УДК 692.115

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ СОСТАВНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРЯЖЕНИЙ ТИПА ТРЕЩИН И ШТАМПОВ НА ПОВЕРХНОСТИ СОСТАВНОГО УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

А.А. Мусаелян
Национальный университет архитектуры и строительства Армении

Ключевые слова: *полупространство, слой, трещина, штамп, сингулярное уравнение.*

Исследуется контактная задача для составного упругого полупространства, деформирующегося в условиях продольного сдвига. Полупространство состоит из упругого бесконечного слоя конечной толщины и контактирующего с ней упругого полупространства с разными модулями сдвига. На границе полупространства приложен жесткий ленточный штамп с плоским основанием и конечной шириной. Контактная линия между слоем и полупространством ослаблена (туннельной) трещиной. Эти данные должны быть сравнены с их допускаемыми значениями для строительных конструкций, вида фундаментов зданий и сооружений, которые есть у различных строительных материалов.

Введение. Рассматриваемая задача относится к классу задач о передаче нагрузок от концентраторов напряжений типа штампов и включений к массивным кусочно – однородным телам. В виду актуальности и значимости этих задач при теоретических исследованиях в различных расчетах инженерной практики существует огромное количество работ, посвященных изучению контактных и смешанных задач подобного рода. Здесь укажем лишь некоторые работы [1-5] и цитированное в них огромное количество библиографии, связанной с рассматриваемой задачей.

В общей постановке рассматривается контактная задача для составного полупространства, состоящая из упругого полупространства и жестко контактирующего с ней упругого бесконечного слоя конечной толщины с разными модулями сдвига.

Постановка задачи и вывод определяющих уравнений. Пусть составное полупространство, отнесенное к декартовой системе координат *Oxyz*, состоит из упругого бесконечного слоя толщины h *и* контактирующего с ним упругого полупространства. Слой занимает область $\Omega_1(|x,\ z|<\infty,\ -h<y<0)$ и имеет модуль сдвига G_1, а полупространство с модулем G_2 занимает область $\Omega_2(|x,\ z|<\infty,\ 0<y<\infty)$. Слой по полосе $\omega_1(x=0<\infty, -d<y<-c, |z|<\infty)$, содержит жесткую полосу – включение, находящееся в полном контакте со слоем, а по полосе $\omega_2(-l_1\le x\le l_2, y<-h,\ |z|<\infty)$ поверхности слоя прикреплен жесткий ленточный штамп (рис. 1).

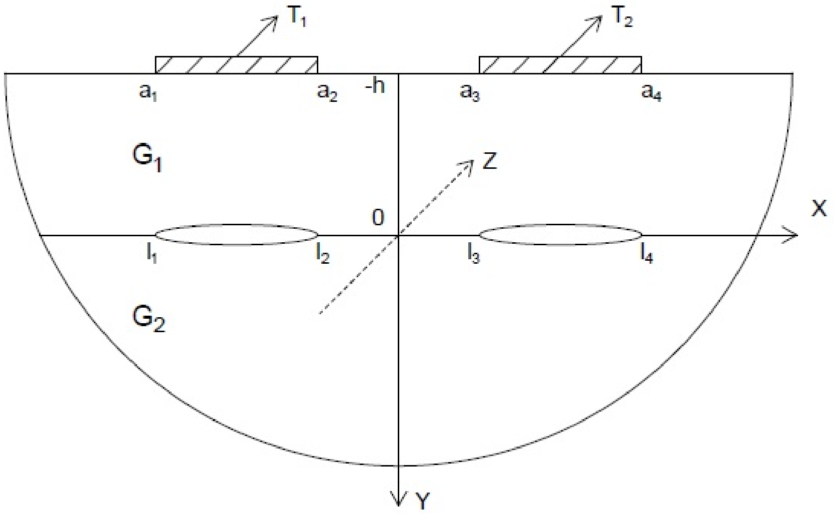

Рис. 1. Составное упругое полупространство с трещинами и штампами на поверхности составного полупространства

Внешние воздействия в виде касательных сил могут быть приложены к штампу, а также к свободной поверхности слоя вне полосы штампа. Требуется определить напряженное состояние в составном полупространстве, а также основные характеристики контактных напряжений, возникающие под штампом.

Решение поставленной задачи математически сводится к следующей краевой задаче для двумерного уравнения Лапласа в областях Ω_1^* и Ω_2^* на базовой плоскости Oxy:

$$\Delta w_j(x;y) = 0;\ (x;y) \in \Omega_1^*;\ \Omega_1^*(|x| < \infty;\ -h < y < 0);\ \Omega_1^*(|x| < \infty;\ 0 < y < \infty); \qquad (1)$$

$$\left.\frac{\partial w_1(x,y)}{\partial y}\right|_{y=-0} = \tau^-{}_{2N-1;N}(x);\ l_{2N-1} < x < l_N;\ \left.\frac{\partial w_1(x,y)}{\partial x}\right|_{y=-h} = 0;\ a_{2N-1} < x < a_N;\ N = 1;2; \qquad (2)$$

при условиях исчезновения напряжений на бесконечности и полного контакта на линии $y = 0$:

$$w_1(x,-0) = w_2(x,+0);\ \tau^1{}_{yz}(x,-0) = \tau^2{}_{yz}(x,+0);\ x \,\overline{\in}\, (l_{2N-1}; l_{2N}); \qquad (3)$$

Здесь $w_j(x;y)$ $(j = 1;2)$ – упругое перемещение.

Обозначим через $q(x)$,подлежащем определению контактные напряжения под штампом, и введем функции скачков на линии трещины:

$$q(x) = \tau_{yz}(x,-h);\ f(x) = \tau_{yz}{}^1(x,-0) - \tau^2{}_{yz}(x,+0);$$
$$g(x) = w_1(x,-0) - w_2(x,+0);. \qquad (4)$$

Решая краевую задачу и предполагая при этом, что $\tau^-{}_{2\mathrm{N}-1;\mathrm{N}}(x)$ и $f(x)$, известные для определения компонентов напряжений в области Ω_1^*, получим:

$$-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\gamma+1}\int_{l_1}^{l_2} g'_{12}(t)\cdot\left(\frac{1}{t-x} - K_{gl}(t;x)\right)dt - \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\gamma+1}\int_{l_3}^{l_4} g'_{34}(t)\cdot\left(\frac{1}{t-x} - K_{gl}(t;x)\right)dt +$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{a_2} q_{12\gamma}(t)\cdot K_{ql}(t;x)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{a_3}^{a_4} q_{34\gamma}(t)\cdot K_{ql}(t;x)\,dt = \Phi_1(x);\ l_1 < x < l_2; \qquad (5)$$

$$-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\gamma+1}\int_{l_1}^{l_2} g'_{12}(t)\cdot\left(\frac{1}{t-x} - K_{gl}(t;x)\right)dt - \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\gamma+1}\int_{l_3}^{l_4} g'_{34}(t)\cdot\left(\frac{1}{t-x} - K_{gl}(t;x)\right)dt +$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{a_2} q_{12\gamma}(t)\cdot K_{ql}(t;x)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{a_3}^{a_4} q_{34\gamma}(t)\cdot K_{ql}(t;x)\,dt = \Phi_2(x);\ l_3 < x < l_4; \qquad (6)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{l_1}^{l_2} g_{12}{}'(t)\cdot K_{ga}(t;x)\,dt + \int_{l_3}^{l_4} g_{34}{}'(t)\cdot K_{ga}(t;x)\,dt - -\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{a_2} q_{12\gamma}(t)\cdot\left(\frac{1}{t-x} + K_{qa}(t;x)\right)dt -$$
$$-\int_{a_3}^{a_4} q_{34\gamma}(t)\cdot\left(\frac{1}{t-x} + K_{qa}(t;x)\right)dt = \Phi_3(t;x);\ a_1 < x < a_2; \qquad (7)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{l_1}^{l_2} g_{12}{}'(t)\cdot K_{ga}(t;x)\,dt + \int_{l_3}^{l_4} g_{34}{}'(t)\cdot K_{ga}(t;x)\,dt - -\frac{1}{\pi}\cdot\int_{a_1}^{a_2} q_{12\gamma}(t)\cdot\left(\frac{1}{t-x} + K_{qa}(t;x)\right)dt -$$
$$-\int_{a_3}^{a_4} q_{34\gamma}(t)\cdot\left(\frac{1}{t-x} + K_{qa}(t;x)\right)dt = \Phi_4(t;x);\ a_3 < x < a_4 \qquad (8)$$

где функции $g'_{12}(t)$, $g'_{34}(t)$, $q_{12\gamma}(t)$, $q_{34\gamma}(t)$ пока неизвестны;

$$\Phi_1(x) = \tau^-{}_{12\gamma}(x) + \tau^+{}_{12\gamma}(x) - \gamma\cdot\tau^-{}_{34\gamma}(x) + \tau^+{}_{34\gamma}(x) -$$
$$-\frac{1}{\pi}\cdot\int_{l_1}^{l_2} f_{12\gamma}(t)\cdot dt\cdot K_{lf}(t;x) - \frac{1}{\pi}\cdot\int_{l_3}^{l_4} f_{34\gamma}(t)\cdot dt\cdot K_{lf}(t;x);$$
$$\Phi_2(x) = \tau^-{}_{34\gamma}(x) + \tau^+{}_{34\gamma}(x) - \gamma\cdot\tau^-{}_{12\gamma}(x) + \tau^+{}_{12\gamma}(x) -$$

$$-\frac{1}{\pi}\cdot\int_{l_1}^{l_2} f_{12\gamma}(t)\cdot dt\cdot K_{lf}(t;x)-\frac{1}{\pi}\cdot\int_{l_3}^{l_4} f_{34\gamma}(t)\cdot dt\cdot K_{lf}(t;x)\,;$$

$$\Phi_3(x)=-\frac{1}{\pi}\cdot\int_{l_1}^{l_2} f_{12\gamma}(t)\cdot dt\cdot K_{af}(t;x)-\frac{1}{\pi}\cdot\int_{l_3}^{l_4} f_{34\gamma}(t)\cdot dt\cdot K_{af}(t;x)\,;$$

$$\Phi_4(x)=-\frac{1}{\pi}\cdot\int_{l_1}^{l_2} f_{12\gamma}(t)\cdot dt\cdot K_{af}(t;x)-\frac{1}{\pi}\cdot\int_{l_3}^{l_4} f_{34\gamma}(t)\cdot dt\cdot K_{af}(t;x)\,; \qquad (9)$$

$$\gamma=\frac{G_1}{G_2};\ E(\alpha\cdot h)=\ ch(\alpha\cdot h)+\gamma\cdot sh(\alpha\cdot h);\ q_\gamma(t)\ =\frac{q(t)}{G_1};\ \ f_\gamma(t)\ =\frac{f(t)}{G_2};\ f_\gamma(x)=\frac{f(x)}{G_2};$$

$$\tau^-{}_\gamma(x)=\ \frac{\tau^-(x)}{G_1};$$

$$k_s(y)=\frac{(\gamma+1)\cdot e^{-\alpha\cdot(h+y)}-(\gamma-1)\cdot e^{-\alpha\cdot(h-y)}}{2\cdot E(\alpha\cdot h)};\ k_{sc}(y)=\frac{(\gamma-1)\cdot\left(e^{\alpha\cdot y}+e^{-\alpha\cdot(2\cdot h+y)}\right)}{2\cdot E(\alpha\cdot h)};$$

$$k_{lg}(t;x)=\int_0^\infty k_s(0)\cdot sin\big(u\cdot(t-x)\big)\cdot du\,;\ k_{lq}(t;x)=k_{ag}(t;x)=\int_0^\infty \frac{cos\big(u\cdot(t-x)\big)}{E(\alpha\cdot h)}\cdot d\alpha\,;$$

$$k_{lf}(t;x)=\int_0^\infty k_s(0)\cdot cos\big(u\cdot(t-x)\big)\cdot du\,;\ k_{aq}(t;x)=\int_0^\infty k_{sc}(-h)\cdot sin\big(u\cdot(t-x)\big)\cdot du\,;$$

$$k_{af}(t;x)=\int_0^\infty \frac{sin\big(u\cdot(t-x)\big)}{E(\alpha\cdot h)}\cdot du.$$

Уравнения представляют собой сингулярные интегральные уравнения (СИУ) первого рода.

Из постановки задачи следует, что неизвестные функции должны еще удовлетворять следующим условиям:

$$\int_{l_1}^{l_2} g'_{12}(t)\cdot\ dt=0;\ \int_{l_3}^{l_4} g'_{34}(t)\cdot\ dt=0;\ \int_{a_1}^{a_2} q_{12\gamma}(t)\cdot\ dt=T_1;\ \int_{a_3}^{a_4} q_{34\gamma}(t)\cdot\ dt=\mathrm{T}_2; \qquad (10)$$

где T_1 и T_2 - равнодействующие внешних сил на штамп, которые предполагаются заданными.

Таким образом, решение поставленной выше задачи в общем случае свелось системе СИУ относительно $g'_{12}(t)$, $g'_{34}(t)$, $q_{12\gamma}(t)$, $q_{34\gamma}(t)$.

Численный анализ и выводы. Проведен численный анализ для случаев, когда на поверхности слоя симметрично расположены два штампа и на линии между слоем и полупространством есть одна трещина, центральная точка которой совпадает с точкой $x=0, y=0$ (рис. 2).

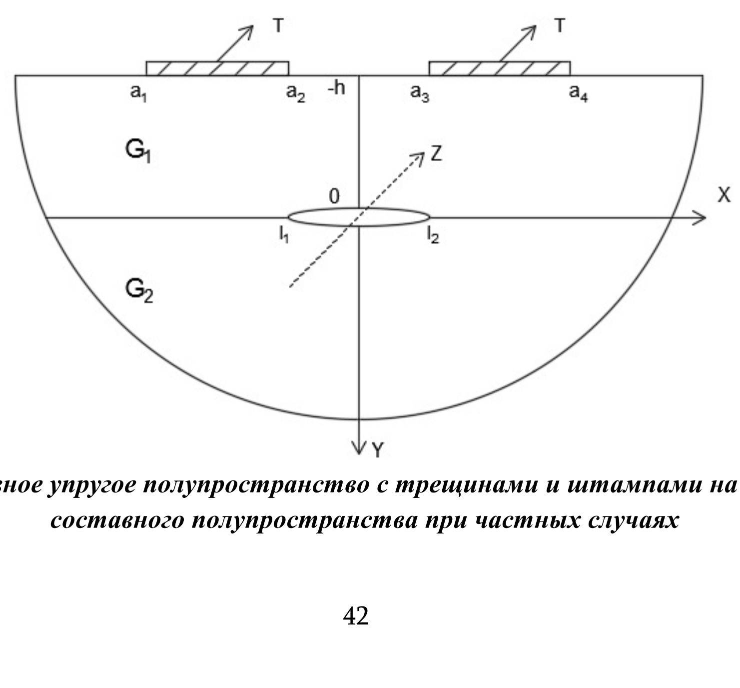

Рис. 2. Составное упругое полупространство с трещинами и штампами на поверхности составного полупространства при частных случаях

На рис. 3. приведены: a – графики напряжений около трещин, b – график напряжений под штампом.

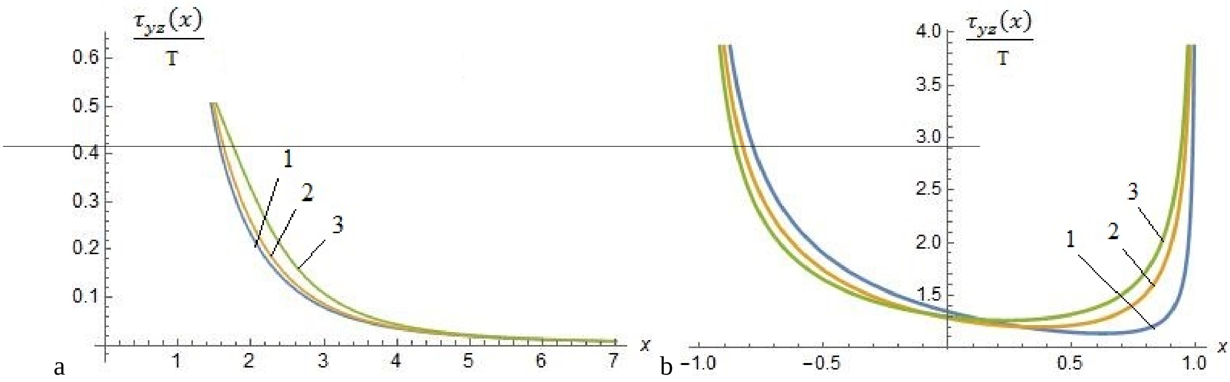

Рис. 3. Графики напряжений:*1- $\frac{\tau_{yz}(x)}{T}$, когда $a_2/-h$=0,05; 2- $\frac{\tau_{yz}(x)}{T}$, когда $a_2/-h$=0,55; 3- $\frac{\tau_{yz}(x)}{T}$, когда $a_2/-h$=1,05*

На таблице 1 представлены коэффициенты интенсивности напряжений.

Таблица 1

Коэффициенты интенсивности напряжений

$a_2/-h$	0,05	0,55	1,05
$K_{g\gamma III}$	0,6135	0,5278	0,3741
$K_{q\gamma III}$	0,3094	0,5793	0,6842

Здесь $K_{g\gamma III}$ и $K_{q\gamma III}$ - коэффициенты интенсивности напряжений около трещин под штампом.

При удалении штампов друг от друга коэффициент интенсивности напряжений около трещин $K_{g\gamma III}$ уменьшается, а коэффициент интенсивности напряжений под штампом $K_{q\gamma III}$ - возрастает.

ՃԱՔԵՐԻ ԵՎ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ՎՐԱ ՇՏԱՄՊՆԵՐԻ ՏԵՍՔՈՎ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԿՈՒՏԱԿԻՉՆԵՐ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ԼԱՐՎԱԾԱԴԵՖՈՐՄԱՑԻՈՆ ՎԻՃԱԿԸ ՀԱԿԱՀԱՐԹ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՅԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա.Ա. Մուսայելյան

Ճարտարապետության և շինարարության Հայաստանի ազգային համալսարան

Առանցքային բառեր. *կիսատարածություն, շերտ, ճաք, շտամպ, եզակիություն:*

Հետազոտվում է երկայնական սահքի պայմաններում դեֆորմացված բաղադրյալ առաձգական կիսատարածության կոնտակտային խնդիր: Այն բաղկացած է անսահման առաձգական վերջավոր հաստությամբ շերտից և դրա հետ փոխազդող առաձգական կիսատարածությունից, որոնք ունեն տարբեր սահքի մոդուլներ: Կիսատարածության մակերևույթի վրա կցվում է վերջավոր լայնությամբ և հարթ հիմքով կոշտ մամլիչ: Շերտի և կիսատարածության միջև փոխազդման գիծը թուլացված է (թունելային) ճաքով: Այս տվյալները պետք է համեմատել շինարարական կոնստրուկցիաների, շենքերի և կառույցների հիմքերի համար թույլատրելի արժեքների հետ, որոնք գոյություն ունեն տարբեր շինարարական նյութերի համար:

THE STRESSED DEFORMITY STATE OF THE COMPOSITE HALF-SPACE FOR ANTI PLANE DEFORMATION

A.A. Musayelyan
National University of Architecture and Construction of Armenia

Keywords: *half-space, layer, crack, stamp, singularity*

A contact problem for the deformed composite elastic half-space under longitudinal shear conditions is studied. The half-space consists of an elastic infinite layer of finite thickness and an elastic half-space contacting with it, which have different shear moduli. A rigid ribbon stamp with a flat base and a finite width is attached on the surface of the half-space. The contact line between the layer and the half-space is weakened (tunnel-type) by the crack. These data should be compared with the permissible values for construction structures, buildings and erections that are available for various building materials.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мусхешвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения. М: «Наука», 1968.-, 511 с.
2. **Новацкий В.** Теория упругости.- М.: Мир, 1975.- 375 с.
3. **Агаян К.Л., Саркисян В.Г.** Контактная задача упругой плоскости с трещинами, армированной бесконечными включениями // Сб.: Механика деформируемого твердого тела. – Ереван: Изд.-во АН Армении, 1993.- С. 42-46.
4. **Акопян В.Н., Саргсян А.О.** Об одной динамической смешанной задаче для составного пространства с трещиной при антиплоской деформации. // Сб. ст.: “Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести”, посв. 75-летию акад. М. А. Задояна.- Ереван: “Гитутюн”, 2006.- С. 50-56.
5. **Мхитарян С. М.** О двух смешанных задачах, связанных с вопросами взаимодействия концентраторов напряжений различных типов с массивными телами при антиплоской деформации. В сб.: Механика деформируемого твердого тела.- Ереван: Изд – во НАН Армении, 1993.- С. 129–143.

Ներկայացվել է՝ 25.10.2017 թ.
Ընդունվել է տպագրության՝ 12.12.2017 թ.