УДК 624.074.4 СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

В.Д.Ерёмин

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТ И ФОРМ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧЕК НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Предлагается методика численного решения задачи определения низших частот и форм собственных колебаний упругих тонких оболочек усложненной формы энергетическим методом Релея-Ритца, приемлемая для использования в проектных организациях.

В матричной форме приведены основные уравнения и дифференциальные зависимости, описывающие деформацию срединной поверхности оболочки и её параллельного слоя, матричные формулы для вычисления амплитуд потенциальной и кинетической энергии деформации оболочки. Получено обобщенное вековое уравнение для нахождения частот и форм собственных колебаний оболочки, которое приведено к классическому вековому уравнению.

Ключевые слова*: *частота, форма собственных колебаний, тонкая оболочка, энергетический метод

1. Постановка задачи

Рассматривается задача определения низших частот и соответствующих им форм собственных колебаний тонких оболочек сложной формы. Расчет выполняется на основе геометрической и физической линейности с использованием гипотез Кирхгофа-Лява.В основу решения задачи положен энергетический метод Релея-Ритца, позволяющий получить достаточно точные значения низших частот и форм собственных колебаний тонких оболочек сложной формы при произвольных граничных условиях и при любом законе изменения её геометрических параметров. Этот метод заменяет дифференциальные уравнения однородной системой линейных алгебраических уравнений.

2. Деформация срединной поверхности оболочки

Рассмотрим тонкую оболочку произвольного очертания, срединная поверхность которой отнесена к криволинейной полу-ортогональной системе координат α^1 и α^2 с координатными векторами $\bar{\varepsilon_1}$ и $\bar{\varepsilon}_2$ соответственно (рис.1).

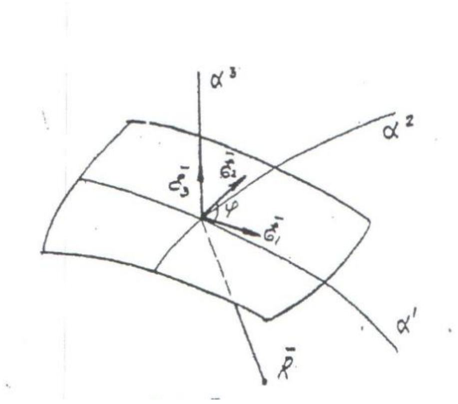

Рис.1. Система координат α^1 и α^2

В качестве характеристик деформации срединной поверхности оболочки приняты следующие величины [1]:

$$\gamma_{11},\ \gamma_{22},\ \omega_1, \omega_2, \aleph_1, \aleph_2,\ \tau_1,\ \tau_2,$$

где $\gamma_{11},\ \gamma_{22}$ -относительные удлинения бесконечно малого элемента срединной поверхности вдоль криволинейных осей координат;

$\omega_1, \omega_2, \aleph_1, \aleph_2,\ \tau_1,\ \tau_2$ – деформации сдвига, изгиба и кручения бесконечно малого элемента срединной поверхности оболочки.

Матрица деформации срединной поверхности оболочки представлена в виде

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $\gamma_1 = \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \gamma_{22} \end{pmatrix}$, (2) $\gamma_2 = \begin{pmatrix} \aleph_1 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \aleph_2 \end{pmatrix}$ (3)

3. Деформация параллельного слоя оболочки

За параметры параллельного слоя оболочки приняты [1]:

$$\gamma_{11}^*,\ \gamma_{22}^*,\ \omega_1^*,\ \omega_2^*,$$

где γ_{11}^*, γ_{22}^* - относительные удлинения бесконечно малого элемента параллельного слоя вдоль криволинейных осей координат; ω_1^*, ω_2^* - деформации сдвига бесконечно малого элемента параллельного слоя оболочки.

Эти величины вполне определяют деформационное состояние параллельного слоя оболочки в окрестности любой его точки.

Матрица деформации параллельного слоя оболочки имеет вид

$$\gamma^* = \begin{pmatrix} \gamma_{12}^* \\ \omega_1^* \\ \omega_2^* \\ \gamma_{22}^* \end{pmatrix}. \tag{4}$$

4. Функции, аппроксимирующие перемещения точек срединной поверхности

Перемещения точек срединной поверхности оболочки вдоль криволинейных осей координат представлены в виде двойных рядов, что позволяет заменить истинную форму колебаний оболочки более “подходящей” формой [2]

$$\mathcal{U}_1 = \sum_{r=1}^{m} \cdot \sum_{s=1}^{n} q_{rs}^1\, \Phi_{rs}^1,$$

$$\mathcal{U}_2 = \sum_{r=1}^{m} \cdot \sum_{s=1}^{n} q_{rs}^2\, \Phi_{rs}^2 \tag{5}$$

$$\mathcal{U}_3 = \textstyle\sum_{r=1}^{m} \cdot \sum_{s=1}^{n} q_{rs}^3\, \Phi_{rs}^3.$$

Согласно энергетическому методу Релея-Ритца, аппроксимирующие функции $\Phi_{rs}^1, \Phi_{rs}^2, \Phi_{rs}^3$ выбираются таким образом, чтобы они удовлетворяли хотя бы геометрическим граничным условиям. Величины $q_{rs}^1, q_{rs}^2, q_{rs}^3$ представляют собой постоянные неизвестные коэффициенты.

Матрицу перемещений точек срединной поверхности оболочки можно записать в следующем виде

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}^1 \dots \Phi_{mn}^1 & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & \Phi_{11}^2 \dots \Phi_{mn}^2 & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & \Phi_{11}^3 \dots \Phi_{mn}^3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_{11}^1 \\ q_{mn}^1 \\ q_{11}^2 \\ q_{mn}^2 \\ q_{11}^3 \\ q_{mn}^3 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \Phi_{11}^1 \dots \Phi_{mn}^1 &= \Phi^1 \ ; & q_{11}^1 \dots q_{mn}^1 &= (q^1)^{\text{т}} \ ; \\ \Phi_{11}^2 \dots \Phi_{mn}^2 &= \Phi^2 \ ; & q_{11}^2 \dots q_{mn}^2 &= (q^2)^{\text{т}} \ ; \\ \Phi_{11}^3 \dots \Phi_{mn}^3 &= \Phi^3 \ ; & q_{11}^3 \dots q_{mn}^3 &= (q^3)^{\text{т}} \ . \end{aligned} \tag{7}$$

Матрица перемещений точек срединной поверхности оболочки с учетом этих обозначений примет вид

$$\mathcal{U} = \Phi\, q \ , \tag{8}$$

где $$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi^1 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi^3 \end{bmatrix}, \tag{9}$$ $$q = \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{bmatrix} \ . \tag{10}$$

5. Потенциальная энергия деформации оболочки

В матричном виде формула для вычисления амплитуды потенциальной энергии деформации оболочки в криволинейной системе координат имеет вид [2]

$$\Pi = E_1 \frac{h^3}{3} \left(q^{\text{т}}\, S\ q \right) \ , \tag{11}$$

где E – модуль упругости материала оболочки, μ - коэффициент Пауссона, h – полутолщина оболочки.

Матрица S, которая входит в формулу (11) для амплитуды потенциальной энергии деформации оболочки, имеет вид

$$S = \begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} S^{11}_{1111} & \cdots & S^{11}_{11mn} \\ \vdots & & \vdots \\ S^{11}_{rs11} & \boxed{S^{11}_{rsuv}} & S^{11}_{rsmn} \\ \vdots & & \vdots \\ S^{11}_{mn11} & \cdots & S^{11}_{mnmn} \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} S^{12}_{1111} & \cdots & S^{12}_{11mn} \\ \vdots & & \vdots \\ S^{12}_{rs11} & \boxed{S^{12}_{rsuv}} & S^{12}_{rsmn} \\ \vdots & & \vdots \\ S^{12}_{mn11} & \cdots & S^{12}_{mnmn} \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} S^{13}_{1111} & \cdots & S^{13}_{11mn} \\ \vdots & & \vdots \\ S^{13}_{rs11} & \boxed{S^{13}_{rsuv}} & S^{13}_{rsmn} \\ \vdots & & \vdots \\ S^{13}_{mn11} & \cdots & S^{13}_{mnmn} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} S^{21}_{1111} & \cdots & S^{21}_{11mn} \\ \vdots & & \vdots \\ S^{21}_{rs11} & \boxed{S^{21}_{rsuv}} & S^{21}_{rsmn} \\ \vdots & & \vdots \\ S^{21}_{mn11} & \cdots & S^{21}_{mnmn} \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} S^{22}_{1111} & \cdots & S^{22}_{11mn} \\ \vdots & & \vdots \\ S^{22}_{rs11} & \boxed{S^{22}_{rsuv}} & S^{22}_{rsmn} \\ \vdots & & \vdots \\ S^{22}_{mn11} & \cdots & S^{22}_{mnmn} \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} S^{23}_{1111} & \cdots & S^{23}_{11mn} \\ \vdots & & \vdots \\ S^{23}_{rs11} & \boxed{S^{23}_{rsuv}} & S^{23}_{rsmn} \\ \vdots & & \vdots \\ S^{23}_{mn11} & \cdots & S^{23}_{mnmn} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} S^{31}_{1111} & \cdots & S^{31}_{11mn} \\ \vdots & & \vdots \\ S^{31}_{rs11} & \boxed{S^{31}_{rsuv}} & S^{31}_{rsmn} \\ \vdots & & \vdots \\ S^{31}_{mn11} & \cdots & S^{31}_{mnmn} \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} S^{32}_{1111} & \cdots & S^{32}_{11mn} \\ \vdots & & \vdots \\ S^{32}_{rs11} & \boxed{S^{32}_{rsuv}} & S^{32}_{rsmn} \\ \vdots & & \vdots \\ S^{32}_{mn11} & \cdots & S^{32}_{mnmn} \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} S^{33}_{111} & \cdots & S^{33}_{11mn} \\ \vdots & & \vdots \\ S^{33}_{rs11} & \boxed{S^{33}_{rsuv}} & S^{33}_{rsmn} \\ \vdots & & \vdots \\ S^{33}_{mn11} & \cdots & S^{33}_{mnmn} \end{bmatrix}
\end{bmatrix} \tag{12}$$

Каждая клетка матрицы S представляет собой матрицу размером $mn \times mn$.

Каждый элемент матрицы S представляет собой кратный интеграл. В связи с громоздкостью выражений элементов этой матрицы приводить их здесь не будем.

6. Кинетическая энергия оболочки

Амплитуда кинетической энергии оболочки определяется по формуле [2]

$$K^0 = \frac{\rho\omega^2}{2} \iiint\limits_{(v)} \left[\left(\overset{*}{u}{}_1^0 \right)^2 + \left(\overset{*}{u}{}_2^0 \right)^2 + \left(\overset{*}{u}{}_3^0 \right)^2 \right] dV^* \quad , \tag{13}$$

где ρ- плотность материала оболочки, ω - частота свободных колебаний оболочки, $\overset{*}{u}{}_1^0$, $\overset{*}{u}{}_2^0$,$\overset{*}{u}{}_3^0$ - амплитуда перемещений точек параллельного слоя оболочки вдоль криволинейных осей координат. Здесь звездочкой (*) отмечены величины, относящиеся к параллельному слою.

Получена матричная формула для вычисления амплитуды кинетической энергии оболочки с учетом и без учета инерции вращения. Эта формула имеет вид

$$K^0 = \frac{\rho\omega^2\, h^3}{3}\, (q^{\mathrm{T}}\, I\;\, q) \;, \tag{14}$$

где I - вполне определенная для каждого вида оболочки матрица, каждый элемент которой представляет собой кратный интеграл.

Матрица I, которая входит в формулу (14) для амплитуды кинетической энергии оболочки, имеет вид

$$\mathrm{I} = \begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} I^{11}_{1111} & \cdots & I^{11}_{11mn} \\ \vdots & & \vdots \\ I^{11}_{rs11} & \boxed{I^{11}_{rsuv}} & I^{11}_{rsmn} \\ \vdots & & \vdots \\ I^{11}_{mn11} & \cdots & I^{11}_{mnmn} \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} I^{12}_{1111} & \cdots & I^{12}_{11mn} \\ \vdots & & \vdots \\ I^{12}_{rs11} & \boxed{I^{12}_{rsuv}} & I^{12}_{rsmn} \\ \vdots & & \vdots \\ I^{12}_{mn11} & \cdots & I^{12}_{mnmn} \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} I^{13}_{1111} & \cdots & I^{13}_{11mn} \\ \vdots & & \vdots \\ I^{13}_{rs11} & \boxed{I^{13}_{rsuv}} & I^{13}_{rsmn} \\ \vdots & & \vdots \\ I^{13}_{mn11} & \cdots & I^{13}_{mnmn} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} I^{21}_{1111} & \cdots & I^{21}_{11mn} \\ \vdots & & \vdots \\ I^{21}_{rs11} & \boxed{I^{21}_{rsuv}} & I^{21}_{rsmn} \\ \vdots & & \vdots \\ I^{21}_{mn11} & \cdots & I^{21}_{mnmn} \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} I^{22}_{1111} & \cdots & I^{22}_{11mn} \\ \vdots & & \vdots \\ I^{22}_{rs11} & \boxed{I^{22}_{rsuv}} & I^{22}_{rsmn} \\ \vdots & & \vdots \\ I^{22}_{mn11} & \cdots & I^{22}_{mnmn} \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} I^{23}_{1111} & \cdots & I^{23}_{11mn} \\ \vdots & & \vdots \\ I^{23}_{rs11} & \boxed{I^{23}_{rsuv}} & I^{23}_{rsmn} \\ \vdots & & \vdots \\ I^{23}_{mn11} & \cdots & I^{23}_{mnmn} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} I^{31}_{1111} & \cdots & I^{31}_{11mn} \\ \vdots & & \vdots \\ I^{31}_{rs11} & \boxed{I^{31}_{rsuv}} & I^{31}_{rsmn} \\ \vdots & & \vdots \\ I^{31}_{mn11} & \cdots & I^{31}_{mnmn} \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} I^{32}_{1111} & \cdots & I^{32}_{11mn} \\ \vdots & & \vdots \\ I^{32}_{rs11} & \boxed{I^{32}_{rsuv}} & I^{32}_{rsmn} \\ \vdots & & \vdots \\ I^{32}_{mn11} & \cdots & I^{32}_{mnmn} \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} I^{33}_{111} & \cdots & I^{33}_{11mn} \\ \vdots & & \vdots \\ I^{33}_{rs11} & \boxed{I^{33}_{rsuv}} & I^{33}_{rsmn} \\ \vdots & & \vdots \\ I^{33}_{mn11} & \cdots & I^{33}_{mnmn} \end{bmatrix}
\end{bmatrix} \tag{15}$$

Каждая клетка матрицы I представляет собой матрицу размером mn × mn.

Получены формулы для вычисления элементов матрицы I с учетом и без учета инерции вращения.

7. Получение обобщенного характеристического уравнения

Согласно принципу возможных перемещений, вариационное уравнение механики для случая сводных колебаний имеет вид [2,3]

$$\delta\, (\Pi^0 - K^0) = 0\;, \tag{16}$$

где Π^0 - амплитуда потенциальной энергии деформации оболочки, которую можно определить по формуле (11), K^0 - амплитуда кинетической энергии оболочки, которую можно определить по формуле (14).

В соответствии с принципом возможных перемещений, из всех возможных перемещений точек колеблющегося тела, удовлетворяющих геометрическим граничным условиям, действительными будут те, амплитуды которых придают стационарное значение выражению ($\Pi^0 - K^0$).

Необходимым условием стационарности этой функции является равенство нулю её частных производных по переменным $q_{r\,s}^1, q_{r\,s}^2, q_{r\,s}^3$. Следовательно,

$$\frac{d\,(\Pi^0 - K^0)}{d\;q_{rs}^k} = 0 \quad , \tag{17}$$

или

$$\frac{d\;\Pi^0}{d\,q_{rs}^k} - \frac{d\;K^0}{d\,q_{rs}^k} = 0 \qquad , \tag{18}$$

где $(r = 1, 2 \ldots, \; m \;\; ; \; s = 1, 2 \ldots, \;\; n \;\; ; \;\; k = 1, 2, 3 \, .)$

Дифференцируя формулы потенциальной энергии деформации и кинетической энергии оболочки, после преобразований однородную получим систему алгебраических уравнений

$$(S - \lambda\, I)\;q = 0\,, \tag{19}$$

где

$$\lambda = \omega^2\,\frac{\rho}{\mathrm{E}_1}\,. \tag{20}$$

Приравняв определитель этой системы уравнений к нулю, получим обобщённое вековое уравнен

$$|S - \lambda\, I| = 0\;. \tag{21}$$

В разработанном алгоритме решение это задачи с целью сокращения времени расчета и удобства машинной реализации обобщенное вековое уравнение преобразовано к классическому вековому уравнению

$$|\mathrm{C} - \lambda\,\mathrm{E}| = 0 \;\;, \tag{22}$$

или

$$|\mathcal{D} - \eta\,\mathrm{E}| = 0 \;, \tag{23}$$

где E - единичная матрица

$$\begin{gathered} C = I^{-1} \cdot S\,, \\ \mathcal{D} = S^{-1} \cdot I = C^{-1}\,, \\ \eta = \frac{1}{\lambda} = \frac{\mathrm{E}_1}{\rho\omega^2}\,. \end{gathered} \tag{24}$$

Определив собственные числа и вектора матриц C или $\mathcal{D}$, получим искомые значения частот и соответствующие им формы собственных колебаний оболочки.

Задача определения собственных чисел матрицы в настоящее время решается различными методами. Это прежде всего, метод непосредственного развертывания характеристического определителя, метод Крылова, метод Данилевского, метод Леверрье-Фадеева, Якоби, интерполяционные методы и другие. Проблема эта, как известно, также довольно сложная, требующая достаточно большой вычислительной работы, поэтому в тех случаях, когда по самому характеру задачи не требуется знать весь спектр частот собственных колебаний оболочки, полезно воспользоваться специальными приемами определения только одного или нескольких собственных чисел.

Одним из способов нахождения наибольшего или наименьшего по модулю собственных чисел матрицы является метод итерации. Недостатком этого метода является тот факт, что каждая новая итерация приводит к все большим и большим числам. Для облегчения вычислений и составления довольно простой программы расчета на ЭВМ после каждой итерации будем делить все компоненты полученного вектора на первую компоненту. В результате такого ’’нормирования” дальнейшей итерации будем подвергать вектор, первая компонента которого равна единице.

Основное достоинство этого метода заключается в том, что он более просто реализуется на современных вычислительных машинах, что позволило составить довольно простой алгоритм расчета.

Составленная на основе этого метода программа позволяет определять значение наименьшей частоты и соответствующей ей формы собственных колебаний оболочки, причем, в качестве исходной матрицы рассматривается матрица D, определяемая формулой (24). Эта программа позволяет при необходимости вычислять весь спектр собственных частот оболочки.

Разработанная методика определения частот и форм собственных колебаний оболочек сложной формы и результаты данной работы могут быть использованы в проектных организациях при расчете и проектировании волнистых покрытий производственных, складских, общественных и сельскохозяйственных зданий и сооружений. Как частный случай эта методика реализует расчет гладких оболочек с любыми граничными условиями.

Վ.Դ.Երեմին

ՈՉ ԴԱՍԱԿԱՆ ՁԵՎԵՐԻ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՃԱԽԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՁԵՎԵՐԻ ՈՐՈՇՈՒՄ

Առաջարկվում է բարդ ձևի առաձգական բարակ թաղանթների սեփական տատանումների ցածրագույն հաճախականությունների և ձևրի որոշման խնդրի թվային լուծման մեթոդաբանությունը՝ Ռելեյ-Ռիտցի էներգետիկ մեթոդով, որը ընդունելի է նախագծային կազմակերպություններում կիրառելու համար:

Բերված են մատրիցային տեսքով հիմնական հավասարումները և դիֆերենցիալ կախվածությունները, որոնք նկարագրում են թաղանթի միջին մակերեսի և դրա զուգահեր շերտի դեֆորմացիան, թաղանթի դեֆորմացիայի պոտենցիալ և կինետիկ էներգիայի ամպլիտուդաների հաշվարման համար մատրիցային բանաձևերը: Բերված է ամփոփ դարավոր

հավասարում՝ թաղանթի սեփական տատանումների հաճախականության և ձևի որոշման համար, որը բերվում է դասական դարավոր հավասարմանը:

Առանցքային բառեր. *հաճախականություն, սեփական տատանումների ձև, բարակ թաղանթ, էներգետիկ մեթոդ*

V.D. Eryomin

DETERMINATION OF FREQUENCIES AND MODES OF NATURAL OSCILLATIONS OF THE SHELLS OF A NONCLASSICAL SHAPE

A method of numerical solution of the problem of determining the lower frequencies and modes of natural oscillations of thin elastic shells of sophisticated forms by the Rayleigh-Ritz method, acceptable for use in design organizations has been suggested. In a matrix form the basic equations and differential dependences, describing the deformation of the middle surface of the shell and its parallel layer, matrix formulas to calculate the amplitudes, matrix formulas for calculating the amplitudes of the potential and kinetic energies of the shell's deformation are presented. To calculate the frequencies and modes of natural oscillations of a shell, the generalized secular equation has been obtained and reduced to the classic secular equation.
***Keywords**: frequency, mode of natural oscillations, thin shell, energy method*

Литература

1. **Гольденвейзер А.Л.** Теория упругих тонких оболочек. – М.: Наука, 1976.
2. **Аксентян К.Б., Гордеев-Гавриков В.К.** Вариационно-энергетический метод расчета колебаний инженерных сооружений. - Ростов-на-Дону: РГУ, 1979.
3. **Аксентян К.Б., Ерёмин В.Д.** Принцип возможных перемещений в случае свободных колебаний// Расчет оболочек и пластин. - Ростов-на-Дону: РИСИ, 1977.

Երյոմին Վիկտոր Դմիտրիի տ.գ.թ., դոց. *(ՌԴ, Դոնի Ռոստով)-Ռոստովի պետական շինարարական համալսարան, Նյութերի դիմադրության ամբիոն, +7(863)2019136, interzentrum@yahoo.com:*
Ерёмин Виктор Дмитриевич к.т.н., доц. *(РФ, г. Ростов-на-Дону) –Ростовский государственный строительный университет, Сопротивление материалов, +7(863)2019136, interzentrum@yahoo.com.*
Eryomin Viktor Dmitry, doctor of philosophy (PHd) in engineering, associate prof. *(RF, Rostov-on-Don) –,Rostov State University of Civil Engineering, Department of Strength of Materials, +7 (863) 2019136, interzentrum@yahoo.com.*

Ներկայացվել է՝ 03.02.2015թ.
Ընդունվել է տպագրության՝ 12.02.2015թ.