УДК 539.3 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Г. А. Геворкян,
С. В. Варданян,
Н. В. Пирумян,
Н. Р.Мехрабекян

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ФОРМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПОПЕРЕЧНОГО ИЗГИБА ПЛАСТИН С УЧЕТОМ МОМЕНТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Рассматривается метод конечных элементов прямоугольной формы для решении задач поперечного изгиба пластин с учетом моментных напряжений.

Ключевые слова: *конечные элементы, узловые перемещения, квадратичное программирование, пластина, изгиб.*

В микрополярной теории пластин на основании расширенной гипотезы в [1] получены три уравнениий относительно трех искомых функций $w(x,y)$ и $\psi_i(x,y), i \in \{1,2\}$, через которые представлены все расчетные величины пластинки.

Полагая [2] $$\psi_1 = -\frac{12\overline{A}}{\alpha h^2}\frac{\partial}{\partial x}\Delta F, \quad \psi_2 = -\frac{12\overline{A}}{\alpha h^2}\frac{\partial}{\partial y}\Delta F,$$

$$w = F - A\Delta F, \tag{1}$$

при $X^{\pm} = 0$, $Y^{\pm} = 0$ получено

$$D_1 \Delta\Delta F = Z_2,$$

где $D_1 = D + (\varepsilon + \gamma)h$; $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – жесткость пластинки при изгибе без учета моментных напряжений; $w(x,y)$ –нормальное перемещение; $X^{\pm}(x,y)$, $Y^{\pm}(x,y)$, $Z^{\pm}(x,y)$ – тангенциальные и нормальные компоненты векторов интенсивности поверхностных сил, приложенных на плоскостях $z = \pm h/2$ соответственно; $Z_2 = Z^+ + Z^-$, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ – двумерный оператор Лапласа; h – толщина пластинки; Е –модуль упругости; ν –коэффициент Пуассона; $\mu = E/2(1+\nu)$ – постоянные Ляме; $\alpha, \gamma, \beta, \varepsilon$ –четыре новые упругие постоянные.

Для коэффициентов, содержащих упругие постоянные материала пластинки, введены следующие обозначения:

$$\overline{A} = \gamma + \varepsilon + D/h, \quad A = \frac{(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)}{4\mu\alpha} + \frac{3D}{5h\mu}.$$

Для перерезывающих сил и моментов имеем [2]

$$N_x = -D_1\frac{\partial}{\partial x}\Delta F - D_4\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} - D_5\frac{\partial^3 \Delta F}{\partial x \partial y^2}, \qquad N_y = -D_1\frac{\partial}{\partial y}\Delta F - D_4\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} - D_6\frac{\partial^3 \Delta F}{\partial x^2 \partial y}, \tag{2}$$

$$M_x = -D_1\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - D_2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + D_3\frac{\partial^2 \Delta F}{\partial y^2}, \qquad M_y = -D_1\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - D_2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + D_3\frac{\partial^2 \Delta F}{\partial x^2}, \tag{3}$$

$$M_{xy} = D_4\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + D_5\frac{\partial^2 \Delta F}{\partial x \partial y}, \qquad M_{yx} = D_4\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + D_6\frac{\partial^2 \Delta F}{\partial x \partial y}. \tag{4}$$

Для компонент тензора поворота при $z = 0$, имеем [2]

$$\omega_1 = \frac{\partial F}{\partial y} + D_7 \frac{\partial}{\partial y}\Delta F\,, \qquad \omega_2 = \frac{\partial F}{\partial x} + D_7 \frac{\partial}{\partial x}\Delta F\,. \tag{5}$$

В формулах (2)–(5) для коэффициентов, содержащих упругие постоянные материала пластинки, введены следующие обозначения:

$$D_2 = D\nu + (\varepsilon - \gamma)h\,, \quad D_3 = \frac{D(\gamma+\varepsilon)(5\mu - 7\alpha)(\nu+\eta)}{20\mu\alpha}\,,$$

$$D_4 = D(1-\nu) - 2h\gamma\,, \quad D_5 = (5\mu - 7\alpha)[\frac{h^3(\gamma+\varepsilon)}{120\alpha} + \frac{D}{5h}]\,,$$

$$D_6 = (5\mu - 7\alpha)[\frac{h^3(\gamma+\varepsilon)}{120\alpha} - \frac{D}{5h}]\,, \quad B = \frac{(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)}{8\mu\alpha} - \frac{3D(3\alpha - 5\mu)}{40h\mu\alpha}\,.$$

Срединную плоскость пластины представим в виде совокупности $\overline{n}$ конечных элементов прямоугольных форм. Узловые значения функции F^s, а также ее производных $\partial F^s / \partial x$, $\partial F^s / \partial y$ и $\partial^2 F^s / \partial x \partial y$ для *s*–го конечного элемента в плоскости xy зададим вектором $F^s = (F_1^s, F_2^s, ..., F_{16}^s)^T$.

Схематическое изображение s –го конечного элемента в плоскости xy приведено на рис.

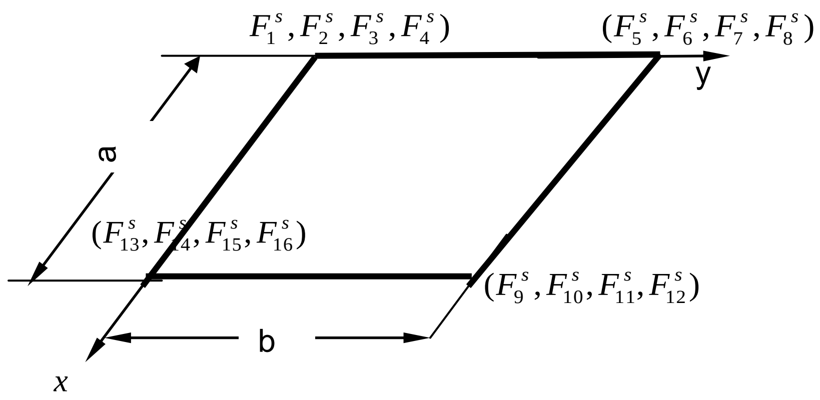

Рис. Схематическое изображение прямоугольного конечного элемента пластины

Функцию F^s аппроксимируем бикубическим полиномом, содержащим 16 неизвестных параметров:

$$F^s(x,y) = \alpha_1^s + \alpha_2^s x + \alpha_3^s y + \alpha_4^s x^2 + \alpha_5^s xy + \alpha_6^s y^2 + \alpha_7^s x^3 + \alpha_8^s x^2 y +$$
$$+ \alpha_9^s xy^2 + \alpha_{10}^s y^3 + \alpha_{11}^s x^3 y + \alpha_{12}^s xy^3 + \alpha_{13}^s x^2 y^2 + \alpha_{14}^s x^2 y^3 + \alpha_{15}^s x^3 y^2 + \alpha_{16}^s x^3 y^3\,, \tag{6}$$

который заменим удобным для практического использования следующим выражением:

$$F^s(x,y) = \sum_{i=1}^{16} F_i^s \Phi_i(x,y)\,. \tag{7}$$

Здесь $F_i^s, i \in \{1,2,...,16\}$ –узловые значения функции F^s и ее производных s–го конечного элемента, которые для прямоугольного конечного элемента определяются соотношениями

$$F_1^s = F^s(0,0)\,, \quad F_2^s = \frac{\partial F^s}{\partial x}(0,0)\,, \quad F_3^s = \frac{\partial F^s}{\partial y}(0,0)\,, \quad F_4^s = \frac{\partial^2 F^s}{\partial x \partial y}(0,0)\,,$$

$$F_5^s = F^s(0,b)\,,\quad F_6^s = \frac{\partial F^s}{\partial x}(0,b)\,,\quad F_7^s = \frac{\partial F^s}{\partial y}(0,b)\,,\quad F_8^s = \frac{\partial^2 F^s}{\partial x \partial y}(0,b)\,,$$

$$F_9^s = F^s(a,b)\,,\quad F_{10}^s = \frac{\partial F^s}{\partial x}(a,b)\,,\quad F_{11}^s = \frac{\partial F^s}{\partial y}(a,b)\,,\quad F_{12}^s = \frac{\partial^2 F^s}{\partial x \partial y}(a,b)\,, \tag{8}$$

$$F_{13}^s = F^s(a,0)\,,\quad F_{14}^s = \frac{\partial F^s}{\partial x}(a,0)\,,\quad F_{15}^s = \frac{\partial F^s}{\partial y}(a,0)\,,\quad F_{16}^s = \frac{\partial^2 F^s}{\partial x \partial y}(a,0)\,,$$

$\Phi_i^s(x,y)$ – функции Эрмита.

Исходя из связей (6), выражение для каждой j – й функции Эрмита $\Phi_j(x,y)$ ищем в виде

$$\Phi_j^s(x,y) = \alpha_{1j}^s + \alpha_{2j}^s x + \alpha_{3j}^s y + \alpha_{4j}^s x^2 + \alpha_{5j}^s xy + \alpha_{6j}^s y^2 + \alpha_{7j}^s x^3 + \alpha_{8j}^s x^2 y + \alpha_{9j}^s xy^2 +$$
$$+ \alpha_{10j}^s y^3 + \alpha_{11j}^s x^3 y + \alpha_{12j}^s xy^3 + \alpha_{13j}^s x^2 y^2 + \alpha_{14j}^s x^2 y^3 + \alpha_{15j}^s x^3 y^2 + \alpha_{16j}^s x^3 y^3\,.$$

Подставляя его в условия (8) и решая полученную систему уравнений, находим α_{ji}^s, а, следовательно, и $\Phi_j^s(x,y)$. При $\xi = x/a, \quad \eta = y/b$ получаем

$$\Phi_1^s(\xi,\eta) = 1 - 3\xi^2 - 3\eta^2 + 2\xi^3 + 2\eta^3 + 9\xi^2\eta^2 - 6\xi^2\eta^3 - 6\xi^3\eta^2 + 4\xi^3\eta^3\,,$$
$$\Phi_2^s(\xi,\eta) = b(\eta - 2\eta^2 - 3\xi^2\eta + \eta^3 + 2\xi^3\eta + 6\xi^2\eta^2 - 3\xi^2\eta^3 - 4\xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta^3)\,,$$
$$\Phi_3^s(\xi,\eta) = a(-\xi + 2\xi^2 - \xi^3 + 3\xi\eta^2 - 2\xi\eta^3 - 6\xi^2\eta^2 + 4\xi^2\eta^3 + 3\xi^3\eta^2 - 2\xi^3\eta^3)\,,$$
$$\Phi_4^s(\xi,\eta) = ab(\xi\eta - 2\xi^2\eta - 2\xi\eta^2 + \xi^3\eta + \xi\eta^3 + 4\xi^2\eta^2 - 2\xi^2\eta^3 - 2\xi^3\eta^2 + \xi^3\eta^3)\,,$$
$$\Phi_5^s(\xi,\eta) = 3\eta^2 - 2\eta^3 - 9\xi^2\eta^2 + 6\xi^2\eta^3 + 6\xi^3\eta^2 - 4\xi^3\eta^3\,,$$
$$\Phi_6^s(\xi,\eta) = b(-\eta^2 + \eta^3 + 3\xi^2\eta^2 - 3\xi^2\eta^3 - 2\xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta^3)\,,$$
$$\Phi_7^s(\xi,\eta) = a(-3\xi\eta^2 + 2\xi\eta^3 + 6\xi^2\eta^2 - 4\xi^2\eta^3 - 3\xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta^3)\,,$$
$$\Phi_8^s(\xi,\eta) = ab(-\xi\eta^2 + \xi\eta^3 + 2\xi^2\eta^2 - 2\xi^2\eta^3 - \xi^3\eta^2 + \xi^3\eta^3)\,,$$
$$\Phi_9^s(\xi,\eta) = 9\xi^2\eta^2 - 6\xi^2\eta^3 - 6\xi^3\eta^2 + 4\xi^3\eta^3\,, \tag{9}$$
$$\Phi_{10}^s(\xi,\eta) = b(-3\xi^2\eta^2 + 3\xi^2\eta^3 + 2\xi^3\eta^2 - 2\xi^3\eta^3)\,,$$
$$\Phi_{11}^s(\xi,\eta) = a(3\xi^2\eta^2 - 2\xi^2\eta^3 - 3\xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta^3)\,,$$
$$\Phi_{12}^s(\xi,\eta) = ab(\xi^2\eta^2 - \xi^2\eta^3 - \xi^3\eta^2 + \xi^3\eta^3)\,,$$
$$\Phi_{13}^s(\xi,\eta) = 3\xi^2 - 2\xi^3 - 9\xi^2\eta^2 + 6\xi^2\eta^3 + 6\xi^3\eta^2 - 4\xi^3\eta^3\,,$$
$$\Phi_{14}^s(\xi,\eta) = b(3\xi^2\eta - 2\xi^3\eta - 6\xi^2\eta^2 + 3\xi^2\eta^3 + 4\xi^3\eta^2 - 2\xi^3\eta^3)\,,$$
$$\Phi_{15}^s(\xi,\eta) = a(\xi^2 - \xi^3 - 3\xi^2\eta^2 + 2\xi^2\eta^3 + 3\xi^3\eta^2 - 2\xi^3\eta^3)\,,$$
$$\Phi_{16}^s(\xi,\eta) = ab(-\xi^2\eta + \xi^3\eta + 2\xi^2\eta^2 - \xi^2\eta^3 - 2\xi^3\eta^2 + \xi^3\eta^3)\,.$$

Исходя из выражения энергии деформации полученного в микрополярной теории пластин на основании расширенной гипотезы [2], находим значение потенциальной энергии изгиба s-го прямоугольного элемента

$$\Omega_s=\frac{1}{2}\int\limits_0^a\int\limits_0^b[D_1(\Delta F)^2+2(D_2-D_1)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-(D_3-D_2B)(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \Delta F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \Delta F}{\partial x^2})+$$

$$+D_1B(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \Delta F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \Delta F}{\partial y^2})-2D_3B\frac{\partial^2 \Delta F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \Delta F}{\partial y^2}-2D_4(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y})^2-$$

$$-(D_5+D_6+2D_4B)\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 \Delta F}{\partial x\partial y}-(D_5+D_6+2B)(\frac{\partial^2 \Delta F}{\partial x\partial y})^2]dxdy. \quad (10)$$

Подставляя значения $F^s(x,y)$ из выражения (7) в (10), потенциальную энергию изгиба s-го конечного элемента пластины представим в виде

$$\overline{\Omega}_s=0{,}5(F^s)^T k^s F^s, \quad (11)$$

где $k^s=\left\|k_{ij}^s\right\|$ –матрица жесткости, компоненты которой для приведенного на рисунке прямоугольного конечного элемента определяются формулой

$$k_{ij}^s=\int\limits_0^a\int\limits_0^b\left\{\nabla^2\Phi_i^s\nabla^2\Phi_j^s+(D_2-D_1)(\frac{\partial^2\Phi_i^s}{\partial x^2}\frac{\partial^2\Phi_j^s}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi_i^s}{\partial y^2}\frac{\partial^2\Phi_j^s}{\partial x^2})-\right.$$

$$-\frac{1}{2}(D_3-D_2B)(\frac{\partial^2\Phi_i^s}{\partial x^2}\frac{\partial^2\Delta\Phi_j^s}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Delta\Phi_i^s}{\partial y^2}\frac{\partial^2\Phi_j^s}{\partial x^2})+\frac{1}{2}D_1B(\frac{\partial^2\Phi_i^s}{\partial x^2}\frac{\partial^2\Delta\Phi_j^s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Delta\Phi_i^s}{\partial x^2}\frac{\partial^2\Phi_j^s}{\partial x^2})-$$

$$-\frac{1}{2}(D_3-D_2B)(\frac{\partial^2\Phi_i^s}{\partial y^2}\frac{\partial^2\Delta\Phi_j^s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Delta\Phi_i^s}{\partial x^2}\frac{\partial^2\Phi_j^s}{\partial y^2})+\frac{1}{2}D_1B(\frac{\partial^2\Phi_i^s}{\partial y^2}\frac{\partial^2\Delta\Phi_j^s}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Delta\Phi_i^s}{\partial y^2}\frac{\partial^2\Phi_j^s}{\partial y^2})-$$

$$-D_3B(\frac{\partial^2\Delta\Phi_i^s}{\partial x^2}\frac{\partial^2\Delta\Phi_j^s}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Delta\Phi_i^s}{\partial y^2}\frac{\partial^2\Delta\Phi_j^s}{\partial x^2})-D_4\frac{\partial^2\Phi_i^s}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\Phi_j^s}{\partial x\partial y}-$$

$$\left.-\frac{1}{2}(D_5+D_6+2D_4B)(\frac{\partial^2\Phi_i^s}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\Delta\Phi_j^s}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\Delta\Phi_i^s}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\Phi_j^s}{\partial x\partial y})-2\frac{\partial^2\Delta\Phi_i^s}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\Delta\Phi_j^s}{\partial x\partial y}\right\}dxdy.$$

Пусть на поверхность конечного элемента действует распределенная внешняя нагрузка интенсивностью $q(x,y)$. Работа этих сил для s-го конечного элемента пластины определяется по формуле

$$\hat{\Omega}^s=\int\limits_F q(x,y)w^s(x,y)dxdy.$$

Предположив, что в пределах площади конечного элемента $q(x,y)=q=const$, с учетом связей (3) для прямоугольного конечного элемента находим

$$\hat{\Omega}^s=q\int\limits_0^a\int\limits_0^b(F^s-\Delta F^s)dxdy.$$

С учетом формул (7) и (9) определяем

$$\hat{\Omega}^s=(F^s)^T P^s, \quad (12)$$

где $P^s=(P_1^s,P_2^s,...,P_{16}^s)^T$ – вектор узловых нагрузок, эквивалентный внешней нагрузке

$$P_i^s = q\int_0^a\int_0^b (F_i^s - \Delta F_i^s)dxdy .$$

Откуда, с учетом связей (7), для прямоугольного конечного элемента находим

$$P^s = \frac{qab}{4}(1,\frac{b}{6},-\frac{a}{6},\frac{ab}{36},1,-\frac{b}{6},\frac{a}{6},-\frac{ab}{36},1,-\frac{b}{6},\frac{a}{6},\frac{ab}{36},1,\frac{b}{6},-\frac{a}{6},-\frac{ab}{36})^T -$$

$$-\frac{qA}{2}(0,-\frac{1}{b},\frac{1}{a},-\frac{b}{6a}-\frac{a}{6b},0,\frac{1}{b},\frac{1}{a},\frac{b}{6a}+\frac{a}{6b},0,\frac{1}{b},-\frac{1}{a},-\frac{b}{6a}-\frac{a}{6b},0,-\frac{1}{b},-\frac{1}{a},\frac{b}{6a}+\frac{a}{6b})^T \quad .$$

Принимая во внимание формулы (11) и (12), находим потенциальную энергию системы для s –го конечного элемента

$$\Omega^s = \overline{\Omega}^s - \hat{\Omega}^s = 0{,}5(F^s)^T k_s F^s - (F^s)^T P^s .$$

Исходя из принципа минимума потенциальной энергии системы, для определения искомых векторов $F^s, s \in \{1,2,...,\overline{n}\}$ получим следующую задачу квадратичного программирования:

$$\min\left\{\sum_{s=1}^{\overline{n}}(0{,}5(F^s)^T k^s F^s - (F^s)^T P^s) \mid \text{краевые условия}\right\}.$$

Узловые значения нормального перемещения $w(x,y)$ и компонент тензора поворота ω_1 и ω_2 $\Psi_i^s = (w_i^s, \omega_{1,i}^s, \omega_{2,i}^s)^T, i \in \{1,2,3,4\}$ для s –го прямоугольного конечного элемента обозначим вектором $\Psi^s = (\Psi_1^s, \Psi_2^s,..., \Psi_{12}^s)^T$. Принимая во внимание соотношения (8) и (10), из формул нормального перемещения и компонент тензора поворота (1) и (5) находим

$$\Psi^s = \psi^s F^s , \tag{13}$$

где $\psi^s = \left\|\psi_1^s \middle| \psi_2^s\right\|$ - матрица нормального перемещения и компонент тензора поворота.

Узловые значения изгибающих, крутящих моментов и перерезывающих сил $R_i^s = (M_{x,i}^s, M_{y,i}^s, M_{xy,i}^s, M_{yx,i}^s, R_{x,i}^s, R_{y,i}^s)^T, i \in \{1,2,3,4\}$ для s –го прямоугольного конечного элемента обозначим вектором $M^s = (M_1^s, M_2^s,..., M_{24}^s)^T$. Принимая во внимание соотношения (8) и (10), из формул изгибающих, крутящих моментов и перерезывающих сил (2)– (4) находим

$$M^s = \delta^s F^s , \tag{14}$$

где $\delta^s = \left\|\delta_1^s \middle| \delta_2^s \middle| \delta_3^s \middle| \delta_4^s\right\|$ – матрица изгибающих, крутящих моментов и перерезывающих сил.

Значения матриц ψ_1^s, ψ_2^s и $\delta_i^s, i \in \{1,2,3,4\}$ задаются следующими соотношениями:

$$\psi_1^s = \left\| \begin{matrix} 1+\frac{6A}{a^2}+\frac{6A}{b^2} & \frac{4A}{b} & -\frac{4A}{a} & 0 & -\frac{6A}{b^2} & \frac{2A}{b} & 0 & 0 \\ -\frac{6A}{b^2} & -\frac{2A}{b} & 0 & 0 & 1+\frac{6A}{a^2}+\frac{6A}{b^2} & -\frac{4A}{b} & -\frac{4A}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6A}{a^2} & 0 & \frac{2A}{a} & 0 \\ -\frac{6A}{a^2} & 0 & -\frac{2A}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{12B}{b^3} & 1-\frac{6B}{a^2}+\frac{6B}{b^2} & 0 & -\frac{4B}{a} & -\frac{12B}{b^3} & \frac{6B}{b^2} & 0 & 0 \\ \frac{12B}{b^3} & \frac{6B}{b^2} & 0 & 0 & -\frac{12B}{b^3} & 1-\frac{6B}{a^2}+\frac{6B}{b^2} & 0 & -\frac{4B}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6B}{a^2} & 0 & \frac{2B}{a} \\ 0 & \frac{6B}{a^2} & 0 & \frac{2B}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{12B}{a^3} & 0 & \frac{6B}{b^2}-1-\frac{6B}{a^2} & -\frac{4B}{b} & 0 & 0 & -\frac{6B}{b^2} & -\frac{2B}{a} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2B}{b} & \frac{12B}{a^3} & 0 & \frac{6B}{b^2}-1-\frac{6B}{a^2} & \frac{4B}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12B}{a^3} & 0 & -\frac{6B}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6B}{a^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|;$$

$$\psi_2^s = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6A}{a^2} & 0 & -\frac{2A}{a} & 0 \\ -\frac{6A}{a^2} & 0 & -\frac{2A}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6A}{a^2}+\frac{6A}{b^2} & -\frac{4A}{b} & 1+\frac{4A}{a} & 0 & -\frac{6A}{b^2} & -\frac{2A}{b} & 0 & 0 \\ -\frac{6A}{b^2} & \frac{2A}{b} & 0 & 0 & \frac{6A}{a^2}-\frac{6A}{b^2} & \frac{4A}{b} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6B}{a^2} & 0 & -\frac{2B}{a} \\ 0 & -\frac{6B}{a^2}+\frac{6B}{b^2} & 0 & -\frac{2B}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{12B}{b^3} & 1-\frac{6B}{a^2}+\frac{6B}{b^2} & 0 & \frac{4B}{a} & \frac{12B}{b^3} & \frac{6B}{b^2} & 0 & 0 \\ -\frac{12B}{b^3} & \frac{6B}{b^2} & 0 & 0 & \frac{12B}{b^3} & 1-\frac{6B}{a^2}+\frac{6B}{b^2} & 0 & \frac{4B}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12B}{a^3} & 0 & -\frac{6B}{a^2} & 0 \\ -\frac{12B}{a^3} & 0 & -\frac{6B}{a^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{12B}{a^3} & 0 & \frac{6B}{b^2}-1-\frac{6B}{a^2} & \frac{2B}{b} & 0 & 0 & -\frac{6B}{b^2} & \frac{2B}{b} \\ 0 & 0 & -\frac{6B}{b^2} & -\frac{4B}{b} & -\frac{12B}{a^3} & 0 & \frac{6B}{b^2}-1-\frac{6B}{a^2} & -\frac{4B}{b} \end{matrix} \right\|;$$

$$
\delta_1^s = \begin{Vmatrix}
\frac{6D_1}{a^2}+\frac{6D_2}{b^2}+\frac{36D_3}{a^2b^2} & -\frac{4D_2}{b}+\frac{24D_3}{a^2b} & \frac{4D_2}{a}-\frac{24D_3}{ab^2} & \frac{16D_3}{ab} \\
-\frac{6D_2}{b^2}-\frac{36D_3}{a^2b^2} & \frac{2D_2}{b}-\frac{12D_3}{a^2b} & \frac{24D_3}{ab^2} & -\frac{8D_3}{ab} \\
\frac{36D_3}{a^2b^2} & \frac{12D_3}{a^2b} & -\frac{12D_3}{ab^2} & \frac{4D_3}{ab} \\
-\frac{6D_1}{a^2}-\frac{36D_3}{a^2b^2} & -\frac{24D_3}{a^2b} & -\frac{2D_2}{a}+\frac{12D_3}{ab^2} & -\frac{8D_3}{ab} \\
\frac{6D_1}{b^2}+\frac{6D_2}{a^2}+\frac{36D_3}{a^2b^2} & \frac{4D_1}{b}+\frac{24D_3}{a^2b} & -\frac{4D_2}{a}-\frac{24D_3}{ab^2} & \frac{16D_3}{ab} \\
-\frac{6D_1}{b^2}-\frac{36D_3}{a^2b^2} & -\frac{2D_1}{b}-\frac{12D_3}{a^2b} & \frac{24D_3}{ab^2} & -\frac{8D_3}{ab} \\
\frac{36D_3}{a^2b^2} & \frac{12D_3}{a^2b} & -\frac{12D_3}{ab^2} & \frac{4D_3}{ab} \\
-\frac{6D_2}{a^2}-\frac{36D_3}{a^2b^2} & -\frac{24D_3}{a^2b} & \frac{2D_2}{a}+\frac{12D_3}{ab^2} & -\frac{8D_3}{ab} \\
0 & \frac{12D_5}{a^3} & -\frac{12D_5}{b^3} & \frac{6D_5}{a^2}+\frac{6D_6}{b^2} \\
0 & 0 & -\frac{12D_5}{b^3} & \frac{6D_5}{b^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
D_4 & \frac{12D_5}{a^3} & 0 & \frac{6D_5}{a^2} \\
0 & \frac{12D_6}{a^3} & -\frac{12D_6}{b^3} & \frac{6D_6}{a^2}+\frac{6D_6}{b^2} \\
0 & 0 & -\frac{12D_6}{b^3} & \frac{6D_6}{b^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
D_4 & \frac{12D_6}{a^3} & 0 & \frac{6D_6}{a^2} \\
-\frac{12D_1}{a^3}+\frac{72D_5}{a^3b^2} & \frac{48D_5}{a^3b} & \frac{6D_1}{a^2}-\frac{6D_1}{b^2}-\frac{6D_4}{b^2}-\frac{36D_5}{a^2b^2} & \frac{4D_1}{b}+\frac{4D_4}{b}+\frac{24D_5}{a^2b} \\
-\frac{72D_5}{a^3b^2} & -\frac{24D_5}{a^3b} & \frac{6D_4}{b^2}+\frac{36D_5}{a^2b^2} & -\frac{2D_1}{b}-\frac{2D_4}{b}-\frac{12D_5}{a^2b} \\
-\frac{72D_5}{a^3b^2} & -\frac{24D_5}{a^3b} & \frac{36D_5}{a^2b^2} & -\frac{12D_5}{a^2b} \\
\frac{72D_5}{a^3b^2} & \frac{48D_5}{a^3b} & \frac{6D_1}{a^2}-\frac{36D_5}{a^2b^2} & \frac{24D_5}{a^2b} \\
-\frac{12D_1}{b^3}+\frac{72D_6}{a^2b^3} & \frac{6D_1}{a^2}-\frac{6D_1}{b^2}+\frac{6D_4}{a^2}+\frac{36D_6}{a^2b^2} & -\frac{48D_6}{ab^3} & \frac{4D_1}{a}+\frac{4D_4}{a}+\frac{24D_6}{ab^2} \\
-\frac{12D_1}{b^3}+\frac{72D_6}{a^2b^3} & -\frac{6D_1}{b^2}+\frac{36D_6}{a^2b^2} & -\frac{48D_6}{ab^3} & \frac{24D_6}{ab^2} \\
-\frac{72D_6}{a^2b^3} & -\frac{36D_6}{a^2b^2} & \frac{24D_6}{ab^3} & -\frac{12D_6}{ab^2} \\
\frac{72D_6}{a^2b^3} & -\frac{6D_1}{a^2}-\frac{6D_4}{a^2}-\frac{36D_6}{a^2b^2} & \frac{24D_6}{ab^3} & -\frac{2D_1}{a}-\frac{2D_4}{a}-\frac{12D_6}{ab^2}
\end{Vmatrix}
$$

$$
\delta_2^s = \left\| \begin{array}{cccc}
-\frac{6D_2}{b^2}-\frac{36D_3}{a^2b^2} & \frac{2D_2}{b}+\frac{12D_3}{a^2b} & \frac{24D_3}{ab^2} & \frac{8D_3}{ab} \\
\frac{6D_1}{a^2}+\frac{6D_2}{b^2}+\frac{36D_3}{a^2b^2} & -\frac{4D_2}{b}-\frac{24D_3}{a^2b} & -\frac{4D_1}{a}-\frac{24D_3}{ab^2} & -\frac{16D_3}{ab} \\
-\frac{6D_1}{a^2}-\frac{36D_3}{a^2b^2} & \frac{24D_3}{a^2b} & \frac{2D_1}{a}+\frac{12D_3}{ab^2} & \frac{8D_3}{ab} \\
\frac{36D_3}{a^2b^2} & -\frac{12D_3}{a^2b} & -\frac{12D_3}{ab^2} & -\frac{4D_3}{ab} \\
-\frac{6D_1}{b^2}-\frac{36D_3}{a^2b^2} & \frac{2D_1}{b}+\frac{12D_3}{a^2b} & \frac{24D_3}{ab^2} & \frac{8D_3}{ab} \\
\frac{6D_1}{b^2}+\frac{6D_2}{a^2}+\frac{36D_3}{a^2b^2} & -\frac{4D_1}{b}-\frac{24D_3}{a^2b} & -\frac{4D_2}{a}-\frac{24D_3}{ab^2} & -\frac{16D_3}{ab} \\
-\frac{6D_2}{a^2}-\frac{36D_3}{a^2b^2} & \frac{24D_3}{a^2b} & \frac{2D_2}{a}+\frac{12D_3}{ab^2} & \frac{8D_3}{ab} \\
\frac{36D_3}{a^2b^2} & -\frac{12D_3}{a^2b} & -\frac{12D_3}{ab^2} & -\frac{4D_3}{ab} \\
0 & 0 & \frac{12D_5}{b^3} & \frac{6D_5}{b^2} \\
0 & \frac{12D_5}{a^3} & \frac{12D_5}{b^3} & \frac{6D_5}{a^2}+\frac{6D_5}{b^2} \\
0 & \frac{12D_5}{a^3} & 0 & \frac{6D_5}{a^2} \\
0 & D_4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{12D_6}{b^3} & \frac{6D_6}{b^2} \\
0 & \frac{12D_6}{a^3} & \frac{12D_6}{b^3} & \frac{6D_6}{a^2}+\frac{6D_6}{b^2} \\
0 & \frac{12D_6}{a^3} & 0 & \frac{6D_6}{a^2} \\
0 & D_4 & 0 & 0 \\
-\frac{72D_5}{a^3b^2} & \frac{24D_5}{a^3b} & \frac{6D_1}{a^2}-\frac{6D_4}{b^2}+\frac{36D_5}{a^2b^2} & \frac{2D_1}{b}+\frac{4D_4}{b}+\frac{12D_5}{a^2b} \\
-\frac{12D_1}{a^3}+\frac{72D_5}{a^3b^2} & -\frac{48D_5}{a^3b} & \frac{6D_1}{a^2}-\frac{6D_1}{b^2}+\frac{6D_4}{b^2}-\frac{36D_5}{a^2b^2} & -\frac{4D_1}{b}-\frac{2D_4}{b}-\frac{24D_5}{a^2b} \\
-\frac{12D_1}{a^3}+\frac{72D_5}{a^3b^2} & -\frac{48D_5}{a^3b} & \frac{6D_1}{a^2}-\frac{36D_5}{a^2b^2} & -\frac{24D_5}{a^2b} \\
-\frac{72D_5}{a^3b^2} & \frac{24D_5}{a^3b} & \frac{36D_5}{a^2b^2} & \frac{12D_5}{a^2b} \\
\frac{12D_1}{b^3}-\frac{72D_6}{a^2b^3} & -\frac{6D_1}{b^2}+\frac{36D_6}{a^2b^2} & \frac{48D_6}{ab^3} & \frac{24D_6}{ab^2} \\
\frac{12D_1}{b^3}-\frac{72D_6}{a^2b^3} & \frac{6D_1}{a^2}-\frac{6D_1}{b^2}+\frac{6D_4}{a^2}+\frac{36D_6}{a^2b^2} & \frac{48D_6}{ab^3} & \frac{4D_1}{a}+\frac{4D_4}{a}+\frac{24D_6}{ab^2} \\
\frac{72D_6}{a^2b^3} & -\frac{6D_1}{a^2}-\frac{6D_4}{a^2}-\frac{36D_6}{a^2b^2} & -\frac{24D_6}{ab^3} & -\frac{2D_1}{a}-\frac{D_4}{a}-\frac{12D_6}{ab^2} \\
\frac{72D_6}{a^2b^3} & -\frac{36D_6}{a^2b^2} & -\frac{24D_6}{ab^3} & -\frac{12D_6}{ab^2}
\end{array} \right\|
$$

$$\delta_3^s = \left\| \begin{array}{cccc}
\dfrac{36D_3}{a^2b^2} & -\dfrac{12D_3}{a^2b} & \dfrac{12D_3}{ab^2} & \dfrac{4D_3}{ab} \\
-\dfrac{6D_1}{a^2}-\dfrac{36D_3}{a^2b^2} & \dfrac{24D_3}{a^2b} & -\dfrac{2D_1}{a}-\dfrac{12D_3}{ab^2} & -\dfrac{8D_3}{ab} \\
\dfrac{6D_1}{a^2}+\dfrac{6D_2}{b^2}+\dfrac{36D_3}{a^2b^2} & -\dfrac{4D_2}{b}-\dfrac{24D_3}{a^2b} & \dfrac{4D_1}{a}+\dfrac{24D_3}{ab^2} & \dfrac{16D_3}{ab} \\
-\dfrac{6D_2}{b^2}-\dfrac{36D_3}{a^2b^2} & \dfrac{2D_2}{b}+\dfrac{12D_3}{a^2b} & -\dfrac{24D_3}{ab^2} & -\dfrac{8D_3}{ab} \\
\dfrac{36D_3}{a^2b^2} & -\dfrac{12D_3}{a^2b} & \dfrac{12D_3}{ab^2} & \dfrac{4D_3}{ab} \\
-\dfrac{6D_2}{a^2}-\dfrac{36D_3}{a^2b^2} & \dfrac{24D_3}{a^2b} & -\dfrac{2D_2}{a}-\dfrac{12D_3}{ab^2} & -\dfrac{8D_3}{ab} \\
\dfrac{6D_1}{b^2}+\dfrac{6D_2}{a^2}+\dfrac{36D_3}{a^2b^2} & -\dfrac{4D_1}{b}-\dfrac{24D_3}{a^2b} & \dfrac{4D_2}{a}+\dfrac{24D_3}{ab^2} & \dfrac{16D_3}{ab} \\
-\dfrac{6D_1}{b^2}-\dfrac{36D_3}{a^2b^2} & \dfrac{2D_1}{b}+\dfrac{12D_3}{a^2b} & -\dfrac{24D_3}{ab^2} & -\dfrac{8D_3}{ab} \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\dfrac{12D_5}{a^3} & 0 & \dfrac{6D_5}{a^2} \\
0 & -\dfrac{12D_5}{a^3} & \dfrac{12D_5}{b^3} & \dfrac{6D_5}{a^2}+\dfrac{6D_5}{b^2} \\
0 & 0 & D_4+\dfrac{12D_5}{b^3} & \dfrac{6D_5}{b^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\dfrac{12D_6}{a^3} & 0 & \dfrac{6D_6}{a^2} \\
0 & -\dfrac{12D_6}{a^3} & \dfrac{12D_6}{b^3} & \dfrac{6D_6}{a^2}+\dfrac{6D_6}{b^2} \\
0 & 0 & D_4+\dfrac{12D_6}{b^3} & \dfrac{6D_6}{b^2} \\
\dfrac{72D_5}{a^3b^2} & -\dfrac{24D_5}{a^3b} & \dfrac{36D_5}{a^2b^2} & \dfrac{12D_5}{a^2b} \\
\dfrac{12D_1}{a^3}-\dfrac{72D_5}{a^3b^2} & \dfrac{48D_5}{a^3b} & \dfrac{6D_1}{a^2}-\dfrac{36D_5}{a^2b^2} & -\dfrac{24D_5}{a^2b} \\
\dfrac{12D_1}{a^3}-\dfrac{72D_5}{a^3b^2} & \dfrac{48D_5}{a^3b} & \dfrac{6D_1}{a^2}-\dfrac{6D_1}{b^2}-\dfrac{6D_4}{b^2}-\dfrac{36D_5}{a^2b^2} & -\dfrac{2D_1}{b}-\dfrac{4D_4}{b}-\dfrac{24D_5}{a^2b} \\
\dfrac{72D_5}{a^3b^2} & -\dfrac{24D_5}{a^3b} & \dfrac{6D_1}{b^2}+\dfrac{6D_4}{b^2}+\dfrac{36D_5}{a^2b^2} & \dfrac{4D_1}{b}+\dfrac{2D_4}{b}+\dfrac{12D_5}{a^2b} \\
\dfrac{72D_6}{a^2b^3} & -\dfrac{36D_6}{a^2b^2} & \dfrac{24D_6}{ab^3} & \dfrac{12D_6}{ab^2} \\
\dfrac{72D_6}{a^2b^3} & -\dfrac{6D_1}{a^2}-\dfrac{6D_4}{a^2}-\dfrac{36D_6}{a^2b^2} & \dfrac{24D_6}{ab^3} & \dfrac{2D_1}{a}+\dfrac{2D_4}{a}+\dfrac{12D_6}{ab^2} \\
\dfrac{12D_1}{b^3}-\dfrac{72D_6}{a^2b^3} & \dfrac{6D_1}{a^2}-\dfrac{6D_1}{b^2}+\dfrac{6D_4}{a^2}+\dfrac{36D_6}{a^2b^2} & -\dfrac{48D_6}{ab^3} & -\dfrac{4D_1}{a}-\dfrac{4D_4}{a}-\dfrac{24D_6}{ab^2} \\
\dfrac{12D_1}{b^3}-\dfrac{72D_6}{a^2b^3} & -\dfrac{6D_1}{b^2}+\dfrac{36D_6}{a^2b^2} & -\dfrac{48D_6}{ab^3} & -\dfrac{24D_6}{ab^2}
\end{array} \right\|$$

$$
\delta_4^s = \left\| \begin{array}{cccc}
-\frac{6D_1}{a^2}-\frac{36D_3}{a^2b^2} & -\frac{24D_3}{a^2b} & -\frac{2D_1}{a}-\frac{12D_3}{ab^2} & \frac{8D_3}{ab} \\
\frac{36D_3}{a^2b^2} & \frac{12D_3}{a^2b} & \frac{12D_3}{ab^2} & -\frac{4D_3}{ab} \\
-\frac{6D_2}{b^2}-\frac{36D_3}{a^2b^2} & -\frac{2D_2}{b}-\frac{12D_3}{a^2b} & -\frac{24D_3}{ab^2} & \frac{8D_3}{ab} \\
\frac{6D_1}{a^2}+\frac{6D_2}{b^2}+\frac{36D_3}{a^2b^2} & \frac{4D_2}{b}+\frac{24D_3}{a^2b} & \frac{4D_1}{a}+\frac{24D_3}{ab^2} & -\frac{16D_3}{ab} \\
-\frac{6D_2}{a^2}-\frac{36D_3}{a^2b^2} & -\frac{24D_3}{a^2b} & -\frac{12D_3}{ab^2} & \frac{8D_3}{ab} \\
\frac{36D_3}{a^2b^2} & \frac{12D_3}{a^2b} & -\frac{2D_2}{a}+\frac{12D_3}{ab^2} & -\frac{4D_3}{ab} \\
-\frac{6D_1}{b^2}-\frac{36D_3}{a^2b^2} & -\frac{2D_1}{b}-\frac{12D_3}{a^2b} & -\frac{24D_3}{ab^2} & \frac{8D_3}{ab} \\
\frac{6D_1}{b^2}+\frac{6D_2}{a^2}+\frac{36D_3}{a^2b^2} & \frac{4D_1}{b}+\frac{24D_3}{a^2b} & \frac{4D_2}{a}+\frac{24D_3}{ab^2} & -\frac{16D_3}{ab} \\
0 & -\frac{12D_5}{a^3} & 0 & \frac{6D_5}{a^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{12D_5}{b^3} & \frac{6D_5}{b^2} \\
0 & -\frac{12D_5}{a^3} & -\frac{12D_5}{b^3} & D_4+\frac{6D_5}{a^2}+\frac{6D_5}{b^2} \\
0 & -\frac{12D_6}{a^3} & 0 & \frac{6D_6}{a^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{12D_6}{b^3} & \frac{6D_6}{b^2} \\
0 & -\frac{12D_6}{a^3} & -\frac{12D_6}{b^3} & D_4+\frac{6D_6}{a^2}+\frac{6D_6}{b^2} \\
\frac{12D_1}{a^3}-\frac{72D_5}{a^3b^2} & -\frac{48D_5}{a^3b} & \frac{6D_1}{a^2}-\frac{36D_5}{a^2b^2} & \frac{24D_5}{a^2b} \\
\frac{72D_5}{a^3b^2} & \frac{24D_5}{a^3b} & \frac{36D_5}{a^2b^2} & -\frac{12D_5}{a^2b} \\
\frac{72D_5}{a^3b^2} & \frac{24D_5}{a^3b} & \frac{6D_1}{b^2}+\frac{6D_4}{b^2}+\frac{36D_5}{a^2b^2} & -\frac{2D_1}{b}-\frac{2D_4}{b}-\frac{12D_5}{a^2b} \\
\frac{12D_1}{a^3}-\frac{72D_5}{a^3b^2} & -\frac{48D_5}{a^3b} & \frac{6D_1}{a^2}-\frac{6D_1}{b^2}-\frac{6D_4}{b^2}-\frac{36D_5}{a^2b^2} & \frac{4D_1}{b}+\frac{4D_4}{b}+\frac{24D_5}{a^2b} \\
-\frac{72D_6}{a^2b^3} & -\frac{6D_1}{a^2}-\frac{6D_4}{a^2}-\frac{36D_6}{a^2b^2} & -\frac{24D_6}{ab^3} & \frac{2D_1}{a}+\frac{2D_4}{a}+\frac{12D_6}{ab^2} \\
-\frac{72D_6}{a^2b^3} & -\frac{36D_6}{a^2b^2} & -\frac{24D_6}{ab^3} & \frac{12D_6}{ab^2} \\
-\frac{12D_1}{b^3}+\frac{72D_6}{a^2b^3} & -\frac{6D_1}{b^2}+\frac{36D_6}{a^2b^2} & \frac{48D_6}{ab^3} & -\frac{24D_6}{ab^2} \\
-\frac{12D_1}{b^3}+\frac{72D_6}{a^2b^3} & \frac{6D_1}{a^2}-\frac{6D_1}{b^2}+\frac{6D_4}{a^2}+\frac{36D_6}{a^2b^2} & \frac{48D_6}{ab^3} & -\frac{4D_1}{a}-\frac{4D_4}{a}-\frac{24D_6}{ab^2}
\end{array} \right\|
$$

Рассмотрим три случая граничных условий для прямоугольного конечного элемента пластины.

1. *Край пластинки защемлен.*

Если положить, что любая из сторон $x=0$, $x=a$ или $y=0$, $y=b$ s–го прямоугольного конечного элемента пластины может быть защемленным краем, то для этих сторон соответственно получим:

$$w^s = 0\,|_{y=0,b}\,, \qquad w^s = 0\,|_{x=0,a}\,, \tag{15}$$

$$\omega_1^s = 0\,|_{y=0,b}\,, \qquad \omega_2^s = 0\,|_{x=0,a}\,. \tag{16}$$

Для узловых точек контура срединной плоскости пластины условия (15) и (16) примут вид:

$w^s(0,0)=0$, $w^s(0,b)=0$, на линии $x=0$; $w^s(a,0)=0$, $w^s(a,b)=0$, на линии $x=a$; (17)

$w^s(0,0)=0$, $w^s(a,0)=0$, на линии $y=0$; $w^s(0,b)=0$, $w^s(a,b)=0$, на линии $y=b$; (18)

$\omega_2^s(0,0)=0$, $\omega_2^s(0,b)=0$, на линии $x=0$; $\omega_2^s(a,0)=0$, $\omega_2^s(a,b)=0$, на линии $x=a$; (19)

$\omega_2^s(0,0)=0$, $\omega_2^s(a,0)=0$, на линии $y=0$; $\omega_2^s(0,b)=0$, $\omega_2^s(a,b)=0$, на линии $y=b$. (20)

С учетом равенства (13), условия (17) - (20) записываются в виде

на линии $x=0$ -

$$(1+\frac{6A}{a^2}+\frac{6A}{b^2})F_1^s+\frac{4A}{b}F_2^s-\frac{4A}{a}F_3^s-\frac{6A}{b^2}F_5^s+\frac{2A}{b}F_6^s-\frac{6A}{a^2}F_{13}^s-\frac{2A}{a}F_{15}^s=0\,, \tag{21}$$

$$-\frac{6A}{b^2}F_1^s-\frac{2A}{b}F_2^s+(1+\frac{6A}{a^2}+\frac{6A}{b^2})F_5^s-\frac{4A}{b}F_6^s-\frac{4A}{a}F_7^s-\frac{6A}{a^2}F_9^s-\frac{2A}{a}F_{11}^s=0\,; \tag{22}$$

на линии $x=a$ -

$$-\frac{6A}{a^2}F_1^s-\frac{2A}{a}F_3^s-\frac{6A}{b^2}F_9^s+\frac{2A}{b}F_{10}^s+(\frac{6A}{a^2}+\frac{6A}{b^2})F_{13}^s+\frac{4A}{b}F_{14}^s+F_{15}^s=0\,, \tag{23}$$

$$-\frac{6A}{a^2}F_5^s+\frac{2A}{a}F_7^s+(\frac{6A}{a^2}+\frac{6A}{b^2})F_9^s-\frac{4A}{b}F_{10}^s+(1+\frac{4A}{a})F_{11}^s-\frac{6A}{b^2}F_{13}^s-\frac{2A}{b}F_{14}^s=0\,; \tag{24}$$

на линии $y=0$ -

$$(1+\frac{6A}{a^2}+\frac{6A}{b^2})F_1^s+\frac{4A}{b}F_2^s-\frac{4A}{a}F_3^s-\frac{6A}{b^2}F_5^s+\frac{2A}{b}F_6^s-\frac{6A}{a^2}F_{13}^s-\frac{2A}{a}F_{15}^s=0\,, \tag{25}$$

$$-\frac{6A}{a^2}F_5^s+\frac{2A}{a}F_7^s+(\frac{6A}{a^2}+\frac{6A}{b^2})F_9^s-\frac{4A}{b}F_{10}^s+(1+\frac{4A}{a})F_{11}^s-\frac{6A}{b^2}F_{13}^s-\frac{2A}{b}F_{14}^s=0\,; \tag{26}$$

на линии $y=b$ -

$$-\frac{6A}{b^2}F_1^s-\frac{2A}{b}F_2^s+(1+\frac{6A}{a^2}+\frac{6A}{b^2})F_5^s-\frac{4A}{b}F_6^s-\frac{4A}{a}F_7^s-\frac{6A}{a^2}F_9^s-\frac{2A}{a}F_{11}^s=0\,, \tag{27}$$

$$-\frac{6A}{a^2}F_5^s+\frac{2A}{a}F_7^s+(\frac{6A}{a^2}+\frac{6A}{b^2})F_9^s-\frac{4A}{b}F_{10}^s+(1+\frac{4A}{a})F_{11}^s-\frac{6A}{b^2}F_{13}^s-\frac{2A}{b}F_{14}^s=0\,; \tag{28}$$

на линии $x=0$ -

$$\frac{12B}{a^3}F_1^s+(\frac{6B}{b^2}-\frac{6B}{a^2}-1)F_3^s-\frac{4B}{b}F_4^s-\frac{6B}{b^2}F_7^s-\frac{2B}{a}F_8^s-\frac{12B}{a^3}F_{13}^s-\frac{6B}{a^2}F_{15}^s=0\,,$$

$$\frac{2B}{b}F_1^s+\frac{12B}{a^3}F_5^s+(\frac{6B}{b^2}-\frac{6B}{a^2}-1)F_7^s+\frac{4B}{a}F_8^s-\frac{12B}{a^3}F_9^s-\frac{6B}{a^2}F_{11}^s=0\,;$$

на линии $x=a$ -

$$-\frac{6B}{a^2}F_3^s-\frac{6B}{b^2}F_{11}^s-\frac{4B}{b}F_{12}^s-\frac{12B}{a^3}F_{13}^s+(\frac{6B}{b^2}-\frac{6B}{a^2}-1)F_{15}^s-\frac{4B}{b}F_{16}^s=0\,,$$

$$\frac{12B}{a^3}F_5^s-\frac{6B}{a^2}F_7^s-\frac{12B}{a^3}F_9^s+(\frac{6B}{b^2}-\frac{6B}{a^2}-1)F_{11}^s+\frac{2B}{b}F_{12}^s-\frac{6B}{a^2}F_{15}^s+\frac{2B}{b}F_{16}^s=0\,;$$

на линии $y=0$ -

$$\frac{12B}{b^3}F_1^s+(\frac{6B}{b^2}-\frac{6B}{a^2}+1)F_2^s-\frac{4B}{a}F_4^s-\frac{12B}{b^3}F_5^s+\frac{6B}{b^2}F_6^s+\frac{6B}{a^2}F_{14}^s-\frac{2B}{a}F_{16}^s=0\,,$$

$$\frac{12B}{b^3}F_1^s+(\frac{6B}{b^2}-\frac{6B}{a^2}+1)F_2^s-\frac{4B}{a}F_4^s-\frac{12B}{b^3}F_5^s+\frac{6B}{b^2}F_6^s+\frac{6B}{a^2}F_{14}^s-\frac{2B}{a}F_{16}^s=0\,;$$

на линии $y=b$ -

$$\frac{12B}{b^3}F_1^s+\frac{6B}{b^2}F_2^s-\frac{12B}{b^3}F_5^s+(\frac{6B}{b^2}-\frac{6B}{a^2}+1)F_6^s-\frac{4B}{a}F_8^s+(\frac{6B}{b^2}-\frac{6B}{a^2})F_{10}^s-\frac{2B}{a}F_{12}^s=0\,,$$

$$\frac{6B}{a^2}F_2^s+\frac{2B}{a}F_4^s-\frac{12B}{b^3}F_9^s+\frac{6B}{b^2}F_{10}^s+\frac{12B}{b^3}F_{13}^s+(\frac{6B}{b^2}-\frac{6B}{a^2}+1)F_{14}^s+\frac{4B}{a}F_{16}^s=0\,.$$

2.Свободный край.

По этому краю равны нулю изгибающие моменты и перерезывающие силы. Если положить, что любая из сторон $x=0$, $x=a$ или $y=0$, $y=b$ s–го прямоугольного конечного элемента пластины может быть свободным краем, то для этих сторон, соответственно, получим:

$$M_y^s=0\,|_{x=0,a}\,,\ M_x^s=0\,|_{y=0,b}\,, \qquad (29)$$

$$N_y^s=0\,|_{x=0,a}\,,\ N_x^s=0\,|_{y=0,b}\,. \qquad (30)$$

Для узловых точек контура срединной плоскости пластины условия (29) и (30) примут вид:

$M_y^s(0,0)=0\,,M_y^s(0,b)=0$, на линии $x=0$; $M_y^s(a,0)=0\,,M_y^s(a,b)=0$, на линии $x=a$; (31)

$M_x^s(0,0)=0\,,M_x^s(a,0)=0$, на линии $y=0$; $M_x^s(0,b)=0\,,M_x^s(a,b)=0$, на линии $y=b$; (32)

$N_y^s(0,0)=0$, $N_y^s(0,b)=0$, на линии $x=0$; $N_y^s(a,0)=0\,,N_y^s(a,b)=0$, на линии $x=a$; (33)

$N_x^s(0,0)=0$, $N_x^s(a,0)=0$, на линии $y=0$; $N_x^s(0,b)=0$, $N_x^s(a,b)=0$, на линии $y=b$. (34)

С учетом равенства (14), условия (31) - (34) записываются в виде:

на линии $x=0$ -

$$(\frac{6D_1}{b^2}+\frac{6D_2}{a^2}+\frac{36D_3}{a^2b^2})F_1^s+(\frac{4D_1}{b}+\frac{24D_3}{a^2b})F_2^s-(\frac{4D_2}{a}+\frac{24D_3}{ab^2})F_3^s+\frac{16D_3}{ab}F_4^s-(\frac{6D_1}{b^2}+\frac{36D_3}{a^2b^2})F_5^s+$$

$$+(\frac{2D_1}{b}+\frac{12D_3}{a^2b})F_6^s+\frac{24D_3}{ab^2}F_7^s+\frac{8D_3}{ab}F_8^s+\frac{36D_3}{a^2b^2}F_9^s-\frac{12D_3}{a^2b}F_{10}^s+\frac{12D_3}{ab^2}F_{11}^s+\frac{4D_3}{ab}F_{12}^s-$$

$$-(\frac{6D_2}{a^2}+\frac{36D_3}{a^2b^2})F_{13}^s-\frac{24D_3}{a^2b}F_{14}^s-\frac{12D_3}{ab^2}F_{15}^s+\frac{8D_3}{ab}F_{15}^s=0\,, \qquad (35)$$

$$-(\frac{6D_1}{b^2}+\frac{36D_3}{a^2b^2})F_1^s-(\frac{2D_1}{b}+\frac{12D_3}{a^2b})F_2^s+\frac{24D_3}{ab^2}F_3^s-\frac{8D_3}{ab}F_4^s+(\frac{6D_1}{b^2}+\frac{6D_2}{a^2}+\frac{36D_3}{a^2b^2})F_5^s-$$

$$-(\frac{4D_1}{b}+\frac{24D_3}{a^2b})F_6^s-(\frac{4D_2}{a}+\frac{24D_3}{ab^2})F_7^s-\frac{16D_3}{ab}F_8^s-(\frac{6D_2}{a^2}+\frac{36D_3}{a^2b^2})F_9^s+\frac{24D_3}{a^2b}F_{10}^s-$$

$$-(\frac{2D_2}{a}+\frac{12D_3}{ab^2})F_{11}^s-\frac{8D_3}{ab}F_{12}^s+\frac{36D_3}{a^2b^2}F_{13}^s+\frac{12D_3}{a^2b}F_{14}^s-(\frac{2D_2}{a}-\frac{12D_3}{ab^2})F_{15}^s-\frac{4D_3}{ab}F_{15}^s=0; \qquad (36)$$

на линии $x=a$ -

$$-(\frac{6D_2}{a^2}+\frac{36D_3}{a^2b^2})F_1^s-\frac{24D_3}{a^2b}F_2^s+(\frac{2D_2}{a}+\frac{12D_3}{ab^2})F_3^s-\frac{8D_3}{ab}F_4^s+\frac{36D_3}{a^2b^2}F_5^s-\frac{12D_3}{a^2b}F_6^s-$$

$$-\frac{12D_3}{ab^2}F_7^s-\frac{4D_3}{ab}F_8^s-(\frac{6D_1}{b^2}+\frac{36D_3}{a^2b^2})F_9^s+(\frac{2D_1}{b}+\frac{12D_3}{a^2b})F_{10}^s-\frac{24D_3}{ab^2}F_{11}^s-\frac{8D_3}{ab}F_{12}^s+$$

$$+(\frac{6D_1}{b^2}+\frac{6D_2}{a^2}+\frac{36D_3}{a^2b^2})F_{13}^s+(\frac{4D_1}{b}+\frac{24D_3}{a^2b})F_{14}^s+(\frac{4D_2}{a}+\frac{24D_3}{ab^2})F_{15}^s-\frac{16D_3}{ab}F_{15}^s=0, \qquad (37)$$

$$\frac{36D_3}{a^2b^2}F_1^s+\frac{12D_3}{a^2b}F_2^s-\frac{12D_3}{ab^2}F_3^s+\frac{4D_3}{ab}F_4^s-(\frac{6D_2}{a^2}+\frac{36D_3}{a^2b^2})F_5^s+\frac{24D_3}{a^2b}F_6^s+(\frac{2D_2}{a}+\frac{12D_3}{ab^2})F_7^s+$$

$$+\frac{8D_3}{ab}F_8^s+(\frac{6D_1}{b^2}+\frac{6D_2}{a^2}+\frac{36D_3}{a^2b^2})F_9^s-(\frac{4D_1}{b}+\frac{24D_3}{a^2b})F_{10}^s+(\frac{4D_2}{a}+\frac{24D_3}{ab^2})F_{11}^s+\frac{16D_3}{ab}F_{12}^s-$$

$$-(\frac{6D_1}{b^2}+\frac{36D_3}{a^2b^2})F_{13}^s-(\frac{2D_1}{b}+\frac{12D_3}{a^2b}F_{14}^s-\frac{12D_3}{ab^2}F_{15}^s+\frac{8D_3}{ab}F_{15}^s=0; \qquad (38)$$

на линии $y=0$ -

$$(\frac{6D_1}{a^2}+\frac{6D_2}{b^2}+\frac{36D_3}{a^2b^2})F_1^s-(\frac{4D_2}{b}-\frac{24D_3}{a^2b})F_2^s+(\frac{4D_2}{a}-\frac{24D_3}{ab^2})F_3^s+\frac{16D_3}{ab}F_4^s-(\frac{6D_2}{b^2}+\frac{36D_3}{a^2b^2})F_5^s+$$

$$+(\frac{2D_2}{b}+\frac{12D_3}{a^2b})F_6^s+\frac{24D_3}{ab^2}F_7^s+\frac{8D_3}{ab}F_8^s+\frac{36D_3}{a^2b^2}F_9^s-\frac{12D_3}{a^2b}F_{10}^s+\frac{12D_3}{ab^2}F_{11}^s+\frac{4D_3}{ab}F_{12}^s-$$

$$-(\frac{6D_1}{a^2}+\frac{36D_3}{a^2b^2})F_{13}^s-\frac{24D_3}{a^2b}F_{14}^s-(\frac{2D_1}{a}+\frac{12D_3}{ab^2})F_{15}^s+\frac{8D_3}{ab}F_{16}^s=0, \qquad (39)$$

$$-(\frac{6D_2}{b^2}+\frac{36D_3}{a^2b^2})F_1^s+(\frac{2D_2}{b}-\frac{12D_3}{a^2b})F_2^s+\frac{24D_3}{ab^2}F_3^s-\frac{8D_3}{ab}F_4^s+(\frac{6D_1}{a^2}+\frac{6D_2}{b^2}+\frac{36D_3}{a^2b^2})F_5^s-$$

$$-(\frac{4D_2}{b}+\frac{24D_3}{a^2b})F_6^s-(\frac{4D_1}{a}+\frac{24D_3}{ab^2})F_7^s-\frac{16D_3}{ab}F_8^s-(\frac{6D_1}{a^2}+\frac{36D_3}{a^2b^2}F_9^s+\frac{24D_3}{a^2b}F_{10}^s-$$

$$-(\frac{2D_1}{a}+\frac{12D_3}{ab^2})F_{11}^s-\frac{8D_3}{ab}F_{12}^s+\frac{36D_3}{a^2b^2}F_{13}^s+\frac{12D_3}{a^2b}F_{14}^s+\frac{12D_3}{ab^2}F_{15}^s-\frac{4D_3}{ab}F_{16}^s=0; \qquad (40)$$

на линии $y=b$ -

$$-(\frac{6D_1}{a^2}+\frac{36D_3}{a^2b^2})F_1^s-\frac{24D_3}{a^2b}F_2^s-(\frac{2D_2}{a}-\frac{12D_3}{ab^2})F_3^s-\frac{8D_3}{ab}F_4^s+\frac{36D_3}{a^2b^2}F_5^s-\frac{12D_3}{a^2b}F_6^s-$$

$$-\frac{12D_3}{ab^2}F_7^s-\frac{4D_3}{ab}F_8^s-(\frac{6D_2}{b^2}+\frac{36D_3}{a^2b^2})F_9^s+(\frac{2D_2}{b}+\frac{12D_3}{a^2b})F_{10}^s-\frac{24D_3}{ab^2}F_{11}^s-\frac{8D_3}{ab}F_{12}^s+$$

$$+(\frac{6D_1}{a^2}+\frac{6D_2}{b^2}+\frac{36D_3}{a^2b^2})F_{13}^s+(\frac{4D_2}{b}+\frac{24D_3}{a^2b})F_{14}^s+(\frac{4D_1}{a}+\frac{24D_3}{ab^2})F_{15}^s-\frac{16D_3}{ab}F_{16}^s=0, \qquad (41)$$

$$\frac{36D_3}{a^2b^2}F_1^s+\frac{12D_3}{a^2b}F_2^s-\frac{12D_3}{ab^2}F_3^s+\frac{4D_3}{ab}F_4^s-(\frac{6D_1}{a^2}+\frac{36D_3}{a^2b^2})F_5^s+\frac{24D_3}{a^2b}F_6^s+(\frac{2D_1}{a}+\frac{12D_3}{ab^2})F_7^s+$$

$$+\frac{8D_3}{ab}F_8^s+(\frac{6D_1}{a^2}+\frac{6D_2}{b^2}+\frac{36D_3}{a^2b^2})F_9^s-(\frac{4D_2}{b}+\frac{24D_3}{a^2b})F_{10}^s+(\frac{4D_1}{a}+\frac{24D_3}{ab^2})F_{11}^s+$$

$$+\frac{16D_3}{ab}F_{12}^s-(\frac{6D_2}{b^2}+\frac{36D_3}{a^2b^2})F_{13}^s-(\frac{2D_2}{b}+\frac{12D_3}{a^2b})F_{14}^s-\frac{24D_3}{ab^2}F_{15}^s+\frac{8D_3}{ab}F_{16}^s=0; \qquad (42)$$

на линии $x=0$ -

$$-(\frac{12D_1}{b^3}-\frac{72D_6}{a^2b^3})F_1^s+(\frac{6D_1}{a^2}-\frac{6D_1}{b^2}+\frac{6D_4}{a^2}+\frac{36D_6}{a^2b^2})F_2^s-\frac{48D_6}{ab^3}F_3^s+(\frac{4D_1}{a}+\frac{4D_4}{a}+\frac{24D_6}{ab^2})F_4^s+$$

$$+(\frac{12D_1}{b^3}-\frac{72D_6}{a^2b^3})F_5^s-(\frac{6D_1}{b^2}-\frac{36D_6}{a^2b^2})F_6^s+\frac{48D_6}{ab^3}F_7^s+\frac{24D_6}{ab^2}F_8^s+\frac{72D_6}{a^2b^3}F_9^s-\frac{36D_6}{a^2b^2}F_{10}^s+\frac{24D_6}{ab^3}F_{11}^s+$$

$$+\frac{12D_6}{ab^2}F_{12}^s-\frac{72D_6}{a^2b^3}F_{13}^s-(\frac{6D_1}{a^2}+\frac{6D_4}{a^2}+\frac{36D_6}{a^2b^2})F_{14}^s-\frac{24D_6}{ab^3}F_{15}^s+(\frac{2D_1}{a}+\frac{2D_4}{a}+\frac{12D_6}{ab^2})F_{15}^s=0, \qquad (43)$$

$$-(\frac{12D_1}{b^3}-\frac{72D_6}{a^2b^3})F_1^s-(\frac{6D_1}{b^2}-\frac{36D_6}{a^2b^2})F_2^s-\frac{48D_6}{ab^3}F_3^s+\frac{24D_6}{ab^2}F_4^s+(\frac{12D_1}{b^3}-\frac{72D_6}{a^2b^3})F_5^s+(\frac{6D_1}{a^2}-\frac{6D_1}{b^2}+$$

$$+\frac{6D_4}{a^2}+\frac{36D_6}{a^2b^2})F_6^s+\frac{48D_6}{ab^3}F_7^s+(\frac{4D_1}{a}+\frac{4D_4}{a}+\frac{24D_6}{ab^2})F_8^s+\frac{72D_6}{a^2b^3}F_9^s-(\frac{6D_1}{a^2}+\frac{6D_4}{a^2}+\frac{36D_6}{a^2b^2})F_{10}^s+$$

$$+\frac{24D_6}{ab^3}F_{11}^s+(\frac{2D_1}{a}+\frac{2D_4}{a}+\frac{12D_6}{ab^2})F_{12}^s-\frac{72D_6}{a^2b^3}F_{13}^s-\frac{36D_6}{a^2b^2}F_{14}^s-\frac{24D_6}{ab^3}F_{15}^s+\frac{12D_6}{ab^2}F_{15}^s=0; \qquad (44)$$

на линии $x=a$ -

$$\frac{72D_6}{a^2b^3}F_1^s-(\frac{6D_1}{a^2}+\frac{6D_1}{b^2}+\frac{36D_6}{a^2b^2})F_2^s+\frac{24D_6}{ab^3}F_3^s-(\frac{2D_1}{a}+\frac{2D_4}{a}+\frac{12D_6}{ab^2})F_4^s+\frac{72D_6}{a^2b^3}F_5^s-\frac{36D_6}{a^2b^2}F_6^s-$$

$$-\frac{24D_6}{ab^3}F_7^s-\frac{12D_6}{ab^2}F_8^s+(\frac{12D_1}{b^3}-\frac{72D_6}{a^2b^3})F_9^s-(\frac{6D_1}{b^2}-\frac{36D_6}{a^2b^2})F_{10}^s-\frac{48D_6}{ab^3}F_{11}^s-\frac{24D_6}{ab^2}F_{12}^s-$$

$$-(\frac{12D_1}{b^3}-\frac{72D_6}{a^2b^3})F_{13}^s+(\frac{6D_1}{a^2}-\frac{6D_1}{b^2}+\frac{6D_4}{a^2}+\frac{36D_6}{a^2b^2})F_{14}^s+\frac{48D_6}{ab^3}F_{15}^s-(\frac{4D_1}{a}+\frac{4D_4}{a}+\frac{24D_6}{ab^2})F_{15}^s=0, \qquad (45)$$

$$-\frac{72D_6}{a^2b^3}F_1^s-\frac{36D_6}{a^2b^2}F_2^s+\frac{24D_6}{ab^3}F_3^s-\frac{12D_6}{ab^2}F_4^s+\frac{72D_6}{a^2b^3}F_5^s-(\frac{6D_1}{a^2}+\frac{6D_4}{a^2}+\frac{36D_6}{a^2b^2})F_6^s-\frac{24D_6}{ab^3}F_7^s-$$

$$-(\frac{2D_1}{a}+\frac{2D_4}{a}+\frac{12D_6}{ab^2})F_8^s+(\frac{12D_1}{b^3}-\frac{72D_6}{a^2b^3})F_9^s+(\frac{6D_1}{a^2}-\frac{6D_1}{b^2}+\frac{6D_4}{a^2}+\frac{36D_6}{a^2b^2})F_{10}^s-\frac{48D_6}{ab^3}F_{11}^s-$$

$$-(\frac{4D_1}{a}+\frac{4D_4}{a}+\frac{24D_6}{ab^2})F_{12}^s-(\frac{12D_1}{b^3}-\frac{72D_6}{a^2b^3})F_{13}^s-(\frac{6D_1}{b^2}-\frac{36D_6}{a^2b^2})F_{14}^s+\frac{48D_6}{ab^3}F_{15}^s-\frac{24D_6}{ab^2}F_{15}^s=0; \qquad (46)$$

на линии $y=0$ -

$$-(\frac{12D_1}{a^3}-\frac{72D_5}{a^3b^2})F_1^s+\frac{48D_5}{a^3b}F_2^s+(\frac{6D_1}{a^2}-\frac{6D_1}{b^2}-\frac{6D_4}{b^2}-\frac{36D_5}{a^2b^2})F_3^s+(\frac{4D_1}{b}+\frac{4D_4}{b}+\frac{24D_5}{a^2b})F_4^s-$$

$$-\frac{72D_5}{a^3b^2}F_5^s + \frac{24D_5}{a^3b}F_6^s + (\frac{6D_1}{a^2} - \frac{6D_1}{b^2} + \frac{36D_5}{a^2b^2})F_7^s + (\frac{2D_1}{b} + \frac{4D_4}{b} + \frac{12D_5}{a^2b})F_8^s + \frac{72D_6}{a^3b^2}F_9^s - \frac{24D_5}{a^3b}F_{10}^s +$$

$$+\frac{36D_5}{a^2b^2}F_{11}^s + \frac{12D_5}{a^2b}F_{12}^s + (\frac{12D_1}{a^3} - \frac{72D_5}{a^3b^2})F_{13}^s - \frac{48D_5}{a^3b}F_{14}^s + (\frac{6D_1}{a^2} - \frac{36D_5}{a^2b^2})F_{15}^s + \frac{24D_5}{a^2b}F_{15}^s = 0, \quad (47)$$

$$-\frac{72D_5}{a^3b^2}F_1^s + \frac{24D_5}{a^3b}F_2^s + (\frac{6D_4}{b^2} + \frac{36D_5}{a^2b^2})F_3^s - (\frac{2D_1}{b} + \frac{2D_4}{b} + \frac{12D_5}{a^2b})F_4^s - (\frac{12D_1}{a^3} - \frac{72D_5}{a^3b^2})F_5^s -$$

$$-\frac{48D_5}{a^3b}F_6^s + (\frac{6D_1}{a^2} - \frac{6D_1}{b^2} + \frac{6D_4}{b^2} - \frac{36D_5}{a^2b^2})F_7^s - (\frac{4D_1}{b} + \frac{2D_4}{b} + \frac{24D_5}{a^2b})F_8^s + (\frac{12D_1}{a^3} - \frac{72D_5}{a^3b^2})F_9^s +$$

$$+\frac{48D_5}{a^3b}F_{10}^s + (\frac{6D_1}{a^2} - \frac{36D_5}{a^2b^2})F_{11}^s - \frac{24D_5}{a^2b}F_{12}^s + \frac{72D_5}{a^3b^2}F_{13}^s + \frac{24D_5}{a^3b}F_{14}^s + \frac{36D_5}{a^2b^2}F_{15}^s - \frac{12D_5}{a^2b}F_{15}^s = 0; \quad (48)$$

на линии $y = b$ -

$$\frac{72D_5}{a^3b^2}F_1^s + \frac{48D_5}{a^3b}F_2^s + (\frac{6D_1}{a^2} - \frac{36D_5}{a^2b^2})F_3^s + \frac{24D_5}{a^2b}F_4^s - \frac{72D_5}{a^3b^2}F_5^s + \frac{24D_5}{a^3b}F_6^s + \frac{36D_5}{a^2b^2}F_7^s + \frac{12D_5}{a^2b}F_8^s +$$

$$+\frac{72D_6}{a^3b^2}F_9^s - \frac{24D_5}{a^3b}F_{10}^s + (\frac{6D_1}{b^2} + \frac{6D_4}{b^2} + \frac{36D_5}{a^2b^2})F_{11}^s + (\frac{4D_1}{b} + \frac{2D_4}{b} + \frac{12D_5}{a^2b})F_{12}^s + (\frac{12D_1}{a^3} - \frac{72D_5}{a^3b^2})F_{13}^s -$$

$$-\frac{48D_5}{a^3b}F_{14}^s + (\frac{6D_1}{a^2} - \frac{6D_1}{b^2} - \frac{6D_4}{b^2} - \frac{36D_5}{a^2b^2})F_{15}^s + (\frac{4D_1}{b} + \frac{4D_4}{b} + \frac{24D_5}{a^2b})F_{16}^s = 0, \quad (49)$$

$$-\frac{72D_5}{a^3b^2}F_1^s - \frac{24D_5}{a^3b}F_2^s + \frac{36D_5}{a^2b^2}F_3^s - \frac{12D_5}{a^2b}F_4^s - (\frac{12D_1}{a^3} - \frac{72D_5}{a^3b^2})F_5^s - \frac{48D_5}{a^3b}F_6^s + (\frac{6D_1}{a^2} - \frac{36D_5}{a^2b^2})F_7^s -$$

$$-\frac{24D_5}{a^2b}F_8^s + (\frac{12D_1}{a^3} - \frac{72D_5}{a^3b^2})F_9^s + \frac{48D_5}{a^3b}F_{10}^s + (\frac{6D_1}{a^2} - \frac{6D_1}{b^2} - \frac{6D_4}{b^2} - \frac{36D_5}{a^2b^2})F_{11}^s - (\frac{2D_1}{b} + \frac{4D_4}{b} +$$

$$+\frac{24D_5}{a^2b})F_{12}^s + \frac{72D_5}{a^3b^2}F_{13}^s + \frac{24D_5}{a^3b}F_{14}^s + (\frac{6D_1}{b^2} + \frac{6D_4}{b^2} + \frac{36D_5}{a^2b^2})F_{15}^s - (\frac{2D_1}{b} + \frac{2D_4}{b} + \frac{12D_5}{a^2b})F_{16}^s = 0. \quad (50)$$

3.Край пластинки свободно оперт.

В этом случае по этому краю равны нулю прогибы и изгибающие моменты. Такие граничные условия записываются в виде (15) и (29). Для узловых точек контура срединной плоскости пластины условия (15) и (29), соответственно, примут вид (17), (18) и (31), (32). С учетом равенств (12) и (13) условия (17), (18) и (31), (32) записываются в виде (21) – (28) и (35) – (42).

Литература

1. **Амбарцумян С. А.** Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван: НАН РА, 2013. 222 с.

2. **Геворкян Г. А., Варданян С. В.** Об одной модификации уравнений поперечного изгиба пластин с учетом моментных напряжений// Сборник научных трудов ЕГУАС. 2013. Том IV (51). С.119-127.

Գ. Ա. Գևորգյան,
Ս. Վ. Վարդանյան,
Ն. Վ. Փիրումյան,
Ն. Ռ. Մեհրաբեկյան

ՄՈՄԵՆՏԱՅԻՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՌՄԱՄԲ ՍԱԼԵՐԻ ԸՆԴԼԱՅՆԱԿԱՆ ԾՌՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՔԱՌԱՆԿՅՈՒՆԱՁԵՎ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՏԱՐՐԵՐԻ ԵՂԱՆԱԿ

Դիտարկվում է մոմենտային լարումների հաշվառմամբ սալերի ընդլայնական ծռման խնդիրների լուծման քառանկյունաձև վերջավոր տարրերի եղանակ:

Առանցքային բառեր. *վերջավոր տարրեր, հանգուցային տեղափոխություններ, քառակուսային ծրագրավորում, սալ, ծռում:*

G. A.Gevorgyan,
S. V.Vardanyan,
N. V. Pirumyan,
N. R. Mehrabekyan

THE METHOD OF TETRAGONAL FINAL ELEMENTS FOR PLATE BENDING PROBLEM SOLUTION USING THE COUPLE PRESSURE

The method of tetragonal final elements for the solution to plate bending problems using the couple pressure.

Keywords: *final elements, the nodal movement, quadratic programming, plate, bending.*

Работа осуществлена в рамках программы ”Выявление, уточнение, разработка предложений и рекомендаций по внедрению путей устойчивого развития архитектурного и строительного комплексов РА с применением постоянного мониторинга”, по базовому финансированию из госбюджета РА научной и научно-технической деятельности.

Գևորգյան Գագիկ Արշալույսի, ֆ.-մ.գ.դ., պրոֆ. *(ՀՀ, ք. Երևան) – ՃՇՀԱՀ, Ճարտարապետության և շինարարության պրոբլեմային լաբորատորիա, ա.գ.ա., Ինֆորմատիկայի, հաշվողական տեխնիկայի և կառավարման համակարգերի ամբիոն, բջջ. (093)229253, e-mail:gagikgevorgyan2006@yahoo.com,* ***Վարդանյան Սեդրակ Վանիկի, ֆ-մ.գ.թ., դոց.*** *(ՀՀ, ք. Երևան)- ռեկտոր, ԵՄ ՄԷՍԻ,* ***Փիրումյան Նարինե Վիլիկի, տ.գ.թ.*** *(ՀՀ, ք. Երևան) - ՃՇՀԱՀ, Գիտահետազոտական սեկտոր, գիտ. քարտուղար, հեռ. (010)580541, e-mail: science@ysuac.am,* ***Մեհրաբեկյան Նոննա Ռաֆայելի*** *(ՀՀ, ք. Երևան) - ՃՇՀԱՀ, Ճարտարապետության և շինարարության պրոբլեմային լաբորատորիա, կ.գ.ա., բջջ. (095)613045, e-mail:nonna2004n@yahoo.com*

Геворкян Гагик Аршалуйсович, д. ф-м. н., проф. *(РА, г. Ереван)- НУАСА, проблемная лаборатория Архитектуры и строительства, с.н.с., кафедра Информатики, вычислительной техники и систем управления, моб.: (093)229253, e-mail: gagikgevorgyan2006@yahoo.com,* ***Варданян Седрак Ваникович, к.ф-м. н., доц.*** *(РА, г. Ереван)- ректор, ЕФ МЕСИ,* ***Пирумян Нарине Виликовна, к.т.н.*** *(РА, г. Ереван)- НУАСА, Научно-исследователский сектор, ученый секретарь, тел.:(010)580541, e-mail: science@ysuac.am,* ***Мехрабекян Нонна Рафаэловна*** *(РА, г. Ереван)- НУАСА, проблемная лаборатория Архитектуры и строительства, м.н.с., моб. (095)613045, e-mail: nonna2004n@yahoo.com*

Gevorgyan Gagik Arshaluys, doctor of science (engineering) *(RA, Yerevan) – NUACA, Problem Laboratory of Architecture and Construction, senior scientific researcher, Chair of Informatics, Computer Engineering and Management Systems, cell phone: (093)229253, e-mail:gagikgevorgyan2006@yahoo.com,* ***Vardanyan Sedrak Vanik, doctor of Philosophy (Ph.D) in engineering*** *(RA, Yerevan), Yerevan Branch of MESI, rector,* ***Pirumyan Narine Vilik, doctor of Philosophy (Ph.D) in engineering*** *(RA, Yerevan)- NUACA, Scientific Reserch Sector, scientific secretary, cell phone: (010)580541, e-mail: science@ysuac.am,* ***Mehrabekyan Nonna Rafael*** *(RA, Yerevan) - NUACA, Problem Laboratory of Architecture and Construction, junior scientific researcher, cell phone: (095)613045, e-mail: nonna2004n@yahoo.com*

Ներկայացվել է `18.12.2013
Ընդունվել է տպագրության `19.12.2013թ.