r_{,2}^2r_{,22} - 5rr_{,2}^2\varphi_0^2\right) + \frac{r_{,2}^2\left(r_{,22}+r\varphi_0^2\right)^2}{\left(r_{,2}^2+r^2\varphi_0^2\right)^2}\left(rr_{,22} - r_{,2}^2\right) - \frac{\varphi_0^2r_{,2}^2\left(rr_{,22}-r_{,2}^2\right)}{r_{,2}^2+r^2\varphi_0^2}\right]\right\}. \tag{14}$$

$$\lambda_{11} = -\frac{\pi^2\Delta\ell\cos\pi\alpha_1}{H_{11}^3}; \quad \lambda_{12} = 0;$$

$$\lambda_{22} = -\frac{2\ell\varphi_0}{H_{11}H_{22}} + \frac{\ell\varphi_0\left(r_{,22}+r\varphi_0^2\right)}{H_{11}H_{22}^3}\left\{r - \frac{r\Delta r\varphi_0(1-\cos\pi\alpha_1)}{\sqrt{\left(r_{,2}^2+r^2\varphi_0^2\right)^3}}\left[\left(r_{,2}^2 + r^2\varphi_0^2\right) - \left(rr_{,22} - r_{,2}^2\right)\right] - \frac{\Delta^2(1-\cos\pi\alpha_1)^2}{\left(r_{,2}^2+r^2\varphi_0^2\right)^2}\left[\left(r_{,22} + r\varphi_0^2\right)\left(3r_{,2}^2 + 3\varphi_0^2r^2 - rr_{,22} + r_{,2}^2 + 2r_{,2}^2\right) - 4r\varphi_0^2\left(r_{,2}^2 + r^2\varphi_0^2\right) + rr_{,2}^2\frac{\left(r_{,22}+r\varphi_0^2\right)^2}{r_{,2}^2+r^2\varphi_0^2}\right]\right\}, \tag{15}$$

где

$$r_{,22} = U_{,22} + V_{,22} - W_{,22};$$

$$U_{,22} = \frac{p_1\left(2p_{1,2}^3+p_1p_{1,22}\right)}{2U^2\sqrt{q_1^2+p_1^3}} - \frac{Uq_{1,22}+3U_1q_{1,2}}{3\sqrt{q_1^2+p_1^3}} - \frac{2U_{,2}^2}{U} - \frac{U_{,2}\left(2q_1q_{1,2}+3p_1^2p_{1,2}\right)}{2\left(q_1^2+p_1^3\right)};$$

$$V_{,22} = -\frac{p_1\left(2p_{1,2}^2+p_1p_{1,22}\right)}{2V^2\sqrt{q_1^2+p_1^3}} + \frac{Vq_{1,22}+3V_{,2}q_{1,2}}{3\sqrt{q_1^2+p_1^3}} - \frac{2V_{,2}^2}{V} - \frac{V_{,2}\left(2q_1q_{1,2}+3p_1^2p_{1,2}\right)}{2\left(q_1^2+p_1^3\right)};$$

$$W_{,22} = 4W_{,2}\varphi_0\operatorname{tg}\varphi_0\alpha_2 + \varphi_0^2\left[W\left(1 - 2\operatorname{tg}^2\varphi_0\alpha_2\right) + \frac{2b^3}{3a^2\cos^5\varphi_0\alpha_2}\right]; \tag{16}$$

$$q_{,22} = \frac{\varphi_0^2}{\cos^2\varphi_0\alpha_2}\left\{3q_1 - \frac{b^3}{\cos^5\varphi_0\alpha_2}\left[\frac{B_0^2}{a^2} - \frac{2\left(b^3\,\mathrm{tg}^2\,\varphi_0\alpha_2 - 3a^2B_0\right)^2}{9a^6}\right]\right\} +$$
$$+\varphi_0\,\mathrm{tg}\,\varphi_0\alpha_2\left\{8q_{1,2} - \varphi_0\,\mathrm{tg}\,\varphi_0\alpha_2\left[15q_1 - \frac{8b^6\left(b^3\,\mathrm{tg}^2\,\varphi_0\alpha_2 - 3a^2B_0\right)}{9a^6\cos^7\varphi_0\alpha_2}\right]\right\};$$
$$p_{1,2} = \frac{2\varphi_0^2}{\cos^2\varphi_0\alpha_2}\left[p_1 - \frac{2b^3(b^3\,\mathrm{tg}^2\,\varphi_0\alpha_2 - 3a^2B_0)}{9a^4\cos^4\varphi_0\alpha_2}\right] +$$
$$+2\varphi_0\,\mathrm{tg}\,\varphi_0\alpha_2\left[3p_{1,2} - 4\varphi_0\,\mathrm{tg}\,\varphi_0\alpha_2\left(p_1 + \frac{b^6}{9a^4\cos^6\varphi_0\alpha_2}\right)\right].$$

Средние коэффициенты первой и второй квадратичных форм равны нулю, следовательно, выбранная система координат образована линиями кривизны.

4. Граничные условия и аппроксимирующие функции

Амплитуды перемещений u_1^0, u_2^0, u_3^0 точек срединной поверхности волнистой оболочки вдоль осей координат будем подбирать в виде следующих двойных рядов [2,4,5]

$$u_1^0 = \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} q_{rs}^1\,\Phi_{rs}^1(\alpha_1,\alpha_2)\,, \qquad u_2^0 = \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} q_{rs}^2\,\Phi_{rs}^2(\alpha_1,\alpha_2), \qquad u_3^0 = \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} q_{rs}^3\,\Phi_{rs}^3(\alpha_1,\alpha_2).$$

Матрица перемещений точек срединной поверхности может быть записана в следующем виде:

$$u = \Phi q$$

Каждая волна оболочки имеет две оси симметрии, поэтому расчет ее производим с использованием симметрии.

1) Симметрия относительно двух плоскостей $\alpha_1\alpha_3$ и $\alpha_2\alpha_3$.

Аппроксимирующие функции могут быть представлены двойными тригонометрическими рядами

$$u_1^0 = \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} q_{rs}^1\,(\cos r\pi\alpha_2 - \cos r\pi)\sin s\pi\alpha_1,$$

$$u_2^0 = \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} q_{rs}^2 \sin r\pi\alpha_2\cos(s-1)\pi\alpha_1\,, \tag{17}$$

$$u_3^0 = \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} q_{rs}^3(\cos r\pi\alpha_2 - \cos r\pi)\cos(s-1)\,\pi\alpha_1.$$

Эти аппроксимирующие функции соответствуют возможным симметричным формам собственных колебаний данной волнистой оболочки и удовлетворяют условиям жесткого защемления оболочки по нижнему контуру (рис. 2), а именно

$$\alpha_2 = \pm 1{:}\ u_1^0 = u_2^0 = u_3^0 = 0;\ u_{3,2}^0 = 0 \tag{18}$$

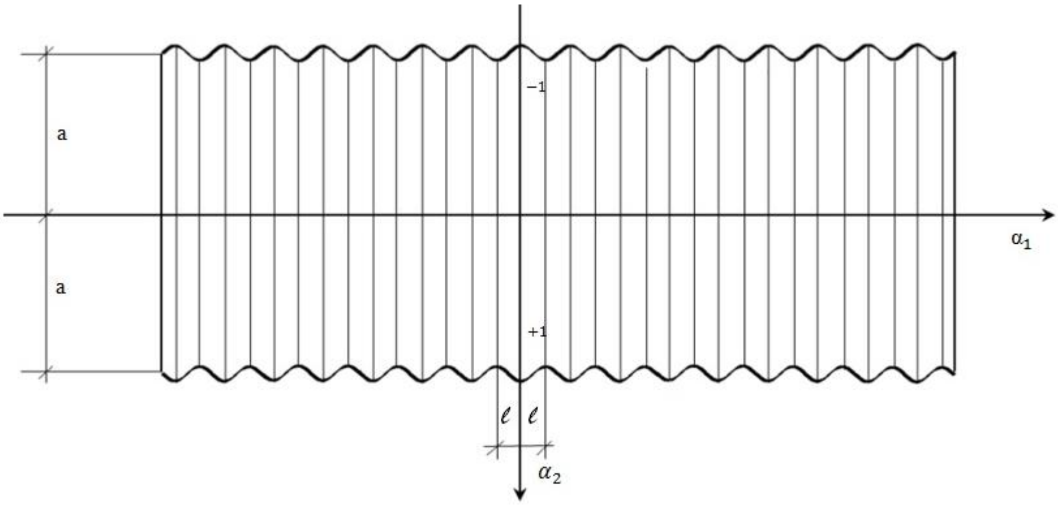

Рис.2. Расчетная схема оболочки

Вычислим производные от выбранных аппроксимирующих функций:

$$\begin{aligned}
\Phi^1_{rs,1} &= s\pi(\cos r\pi\alpha_2 - \cos r\pi)\cos s\pi\alpha_1;\\
\Phi^2_{rs,1} &= -(s-1)\pi\sin r\pi\alpha_2 \sin(s-1)\pi\,\alpha_1;\\
\Phi^3_{rs,1} &= -(s-1)\pi(\cos r\pi\alpha_2 - \cos r\pi)\sin(s-1)\pi\alpha_1;\\
\Phi^1_{rs,2} &= -r\pi\sin r\pi\alpha_2 \sin s\pi\alpha_1\,;\\
\Phi^2_{rs,2} &= r\pi\cos r\pi\alpha_2\cos(s-1)\,\pi\alpha_1\,;\\
\Phi^3_{rs,2} &= -r\pi\sin r\pi\alpha_2\cos(s-1)\,\pi\alpha_1\,; \qquad (19)\\
\Phi^3_{rs,11} &= -[(s-1)\pi]^2(\cos r\pi\alpha_2 - \cos r\pi)\cos(s-1)\,\pi\alpha_1;\\
\Phi_{rs,12} &= r(s-1)\pi^2\sin r\pi\alpha_2\sin(s-1)\pi\alpha_1;\\
\Phi_{rs,22} &= -(r\pi)^2\cos r\pi\alpha_2\cos(s-1)\,\pi\alpha_1.
\end{aligned}$$

2) Симметрия относительно плоскости $\alpha_2\alpha_3$ и кососимметрия относительно плоскости $\alpha_1\alpha_3$ (рис.2). Аппроксимирующие функции могут быть представлены следующими двойными тригонометрическими рядами

$$\begin{aligned}
u_1^0 &= \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} q^1_{rs}\, sin\, r\pi\alpha_2\, sin\, s\pi\alpha_1\,;\\
u_2^0 &= \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} q^2_{rs}(cosr\pi\alpha_2 - cosr\pi)cos(s-1)\pi\alpha_1\,; \qquad (20)\\
u_3^0 &= \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} q^3_{rs}[1-(\alpha_2)^2]sinr\pi\alpha_2 cos(s-1)\pi\alpha_1.
\end{aligned}$$

Эти аппроксимирующие функции соответствуют возможным несимметричным формам собственных колебаний данной волнистой оболочки и удовлетворяют условиям (18) жесткого защемления оболочки по нижнему контуру.

Производные от выбранных аппроксимирующих функций равны

$$\begin{aligned}
\Phi^1_{rs,1} &= s\pi sinr\pi\alpha_2 coss\pi\alpha_1;\\
\Phi^2_{rs,1} &= -(s-1)\pi[cosr\pi\alpha_2 - cosr\pi]sin(s-1)\pi\alpha_1;\\
\Phi^3_{rs,1} &= -(s-1)\pi[1-(\alpha_2)^2]sinr\pi\alpha_2 sin(s-1)\pi\alpha_1;\\
\Phi^1_{rs,2} &= r\pi cosr\pi\alpha_2 sins\pi\alpha_1;\\
\Phi^2_{rs,2} &= -r\pi sinr\pi\alpha_2 cos(s-1)\pi\alpha_1;\\
\Phi^{3}_{rs,2} &= \{[1-(\alpha_2)^2]r\pi cosr\pi\alpha_2 - 2\alpha_2 sinr\pi\alpha_2\}cos(s-1)\pi\alpha_1; \qquad (21)
\end{aligned}$$

$$\Phi^3_{rs,11} = -[(s-1)\boldsymbol{\pi}^2][1-(\boldsymbol{\alpha}_2)^2]\sin r\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\alpha}_2\cos(s-1)\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\alpha}_1;$$

$$\Phi^3_{rs,12} = -(s-1)\boldsymbol{\pi}\{[1-(\boldsymbol{\alpha}_2)^2]r\boldsymbol{\pi}\cos r\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\alpha}_2 - 2\boldsymbol{\alpha}_2\sin r\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\alpha}_2\}\sin(s-1)\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\alpha}_1;$$

$$\Phi^3_{rs,22} = \{[r\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\alpha}_2)^2 - (r\boldsymbol{\pi})^2 - 2]\sin r\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\alpha}_2 - 4r\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\alpha}_2\cos r\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\alpha}_2\}\cos(s-1)\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\alpha}_1.$$

3) Симметрия относительно плоскости $\alpha_1\,\alpha_3$ и кососимметрия относительно плоскости $\alpha_2\,\alpha_3$ (рис.2). Аппроксимирующие функции могут быть представлены следующими двойными тригонометрическими рядами

$$u_1^0 = \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} q_{rs}^1(\cos r\pi\alpha_2 - \cos r\pi)\cos(s-1)\pi\alpha_1;$$

$$u_2^0 = \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} q_{rs}^2\sin r\pi\alpha_2\sin s\pi\alpha_1 \qquad (22)$$

$$u_3^0 = \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} q_{rs}^3(\cos r\pi\alpha_2 - \cos r\pi)\sin s\pi\alpha_1.$$

Эти аппроксимирующие функции также соответствуют возможным несимметричным формам собственных колебаний данной волнистой оболочки и удовлетворяют условиям (18) жесткого защемления оболочки по нижнему контуру.

Вычислим производные от выбранных аппроксимирующих функций:

$$\begin{aligned}
\Phi^3_{rs,1} &= s\pi(\cos r\pi\alpha_2 - \cos r\pi)\cos s\pi\alpha_1;\\
\Phi^2_{rs,1} &= s\pi\cos s\pi\alpha_1\sin r\pi\alpha_2;\\
\Phi^1_{rs,1} &= -(s-1)\pi\sin(s-1)\pi\alpha_1(\cos r\pi\alpha_2 - \cos r\pi);\\
\Phi^1_{rs,2} &= -r\pi\sin r\pi\alpha_2\cos(s-1)\pi\alpha_1;\\
\Phi^2_{rs,2} &= r\pi\cos r\pi\alpha_2\sin s\pi\alpha_1; \qquad (23)\\
\Phi^3_{rs,2} &= -r\boldsymbol{\pi}\sin r\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\alpha}_2\sin s\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\alpha}_2;\\
\Phi^3_{rs,11} &= -s\pi^2\sin s\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\alpha}_1\,(\cos r\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\alpha}_2 - \cos r\boldsymbol{\pi});\\
\Phi^3_{rs,12} &= s\boldsymbol{\pi}\cos s\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\alpha}_1(-r\boldsymbol{\pi})\sin r\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\alpha}_2;\\
\Phi^3_{rs,22} &= -(r\boldsymbol{\pi})^2\cos r\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\alpha}_2\sin s\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\alpha}_1.
\end{aligned}$$

4) Кососимметрия относительно двух плоскостей $\alpha_1\alpha_3$ и $\alpha_2\alpha_3$ (рис.2). Аппроксимирующие функции могут быть представлены следующими двойными тригонометрическими рядами

$$u_1^0 = \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} q_{rs}^1\sin r\pi\alpha_2\cos(s-1)\pi\alpha_1;$$

$$u_2^0 = \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} q_{rs}^2(\cos r\pi\alpha_2 - \cos r\pi)\sin s\pi\alpha_1; \qquad (24)$$

$$u_3^0 = \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} q_{rs}^3[1-(\alpha_2)^2\sin r\pi\alpha_2\sin s\pi\alpha_1.$$

Эти аппроксимирующие функции также соответствуют возможным несимметричным формам собственных колебаний оболочки и удовлетворяют условиям (18) жесткого защемления данной волнистой оболочки по нижнему контуру.

Производные от выбранных аппроксимирующих функций равны

$$
\begin{aligned}
&\Phi^1_{rs,1} = -(s-1)\pi \sin(s-1)\pi\alpha_1 \sin r\pi\alpha_2;\\
&\Phi^2_{rs,1} = \mathrm{s\pi cos s\pi}\alpha_1(\mathrm{cos r\pi}\alpha_2 - \mathrm{cos r\pi});\\
&\Phi^3_{rs,1} = \mathrm{s\pi cos s\pi}\alpha_1[1-(\alpha_2)^2]\mathrm{sin r\pi}\alpha_2;\\
&\Phi^1_{rs,2} = \mathrm{r\pi cos r\pi}\alpha_2\cos(\mathrm{s}-1)\pi\alpha_1;\\
&\Phi^2_{rs,2} = -\mathrm{r\pi sin r\pi}\alpha_2\mathrm{sin s\pi}\alpha_1;\\
&\Phi^3_{rs,2} = \{[1-(\alpha_2)^2]\mathrm{r\pi cos r\pi}\alpha_2 - 2\alpha_2\mathrm{sin r\pi}\alpha_2\}\mathrm{sin s\pi}\alpha_1;\\
&\Phi^3_{rs,11} = -(\mathrm{s\pi})^2\mathrm{sin s\pi}\alpha_1[1-(\alpha_2)^2]\mathrm{sin r\pi}\alpha_2;\\
&\Phi^3_{rs,12} = \{[1-(\alpha_2)^2]\mathrm{r\pi cos r\pi}\alpha_2 - 2\alpha_2\mathrm{sin r\pi}\alpha_2\}\mathrm{s\pi cos s\pi}\alpha_1;\\
&\Phi^3_{rs,22} = \{[(\mathrm{r\pi}\alpha_2)^2 - (\mathrm{r\pi})^2 - 2]\mathrm{sin r\pi}\alpha_2 - 4\mathrm{r\pi}\alpha_2\mathrm{cos r\pi}\alpha_2\}\mathrm{sin s\pi}\alpha_1.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

А налогичным образом были подобраны аппроксимирующие функции в виде двойных тригонометрических рядов, удовлетворяющие условию шарнирно - неподвижного опирания оболочки по нижнему контуру вдоль образующей (рис.2), а именно

$$\alpha_2 = \pm 1:\ u_1^0 = u_2^0 = u_3^0 = 0. \tag{26}$$

Разработанная методика позволяет получить достаточно точные значения низших частот и форм собственных колебаний тонких оболочек усложненной формы при произвольных граничных условиях и при любом законе изменения их геометрических параметров.

Վ.Դ.Երեմին

ԲԱՑ ՊՐՈՖԻԼԻ ՈՉ ՇՐՋԱՆԱՁԵՎ ՑԻԼԻՆԴՐԻԿ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԱԼԻՔԱՁԵՎ ԹԱՂԱՆԹԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

Դիտարկվում է բաց պրոֆիլի ոչ շրջանաձև ցիլինդրիկ առաձգական ալիքաձև թաղանթի սեփական տատանումների խնդիրը: Խնդրի հիմքում դրված է Ռելեյ-Ռիտցի էներգետիկ մեթոդը: Ստացված են թաղանթի միջին մակերեսի վեկտորային հավասարումը, Լյամի պարամետրերի և Քրիստոֆֆելի սիմվոլների հաշվարման արտահայտությունները: Ընտրվել են ֆունկցիաներ, որոնք մոտարկում են միջին մակերեսի կոորդինատների առանցքով կետերի տեղափոխման ամպլիտուդաները, կրկնակի տրիգոնոմետրիկ շարքերի տեսքով, որոնք համապատասխանում են տվյալ ալիքաձև թաղանթի սեփական տատանումների հնարավոր սիմետրիկ ձևերին և որոնք բավարարում են ներքին եզրագծով թաղանթի կոշտ ամրակցման պայմաններին:

Առանցքային բառեր. *բարակ առանձգական ալիքաջև թաղանթ, սեփական տատանումների հաճախականությունը և ձևը*

V.D.Eryomin

NATURAL OSCILLATIONS OF A NON-CIRCULAR CYLINDRICAL ELASTIC THIN UNDULATING SHELL OF AN OPEN PROFILE

The problems of natural oscillations of a non-circular cylindrical elastic thin undulating shell with an open profile have been observed. The basis of the problem is Rayleigh-Ritz energy method.

We obtained the vector equation of shell middle surface, the expression for calculating the parameters of Lame and the Christoffel symbols, selected the functions, approximating amplitudes of the shell middle surface points transfer along the coordinate axes in the form of double trigonometric series, corresponding to the possible symmetrical forms of the undulating shell natural oscillations and meeting the conditions of the shell's rigid jamming along the excess contour.

Keywords*: thin elastic undulating shell, frequency and mode of natural oscillations*

Литература

1. **Гольденвейзер А.Л.** Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука,1976.
2. Аксентян К.Б., Гордеев-Гавриков В.К. Вариационно-энергетический метод расчета колебаний инженерных сооружений. - Ростов-на-Дону: РГУ,1979.
3. **Аксетян К.Б., Ерёмин В.Д.** Принцип возможных перемещений в случае свободных колебаний// Расчет оболочек и пластин. - Ростов-на-Дону: РИСИ, 1977.
4. **Аксетян К.Б., Гордеев-Гавриков В.К.**Энергетический метод расчета оболочек усложненной формы. - Ростов-на-Дону: РГУ, 1976.
5. **Ерёмин В.Д.** Определение частот и форм собственных колебаний оболочек неклассической формы // Известия Национального университета архитектуры и строительства Армении. - Ереван, 2015.

Երյոմին Վիկտոր Դմիտրիի տ.գ.թ., դոց. *(ՌԴ, Դոնի Ռոստով)-Ռոստովի պետական շինարարական համալսարան, Նյութերի դիմադրության ամբիոն, +7(863) 2019136, interzentrum@yahoo.com:*
Ерёмин Виктор Дмитриевич к.т.н., доц.*(РФ, г. Ростов-на-Дону) –Ростовский государственный строительный университет, Сопротивление материалов, +7(863) 2019136, interzentrum@yahoo.com..*
Eryomin Viktor Dmitry, doctor of philosophy (PHd) in engineering, associate prof. *(RF, Rostov-on-Don) –,Rostov State University of Civil Engineering, Department of Strength of Materials, +7(863)2019136, interzentrum@yahoo.com.*

Ներկայացվել է՝03.02.2015թ.
Ընդունվել է տպագրության՝ 09.03.2015թ.